प्रश्न बैंक

2022-23

विषयः गणित

कक्षा: 12वीं

समग्र शिक्षा अभियान (सेकेण्डरी एजुकेशन) लोक शिक्षण संचालनालय म.प्र भोपाल

.

माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल
हायर सेकेण्डरी परीक्षा सत्र 2022–23
BLUE PRINT OF QUESTION PAPER

कक्षा :– 12वीं
विषय :– गणित

पूर्णांक :– 80
समय :– 3:00 घंटे

क्र.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आवंटित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल प्रश्न
			1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	5 अंक	
1	अध्याय–1 संबंध एवं फलन	5	3	1	–	–	–	1
2	अध्याय–2 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	6	4	1	–	–	–	1
3	अध्याय–3 आव्यूह	6	4	1	–	–	–	1
4	अध्याय–4 सारणिक	6	2	–	–	1	–	1
5	अध्याय–5 सांतत्य तथा अवकलनीयता	8	2	1	–	1	–	2
6	अध्याय–6 अवकलज के अनुप्रयोग	6	2	2	–	–	–	2
7	अध्याय–7 समाकलन	12	6	1	–	1	–	2
8	अध्याय–8 समाकलनों के अनुप्रयोग	3	–	–	1	–	–	1
9	अध्याय–9 अवकल समीकरण	6	3	–	1	–	–	1
10	अध्याय–10 सदिश बीजगणित	7	3	2	–	–	–	2
11	अध्याय–11 त्रि–विमीय ज्यामिति	7	1	1	–	1	–	2
12	अध्याय–12 रैखिक प्रोग्रामन	3	–	–	1	–	–	1
13	अध्याय–13 प्रायिकता	5	2	–	1	–	–	1
	कुल योग (अंक)	80	32	20	12	16	–	18+5=23

प्रश्न पत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश –

➤ **40% वस्तुनिष्ठ प्रश्न, 40% विषयपरक प्रश्न, 20% विश्लेषणात्मक प्रश्न होंगे।**

1. प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक 32 वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे। सही विकल्प 06 अंक, रिक्त स्थान 07 अंक, सही जोड़ी 06 अंक, एक वाक्य में उत्तर 07 अंक, सत्य असत्य 06 अंक, संबंधी प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न पर 01 अंक निर्धारित है।
2. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर सभी प्रश्नों में आंतरिक विकल्प का प्रावधान होगा। यह विकल्प समान इकाई/उप इकाई से तथा समान कठिनाई स्तर वाले होंगे। इन प्रश्नों की उत्तर सीमा निम्नानुसार होगी –

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न	02 अंक	लगभग 30 शब्द
लघुउत्तरीय प्रश्न	03 अंक	लगभग 75 शब्द
विश्लेषणात्मक	04 अंक	लगभग 120 शब्द
	05 अंक	लगभग 150 शब्द

3. कठिनाई स्तर :– 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन प्रश्न।

सत्र 2022–23
कक्षा:– 12 वीं
विषयः– गणित

पाठ्यक्रम में से हटाई गई विषयवस्तु

क्र.	इकाई	कम किये गये अध्याय / विषय वस्तु का नाम
1	अध्याय–1 संबंध एवं फलन	1.4 फलनों का संयोजन तथा व्युत्क्रमणीय फलन 1.5 द्विआधारी संक्रियाएँ
2	अध्याय–3 आव्यूह	3.7 आव्यूह पर प्रारंभिक संक्रिया (आव्यूह रूपांतरण)
3	अध्याय–5 सांतत्य तथा अवकलनीयता	5.8 रोले एवं लेग्रांज़ माध्यमान प्रमेय
4	अध्याय–6 अवकलज के अनुप्रयोग	6.4 स्पर्श रेखाएँ और अभिलंब 6.5 सन्निकटन
5	अध्याय– 7 समाकलन	7.7.1 योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन
6	अध्याय–8 समाकलनों के अनुप्रयोग	8.3 दो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल
7	अध्याय–9 अवकल समीकरण	9.4 दिये हुये व्यापक हल वाले अवकल समीकरण का निर्माण
8	अध्याय–11 त्रि–विमीय ज्यामिति	11.6 समतल 11.7 दो रेखाओं का सह–तलीय होना 11.8 दो समतलों के बीच का कोण 11.9 समतल से दिए गए बिंदु की दूरी 11.10 एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण
9	अध्याय–12 रैखिक प्रोग्रामन	12.3 रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के भिन्न प्रकार
10	अध्याय–13 प्रायकिता	13.7 बरनौली परीक्षण और द्विपद बंटन

.

अध्याय-1
संबध एवं फलन

स्मरणीय बिंदु :

इस अध्याय में हमने विविध प्रकार संबंधों फलनों तथा द्विआधारी संक्रियाओं का अध्ययन किया है।

इस अध्याय की मुख्य विषय-वस्तु निम्नलिखित हैः

® X में, $R = \phi \subset X \times X$ द्वारा प्रदत्त संबंध R रिक्त संबंध होता है।

® X में $R = X \times X$ द्वारा प्रदत्त संबंध R सार्वत्रिक संबंध है।

X में R ऐसा संबंध कि $\forall a \in X, (a,a) \in R$, R स्वतुल्य संबंध है।

X में इस प्रकार का संबंध R, जो प्रतिबंध $(a,b) \in R$ का तात्पर्य है कि $(b,a) \in R$ को संतुष्ट करता है सममित संबंध है।

X में R प्रतिबंध $(a,b) \in R$ तथा $(b,a) \in R \Rightarrow (a,c) \in R\ \forall\ a,b,c \in X$ को संतुष्ट करने वाला संबंध R संक्रामक संबंध है।

X में संबंध R, जो स्वतुल्य सममित तथा संक्रामक है तुल्यता संबंध है।

X में R किसी तुल्यता संबंध R के लिए $a \in X$ के संगत तुल्यता वर्ग $[a]$, X का वह उपसमुच्चय है जिसके सभी अवयव a से संबंधित हैं।

® एक फलन $f : X \rightarrow Y$ एकैकी (अथवा एकैक) फलन है
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in X$

® एक फलन $f : X \rightarrow Y$ आच्छादक (अथवा आच्छादी) फलन है यदि किसी प्रदत्त

$y \in Y, \exists\, x \in X$, इस प्रकार कि $f(x) = y$

® एक फलन $f : X \rightarrow Y$ एकैकी तथा आच्छादक (अथवा एकैकी आच्छादक) फलन है यदि f एकैकी तथा अच्छादक दोनों है।

® किसी प्रदत्त परिमित समुच्चय X के लिए फलन $f : X \rightarrow X$ एकैकी तदानुसार आच्छादक होता है यदि और केवल यदि f आच्दछादक तदानुसार एकैकी है। यह किसी परिमित समुच्चय का अभिलाक्षणिक गुणधर्म (Characterstic Property) है। यह अपरिमित समुच्चय के लिए सत्य नहीं है।

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए -

(i) यदि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = (1,1), (2,2), (3,3)\ (1,2)\ (2,3)$ द्वारा प्रदत्त संबंध है :

(a) केवल सममित (b) केवल स्वतुल्य (b) केवल संक्रामक (c) एक तुल्यता संबंध

(ii) यदि फलन $f: R \rightarrow R$ जो $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित है तोः

(a) एकैकी आच्छादक है। (b) एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है।

(c) आच्छादक है किन्तु एकैकी नहीं (d) एकैकी आच्छादक दोनो नहीं है।

(iii) यदि फलन $f: N \rightarrow N$ जो $f(x) = 2x$ द्वारा परिभाषित है तो :

(a) एकैकी आच्छादक है। (b) एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है।

(c) आच्छादक है किन्तु एकैकी नहीं (d) एकैकी आच्छादक दोनो नहीं है।

(iv) यदि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में $R = \{(1,2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3), (2,1), (3,1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध है तोः

(a) स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रमक नहीं है।

(b) स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

(c) सममित तथा संक्रमक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

(d) एक तुल्यता संबंध है।

(v) यदि समुच्चय $\{1,2,3,4\}$ में $R=\{(1,2),(2,2),(1,1),(4,4),(1,3),(3,3),(2,1),(3,1)\}$द्वारा प्रदत्त संबंध है तोः

(a) स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रमक नहीं है।

(b) स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

(c) सममित तथा संक्रमक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

(d) एक तुल्यता संबंध है।

(vi) यदि $A=\{1,2,3,4\}$ हो निम्न में से कौन सा तुल्यता संबंध नही हैः

(a) $\{(1,2),(2,2),(3,3)\}$ (b) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

(c) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ (d) इनमें से कोई नहीं

(vii) माना समुच्चय N में $R=\{(a,b): a=b-2,\ b>6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध है तब निम्न मे से सही उत्तर चुनिएः

(a) $(2,4)\in R$ (b) $(3,8)\in R$ (c) $(6,8)\in R$ (d) $(8,7)\in R$

(viii) यदि फलन f किसी समुच्चय A से A पर परिभाषित है तब f व्युत्क्रमणीय फलन होगा जब फलन अनिवार्यत होः

(a) एकैकी (b) आच्छादक (c) एकैकी एवं आच्छादक (d) इनमें से कोई नहीं

(ix) माना R रेखाओं के समुच्चय L पर संबंध ${}_{l_1}R_{l_2}=$ 'रेखा l_1 रेखा l_2 पर लंबवत है' द्वारा परिभाषित है तो R किस प्रकार का संबंध हैः

(a) स्वतुल्य एवं सममित (b) सममित एवं संक्रामक (c) तुल्यता संबंध (d) सममित संबंध

(x) दिए गए समुच्चय $A=\{a,b,c\}$ के लिए एक तत्समक संबंध होगाः

(a) $R=\{(a,\ b),(a,c)\}$ (b) $R=\{(a,a),(b,b)\ (c,c)\}$

(c) $R=\{(a,\ a),(b,b)\ (c,c)(a,c)\}$ (d) $R=\{(c,\ a),(b,a)\ (a,a)\}$

(xi) माना $f: R\to R,\ f(x)=x^4$ द्वारा परिभाषित है तोः

(a) f एकैकी आच्छादक है। (b) f बहुएक आच्छादक नहीं है।

(c) f एकैकी पर आच्छादक नहीं (d) f न एकैकी है और न आच्छादक।

(xii) माना $f: N\to N$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x)=3x$ जहाँ $x\in N$ तब f होगाः

(a) आच्छादक (b) प्रतिलोम (c) एकैकी (d) इनमें से कोई नहीं

(xiii) यदि $F: R\to R$ जहाँ $F(x)=5x-7\ x\in R$ तब $f(7)$ का मान होगा :

(a) 0 (b) 28 (c) 14 (d) 35

(xiv) माना समुच्चय $A=\{1,2,3,8,10,11\}$ और R समुच्चय A पर परिभाषित संबंध इस प्रकार है कि $R=\{(a,b): a-b=4\}$ तब संबंध R होगा।

(a) रिक्त संबंध (b) स्वतुल्य संबंध (c) सममित संबंध (d) तुल्यता संबंध

(xv) माना R एक सम्बंध Z पर इस प्रकार परिभाषित है कि $aRb\Rightarrow a\geq b$ तब R होगा

(a) सममित संक्रामक किन्तु स्वतुल्य नहीं। (b) स्वतुल्य सममित किन्तु संक्रामक नहीं।

(c) स्वतुल्य और संक्रामक किन्तु सममित नहीं। (d) एक तुल्यता संबंध

(xvi) माना $A=\{1,2,3\},\ B=\{1,4,6,9\}$ और संबंध A से B पर इस प्रकार परिभाषित है कि x बड़ा है y से तब R का परिसर क्या होगा

(a) $\{1,4,6,9\}$ (b) $\{4,6,9\}$ (c) $\{1\}$ (d) इनमें से कोई नहीं

(xvii) यदि समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ पर संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy\Rightarrow y=3x$ तब R बराबर है।

(a) $\{(3,1)(6,2)(8,2)(9,3)\}$ (b) $\{(3,1)(6,2)(9,3)\}$

(c) $\{(1,3)(2,6)(3,9)\}$ (d) इनमें से कोई नही

(xviii) यदि $A=\{1,2,3\}$ हो तो अवयव $(1,2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है-

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(xix) X में प्रतिबंध R, $(a,b)\in R$ तथा $(b,c)\in R\Rightarrow(a,c)\in R$ जहाँ $a,b,c\in X$ को संतुष्ट करने वाला सम्बंध R

(a) सममित सम्बंध है। (b) स्वतुल्य सम्बंध है।

(c) संक्रामक सम्बंध है। (d) रिक्त सम्बंध है।

(xx) प्रदत्त सम्बंध R रिक्त सम्बंध होगा यदि -

(a) $R=\phi\subset x\times x$ (b) $R\neq\phi\subset x\times x$ (c) $R\subset x\times x$ (d) $R=\not\subset x\times x$

(xxi) $f: A \to B$ एक आच्छादक फलन होगा यदि -

$(a)\ f(A) \subset B$ $(b)\ f(A) \supset B$

$(c)\ f(A) = B$ $(d)\ f(A) \neq B$

(xxii) मान लीजिये कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \to R$ है तब :

(a) एकैकी आच्छादक (b) बहुएक आच्छादक है।

(c) एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं (d)न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

(xxiii) यदि $n(A) = 3$ तथा $n(B) = 2$ तो $n\,(A \times B) =$

(a) 6 (b) 2 (c) 4 (d) 3

(xxiv) X में सम्बंध R जो स्वतुल्य सममित तथा संक्रामक है वह सम्बंध कहलाता है -

(a) तुल्यता सम्बंध (b) सार्वत्रिक सम्बंध

(c) रिक्त सम्बंध (d) सममित सम्बंध

प्रश्न 2. रिक्त स्थानो की पूर्ति कीजिए :

(i) समुच्चय A पर परिभाषित कोई संबंध R स्वतुल्य सममित तथा संक्रामक है तो R एक ------ कहलाता है।

(ii) यदि $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $\{(1, 4)(2,5)(3, 6)\}\,A$ से B पर एक फलन है तो f एक--------फलन है।

(iii) X में प्रतिबंध $R, (a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ जहाँ $a, b, c \in X$ को संतुष्ट करने वाला सम्बंध R ....सम्बंध है।

(iv) X में इस प्रकार का सम्बंध R जो प्रतिबंध $(a, b) \epsilon R$ का तात्पर्य है कि $(b, a) \epsilon R$ को संतुष्ट करता है A .... सम्बंध है।

(v) X में ऐसा सम्बंध है कि फॉर ऑल $a \epsilon x\ (a, a) \epsilon R$ .... सम्बंध है।

(vi) X में $R = X \times X$ द्वारा प्रदत्त सम्बंध R .... सम्बंध है।

(vii) एक फलन $f: X \to Y$ एकैकी फलन है यदि $f(x_1) = f(x_2)$ तब सभी $x_1\ x_2 \in x$ के लिए $x_1 =$ ....

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखो :

(i) यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो ऐसे संबंध जिनमे अवयव (1,2) तथा (1,3) हो और जो स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है की संख्या 1 है

(ii) यदि R_1तथा R_2 समुच्चय A मे तुल्यता संबंध है तो $R_1 \cap R_2$ भी एक तुल्यता संबंध होगा

(iii) यदि $f: X \to Y$ एक फलन है X में $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ द्वारा प्रदत्त एक संबंध है तो R एक तुल्यता संबंध नहीं है।

(iv) $f: X \to Y$ एक आच्छादक फलन है यदि और केवल यदि f का परिसर $= Y$

(v) $f: X \to Y$ एकैकी कहलाता है यदि $x_1\ x_2 \in$ के लिए $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

प्रश्न क्रमांक -

4. सिद्ध कीजिए कि R में $R = \{(a, b): a \leq b\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य तथा संक्रामक है।

5. यदि $n \in N$ के लिए $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & ;\text{यदि n विषम है} \\ \frac{n}{2} & ;\ \text{यदि n सम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित एक फलन

   $f: N \to N$ है तो दिखाइए कि f एकैकी आच्छादक है।

6. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(a, b): b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

7. सिद्ध कीजिए कि पूर्णांको के समुच्चय $R = (a, b)$ 'संख्या $2, (a - b)$ को विभाजित करती है' द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है।

8. यदि फलन $f: N \to N\,; f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त फलन की एकैकी तथा आच्छादी गुणों की जाँच कीजिए।

9. यदि $A = \{1,2,3,\}$ $B = \{4,5,6,7\}$ तथा $f = \{(1,4)\ (2,5)\ (3,6)\}$ A से B पर एक फलन है तो दिखाएइ कि f एकैकी है।

10. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1,2,3\}$ में $R = \{(1,2)\ (2,1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है।

11. सिद्ध कीजिए कि $f(1) = f(2) = 1$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: N \to N$ आच्छादक तो है किन्तु एकैकी नहीं है।

12. सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) :$ x तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

13. सिद्ध कीजिए कि $A = \{1,2,3,4,5\}$ में, $R = \{(a,b) : |a - b|$ सम है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि {1, 3, 5} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय {2, 4} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंध्ति हैं परंतु {1, 3, 5} का कोई भी अवयव {2, 4} के किसी अवयव से संबंध्ति नहीं है।

14. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R* \to R*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ $R*$ सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत $R*$ को N से बदल दिया जाए, जब कि सहप्रांत पूर्ववत $R*$ ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

15. सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों वेफ समुच्चय A में, $R = \{(p_1, p_2) : p_1$ तथा p_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$ प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 3, 4, और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर– (अध्याय 1)

प्रश्न1. (i) b (ii) a (iii) b (iv) b (v) d (vi) d (vii) c (viii) c (ix) d (x) b (xi) b (xii) c (xiii) b (xiv) a (xv) c (xvi) b (xvii) c (xviii) b (xix) c (xx) a (xxi) c (xxii) a (xxiii) a (xxiv) a

प्रश्न 2. (i) तुल्यता संबंध (v) एकैंकी
(vi) संक्रामक (vii) सममित सम्बंध (viii) स्वतुल्य सम्बंध (ix) सार्वत्रिक सम्बंध (x) x_2

प्रश्न 3- (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य

अध्याय-2

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

स्मरणीय बिंदु

- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (मुख्य शाखा) के प्रांत तथा परिसर निम्न सारणी में वर्णित है :

फलन	प्रांत	परिसर (मुख्य शाखा)
$y = \sin^{-1} x$	$[-1,1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = cos^{-1} x$	$[-1,1]$	$[0, \pi]$
$y = cosec^{-1} x$	$R - (-1,1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = sec^{-1} x$	$R - (-1,1)$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$y = tan^{-1} x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = cot^{-1} x$	R	$(0, \pi)$

- $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$ की भ्रान्ति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ और इसी प्रकार ये तथ्य अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के सत्य होता है।
- किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का वह मान, जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित होता है, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का मुख्य मान (Principle Value) कहलाता है।

उपयुक्त प्रान्तों के लिए :

- $y = sin^{-1}x \Rightarrow x = \sin y$ या $x = \sin y \Rightarrow y = sin^{-1}x$
- $\sin(sin^{-1} x) = x$ या $\sin^{-1}(\sin x) = x$
- $sin^{-1}\frac{1}{x} = cosec^{-1}x$ $\quad cos^{-1}\frac{1}{x} = sec^{-1}x$
- $tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x$
- $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x$ $\quad tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x$
- $cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x$ $\quad cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$
- $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$ $\quad sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x$
- $cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x$ $\quad sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
- $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ $\quad cosec^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
- $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$, $xy < 1$
- $tan^{-1}x + tan^{-1}y = \pi + tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$, $xy > 1, x > 0, y > 0$
- $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$, $xy > -1$
- $2tan^{-1}x = sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $0 \le x \le 1$
- $2tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $|x| < 1$

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए -

(i) यदि $sin^{-1}\frac{1}{x} = y$ तब

$(a)\ 0 \le y \le \pi$ $(b)\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $(c)\ 0 < y < \pi$ $(d)\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(ii) $sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$(a)\ 2sin^{-1}x$ $(b)\ 2cos^{-1}x$ $(c)\ sin^{-1}2x$ $(d)\ tan^{-1}2x$

(iii) $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2) =$

$(a)\ \pi$ $(b)\ -\frac{\pi}{3}$ $(c)\ \frac{\pi}{3}$ $(d)\ \frac{2\pi}{3}$

(iv) $sin\left(\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$

$(a)\ \frac{1}{2}$ $(b)\ \frac{1}{3}$ $(c)\ \frac{1}{4}$ $(d)\ 1$

(v) $tan^{-1}\sqrt{3} - cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) =$

$(a)\ \pi$ $(b)\ -\frac{\pi}{2}$ $(c)\ 0$ $(d)\ 2\sqrt{3}$

(vi) $sin(tan^{-1}x), |x| < 1 =$

$(a)\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(b)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(c)\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $(d)\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(vii) $sin^{-1}(1-x) - 2sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, तब $x =$

$(a)\ 0, \frac{1}{2}$ $(b)\ 1, \frac{1}{2}$ $(c)\ 0$ $(d)\ \frac{1}{2}$

(viii) $tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\frac{x-y}{x+y} =$

$(a)\ \frac{\pi}{2}$ $(b)\ \frac{\pi}{3}$ $(c)\ \frac{\pi}{4}$ $(d)\ \frac{-3\pi}{4}$

(ix) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य का मान होता है–

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{2}$ (स) $\frac{\pi}{4}$ (द) $\frac{\pi}{3}$

(x) $\cot^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ का मुख्य का मान होता है–

(अ) $\frac{2\pi}{3}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$ (स) $\frac{5\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{4}$

(xi) $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य का मान –

(अ) $\frac{\pi}{4}$ (ब) $-\frac{\pi}{4}$ (स) $\frac{\pi}{2}$ (द) $\frac{-\pi}{2}$

(xii) $tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ बराबर है –

(अ) $\sin^{-1}x$ (ब) $\cos^{-1}x$ (स) $\sec^{-1}x$ (द) $\cot^{-1}x$

(xiii) $Sin^{-1}(-x)$ का मुख्य का मान होता है

(अ) $\sin^{-1}x$ (ब) $-\sin^{-1}x$ (स) $\cos^{-1}x$ (द) $-\cos^{-1}x$

(xiv) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y =$

(अ) $tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ (ब) $tan^{-1}\frac{x+y}{1+xy}$ (स) $tan^{-1}\frac{x-y}{1-xy}$ (द) $tan^{-1}\frac{x+y}{xy-1}$

(xv) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x =$

(अ) $\frac{\pi}{4}$ (ब) $\frac{\pi}{2}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{6}$

(xvi) $2\tan^{-1}x$ का मान होता है –

(अ) $tan^{-1}(\frac{2x}{1-x^2})$ (ब) $tan^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})$

(स) $-tan^{-1}(\frac{2x}{1-x^2})$ (द) $\frac{1}{2}tan^{-1}x$

(xvii) $cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ का मान होता है –

(अ) $\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$ (स) $\frac{2\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{2}$

(xviii) $cot^{-1}x$ की मुख्य शाखा का परिसर होता है –

(अ) $(0, \pi)$ (ब) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (स) $[0, \pi]$ (द) $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

(xix) $\tan^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर होता है –

(अ) $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ (ब) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (स) $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ (द) $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

(xx) $\sin^{-1} x$ का प्रांत

(अ) [-1, 1] (ब) (1,-1) (स) (1, 7) (द) (1, 1)

(xxi) $\cos^{-1}\left(Cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है –

(अ) $\frac{7\pi}{6}$ (ब) $(\frac{5\pi}{6})$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{6}$

(xxii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ का मान बराबर है।

(अ) $\frac{\pi}{4}$ (ब) $-\frac{\pi}{4}$ (स) $\frac{\pi}{2}$ (द) $\frac{\pi}{3}$

(xxiii) $sin^{-1}(sin\frac{3\pi}{5})$ का मान

(अ) $\frac{2\pi}{5}$ (ब) $\frac{2\pi}{3}$ (स) $\frac{\pi}{4}$ (द) $\frac{\pi}{3}$

(xxiv) $Sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ हो तो का मान बराबर है।

(अ) $0, \frac{1}{2}$ (ब) $1, \frac{1}{2}$ (स) 0 (द) $\frac{1}{2}$

(xxv) $\cos^{-1}x$ का प्रांत –

(अ) (-1, 1) (ब) [-1,1] (स) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (द) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

प्रश्न 2. रिक्त स्थानो की पूर्ति कीजिए:

i. $cos^{-1}x$ का प्रांत ——— है।

ii. $tan^{-1}x$ की मुख्य मान शाखा ———— है।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखो

i. $cos^{-1}x$ का प्रांत $R-(-1, 1)$ है।

ii. $sec^{-1}x$ की मुख्य मान शाखा $[0, \pi]-\{\frac{\pi}{2}\}$ है।

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये :

i. $cot^{-1}x$ का प्रांत लिखिये

ii. $cosec^{-1}x$ की मुख्य मान शाखा लिखिये।

iii. $\cos(sec^{-1}x + cosec^{-1}x), |x| \geq 1$ का मान लिखिये

iv. $\cot(tan^{-1}a + cot^{-1}a)$ का मान लिखिये।

प्रश्न 1. $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2. $tan^{-1}(1)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3. $cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4. $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. $tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6. $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. दर्शाइए कि $sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2sin^{-1}x \quad , -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 8. दर्शाइए कि $sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2cos^{-1}x \quad , -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिये कि $tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = tan^{-1}x\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिये कि $3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x-4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिये कि $3cos^{-1}x = cos^{-1}(4x^3-3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिये कि $tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}cos^{-1}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$, $x \in [0,1]$

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिये कि $tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x , -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1.$

प्रश्न 14. $cot^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right]$, $|x| > 1$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 15. $tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right]$, $|x| > 1$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 16. $tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$, $x \neq 0$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 17. $tan^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$, $|x| < 1$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 18. $tan^{-1}\left[\frac{3a^2x-x^2}{a^3-3ax^2}\right]$, $a > 0 , \frac{-a}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{3}}$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 19. $tan^{-1}\left[\frac{cosx}{1-sinx}\right]$, $\frac{-\pi}{2} < x \frac{3\pi}{2}$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 20. $tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}\right]$, $x < \pi$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 21. $tan^{-1}\left[\frac{cosx-sinx}{cosx+sinx}\right]$, $o < x < \pi$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 22. सिद्ध कीजिये – $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिये – $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) \quad |x| < \frac{1}{3}$

प्रश्न 24. $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$ को सरल कीजिये।

प्रश्न 25. दर्शाइए कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

प्रश्न 26. सिद्ध कीजिये– $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

प्रश्न 27. सिद्ध कीजिये– $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

प्रश्न 28. फलन $\tan^{-1}\frac{\left(3a^2-x^3\right)}{a^3-3ax^2}, a>0; \frac{-a}{\sqrt{3}}<x<\frac{a}{\sqrt{3}}$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 29.. सरल कीजिये $tan^{-1}\left[\frac{acosx-bsinx}{bcosx+asinx}\right]$, $if\ \frac{a}{b}tanx>-1$

प्रश्न 30. सिद्ध कीजिये : $tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}}{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}\right]=\frac{x}{2}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

प्रश्न 31. दर्शाइए कि : $tan^{-1}\frac{1}{2}+tan^{-1}\frac{2}{11}=tan^{-1}\frac{3}{4}$

प्रश्न 32. सिद्ध कीजिये : $tan^{-1}\frac{2}{11}+tan^{-1}\frac{7}{24}=tan^{-1}\frac{1}{2}$

प्रश्न 33. हल कीजिये : $tan^{-1}\frac{1}{5}+tan^{-1}\frac{1}{7}+tan^{-1}\frac{1}{3}+tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$

प्रश्न 34. सिद्ध कीजिये : $2tan^{-1}\frac{1}{2}+tan^{-1}\frac{1}{7}=tan^{-1}\frac{31}{17}$

प्रश्न 35. $\tan\left[2\cos\left(2sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 36. $tan\frac{1}{2}\left[sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+cos^{-1}\ \frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$, $|x|<1, y>0$ और $xy<1$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 37. यदि $sin\left(sin^{-1}\frac{1}{5}+cos^{-1}x\right)=1$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 38. यदि $tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 39. हल कीजिये $tan^{-1}2x+tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$

प्रश्न 40. $sin^{-1}\left[sin\frac{2\pi}{3}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 41. $sin^{-1}\left[sin\frac{3\pi}{5}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 42. $tan^{-1}\left[tan\frac{3\pi}{4}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 43. $tan^{-1}\left[tan\frac{7\pi}{6}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 44. $cos^{-1}\left[cos\frac{13\pi}{6}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 45. $tan\left[sin^{-1}\frac{3}{5}+cot^{-1}\frac{3}{2}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 46. दर्शाइए कि $sin^{-1}\frac{3}{5}-\ sin^{-1}\ \frac{8}{17}=cos^{-1}\frac{84}{85}$

प्रश्न 47. दर्शाइए कि $sin^{-1}\frac{8}{17}+\ sin^{-1}\ \frac{3}{5}=tan^{-1}\frac{77}{36}$

प्रश्न 48. दर्शाइए कि $cos^{-1}\frac{4}{5}+\ cos^{-1}\ \frac{12}{13}=cos^{-1}\frac{33}{35}$

प्रश्न 49. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan-1\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 50. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 51. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\frac{x}{2}\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

प्रश्न 51. $\tan^{-1}\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ को सरलतम रूप में लिखिये।

प्रश्न 52. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$ $|x|<1, y>0$ तथा $xy<1$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 53. $\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{55}{65}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 54. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{2}\le x \le 1$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 55. $\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर –

(i) b (ii) a (iii) b (iv) d (v) b (vi) d (vii) c (viii) c (ix) c (x) a (xi) b (xii) d (xiii) b (xiv) a (xv) b (xvi) a (xvii) c (xviii) a (xix) b (xx) a (xxi) b (xxii)b (xxiii) a (xxiv) c (xxv) b

प्र.2. (i) $[-1, 1]$ (ii) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

प्र.3. (i) सत्य (ii) सत्य

प्र.4. (i) R (ii) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ (iii) 0 (iv) 0

अध्याय-3

आव्यूह

स्मरणीय बिंदु -

आव्यूह फलनों या संख्याओं का एक आयताकार क्रम विन्यास है।

आव्यूह को [ ] (बडे कोष्ठक) के अंदर अवयवों को रखकर प्रदर्शित किया जाता है।

क्षैतिज रेखायों को पंक्तियां तथा उर्ध्वाधर रेखायों को स्तंभ कहते हैं।

m पंक्तियां n स्तंभ बाले आव्यूह को $m \times n$ कोटि का आव्यूह कहते हैं।

आव्यूह को अंग्रेजी के बडे अक्षर से प्रदर्शित किया जाता है। $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

जहां a_{ij} पर आव्यूह की प्रविष्टि है। दो आव्यूह का योग तभी संभव है जबकि उनकी कोटि समान हो।

$m \times n$ कोटि का आव्यूह एक वर्ग आव्यूह कहलाता है यदि $m = n$

दो आव्यूह का गुणनफल तभी संभव है जबकि पहले आव्यूह के स्तंभों की संख्या और दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या समान हो।

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए-

(i) 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या होगी जिनकी प्रत्येक की प्रविष्टि 0 या 1 है।

(a) 27 (b) 18 (c) 81 (d) 512

(ii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि

(a) $m < n$ (b) $m > n$ (c) $m = n$ (d) इनमें से कोई नहीं

(iii) आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे यदि

(a) $AB = BA$ (b) $AB - BA = 0$ (c) $AB = 0, BA = 1$ (d) $AB = BA = I$

(iv) यदि एक आव्यूह A सममित एवं विषम सममित दोनों ही है तो A :

(a) एक विकर्ण आव्यूह है (b) एक शून्य आव्यूह है

(c) एक वर्ग आव्यूह है (d) इनमें से कोई नहीं

(v) यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह है तो $AB - BA$

(a) विषम सममित आव्यूह है। (b) सममित आव्यूह है।

(c) शून्य आव्यूह है। (d) तत्समक आव्यूह है।

(vi) यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो A सममित आव्यूह होगा यदि

(a) $A^2 = A$ (b) $A^2 = I$ (c) $A' = A$ (d) $A' = -A$

(vii) एक विषम सममित आव्यूह के विकर्ण का प्रत्येक अवयव होता है:

(a) शून्य (b) धनात्मक (c) ऋणात्मक (d) अवास्तविक

(viii) $A = [a_{ij}]_{m\times 1}$ एक आव्यूह है।

(a) पंक्ति आव्यूह (b) स्तंभ आव्यूह (c) वर्ग आव्यूह (d) विकर्ण आव्यूह

(ix) 2×3 कोटि के आव्यूह में अवयवों की संख्या है ।

(a) 5 (b) 1 (c) 6 (d) 8

(x) यदि $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो और के मान ज्ञात करो-

(a) $x = 2, y = 3$ (b) $x = 3, y = 2$ (c) $x = 1, y = 4$ (d) $x = 4, y = 1$

(xi) आव्यूह $A_{m\times n}$ व $B_{l\times p}$ का गुणनफल AB परिभाषित होगा यदि

(a) $m = n$ (b) $n = l$ (c) $l = p$ (d) $m = p$

(xii) एक 2×2 आव्यूह । $A = [a_{ij}]$ जहाँ $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ की पहली पंक्ति और दूसरे स्तंभ का अवयव है।

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) $\frac{2}{9}$ (d) $\frac{2}{3}$

(xiii) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ है तो A^2 का मान होगा -

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(xiv) $(AB)'$ का मान निम्न के बराबर है।

(a) $A'B'$ (b) $B'A'$ (c) $A'B$ (d) AB'

(xv) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ $B = [1 \quad 3 \quad -6]$ तो में अवयवों की संख्या होगी-

(a) 1 (b) 6 (c) 6 (d) 9

(xvi) निम्न आव्यूह सममित आव्यूह है -

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए:

(i) $A = [a_{ij}]_{1\times n}$ एक पंक्ति आव्यूह होता है।

(ii) आव्यूहों में योग की संक्रिया के लिए साहचर्य नियम का पालन नहीं होता है।

(iii) किसी A आव्यूह के लिए $A = [a_{ij}]_{1\times n}$ एक स्तंभ आव्यूह होता है।

(iv) आव्यूहों में गुणन की संक्रिया के क्रम विनिमेय नियम का पालन होता है।

(v) तीन आव्यूहों A, B व C के लिए $(AB)C = A(BC)$

(vi) प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।

(vii) प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक अदिश आव्यूह होता है।

(viii) प्रत्येक विकर्ण आव्यूह एक अदिश आव्यूह होता है।

(ix) प्रत्येक अदिश आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।

(x) प्रत्येक अदिश आव्यूह एक तत्समक आव्यूह होता है।

(xi) प्रत्येक तत्समक आव्यूह एक अदिश आव्यूह होता है।

(xii) प्रत्येक तत्समक आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।

(xiii) प्रत्येक तत्समक आव्यूह एक वर्ग आव्यूह होता है।

(xiv) किसी आव्यूह के परिवर्त आव्यूह का पुनः परिवर्त आव्यूह मूल आव्यूह के बराबर होता है।

(xv) यदि आव्यूह A इस प्रकार है कि $A' = A$ तो आव्यूह । को विषम सममित आव्यूह कहते हैं।

(xvi) यदि वर्ग आव्यूह A इस प्रकार है कि $A' = -A$ तो A को विषम सममित आव्यूह कहते हैं।

(xvii) यदि दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $AB = I$ जहाँ I तत्समक आव्यूह है तो आव्यूह A और B को एक दूसरे का परिवर्त आव्यूह कहते हैं।

(xviii) दो आव्यूहों का योग ज्ञात करने के लिये यह आवश्यक नहीं है कि उनकी कोटियाँ समान हों।

(xix) यदि आव्यूह A की कोटि 2×3 व आव्यूह B की कोटि 3×4 हो तो इनके गुणनफल से प्राप्त आव्यूह AB की कोटि 2×4 होगी।

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

i. यदि $A = \begin{bmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$ है तो x का मान क्या है ?

ii. यदि $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ है तो a का मान क्या है ?

iii. 2×2 कोटि का तत्समक आव्यूह लिखो।

iv. विकर्ण आव्यूह का कोई एक उदाहरण लिखो।

v. एक 2×2 आव्यूह $A=[a_{ij}]$ की रचना कूजिये जबकि $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

vi. यदि $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ तो x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिये।

vii. तत्समक आव्यूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।

viii. विकर्ण आव्यूह क्या है?

ix. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो (2A+B) का मान ऐ ज्ञात कीजिये।

x. आव्यूहों के योग का क्रम विनिमेय नियम लिखिये।

xi. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

xii. वर्ग आव्यूह A को एक सममित आव्यूह और एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिये।

xiii. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ तो A^2 ज्ञात कीजिये।

xiv. पँक्ति आव्यूह को परिभाषित कीजिये।

प्रश्न 4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) पंक्ति आव्यूह में पंक्तियों की संख्या ....होती है।

(ii) वर्ग आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या.............. होती है।

(iii) ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण की प्रत्येक प्रविष्ठि 1 हो तथा शेष प्रविष्ठि शून्य हो .... आव्यूह कहलाता है।

(iv) यदि A एक वर्ग आव्यूह है तथा I एक तत्समक आव्यूह है तो AI =......................।

(v) यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तो A^2 =....................................।

(vi) यदि $a_{ij} = \frac{i+2j}{3}$ तो a_{21} =.................................।

(vii) यदि $AB = C$ जबकि A, B, C क्रमशः तो $m \times 2$, 2×3, 4×3 कोटि के आव्यूह हैं, तो m = ...।

(viii) यदि A का परिवर्त आव्यूह A' है तो $(A')'$=...........।

(ix) वर्ग आव्यूह A का परिवर्त आव्यूह A' है तो $A + A'$ एक .... आव्यूह होता है।

(x) वर्ग आव्यूह A का परिवर्त आव्यूह A' है तो $A - A'$ एक .... आव्यूह होता है।

(xi) ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव समान होते हैं.......आव्यूह कहलाता है।

(xii) ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव इकाई होते हैं.......आव्यूह कहलाता है।

(xiii) $\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो $x + y$ =.........................।

(xiv) यदि $A + B = O$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तो B =.........................।

(xv) यदि A और B एक दूसरे के व्युत्क्रम आव्यूह हों तो AB =..........................

प्रश्न 05 सही जोड़ी मिलाईये।

	A		B
(i)	$A' = A$	(a)	$\begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$
(ii)	$A' = -A$	(b)	आव्यूह के योग का क्रम विनिमेय नियम।
(iii)	$(A+B)'$	(c)	A एक सममित आव्यूह है।
(iv)	$(AB)'$	(d)	$A' + B'$
(v)	$AB = I$	(e)	A एक विषम सममित आव्यूह है।
(vi)	$A_{m\times n}$	(f)	A और B एक दूसरे के व्युत्क्रम है।
(vii)	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	(g)	$\begin{bmatrix}3 & 5\\3 & 4\end{bmatrix}$
(viii)	$\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$	(h)	तत्समक आव्यूह(3×3) कोटि का।
(ix)	$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$	(i)	$m \times n$ कोटि का वर्ग आव्यूह ।
(x)	$A + B = B + A$	(j)	$B'A'$

प्रश्न-क्रमांक :

प्रश्न-1 2×2 कोटि के आव्यूह की रचना कीजिये जिसके अवयव निम्न प्रकार से प्राप्त होते हैं $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$

प्रश्न-2 सरल कीजिये $\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}$

प्रश्न-3. सरल कीजिये $cos\theta\begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\-sin\theta & cos\theta\end{bmatrix} + sin\theta\begin{bmatrix}sin\theta & -cos\theta\\cos\theta & sin\theta\end{bmatrix}$

प्रश्न-4. X का मान ज्ञात कीजिये, यदि $Y = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$ और $2X + Y = \begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 2\end{bmatrix}$

प्रश्न-5. यदि $A' = \begin{bmatrix}-2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$ तब $(A + 2B)'$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-06 यदि $A = \begin{bmatrix}6 & 9\\2 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\7 & 9 & 8\end{bmatrix}$ है तो AB ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-07 यदि $A = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & -1\\2 & 3 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}2 & \sqrt{5} & 1\\-2 & 3 & 1/2\end{bmatrix}$ है तो $A + B$ ज्ञात कीजिये।

प्रश्न- 08 यदि $\begin{bmatrix}2x + 7 & 5\\y + 1 & 2 - 3x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & y - 2\\8 & 4\end{bmatrix}$ तो x व y के मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न- 09 3×4 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिये यदि $a_{ij} = 2i - j$

प्रश्न-10 यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ है तो $2A + B$ ज्ञात कीजिये।

प्रश्न- 11 आव्यूह $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}$ व $B = \begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$ के लिये आव्यूहों के योग के क्रम विनिमेय नियम का सत्यापन कीजिये।

प्रश्न -12 $A = \begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}$ व $B = \begin{bmatrix}-2 & 5\\3 & 4\end{bmatrix}$ तो $3A - B$ ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-13 निम्न गुणनफल परिकलित कीजिये

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

प्रश्न -14 यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}$ है तो x व y के मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-15 यदि A = $\begin{bmatrix}3 & \sqrt{3} & 2\\4 & 2 & 0\end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ है तो निम्न को सत्यापित कीजिये

$$(A+B)' = A'+B'$$

प्रश्न-16 सत्यापित कीजिये कि A = $\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 2 & 3\\2 & -1.5 & 1\\3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

प्रश्न-17 यदि $A'=\begin{bmatrix}-2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ तथा B = $\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$ है तो $(A+2B)'$ ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-18 यदि A = $\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$तथा है तो सत्यापित कीजिये $A'A = I$

प्रश्न-19 यदि A = $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ तथा B = $\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिये कि दोनो आव्यूह एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं।

प्रश्न-20 यदि $A+I=O$ जहाँ I व O क्रमशः 2×2 के तत्समक आव्यूह एवं शून्य आव्यूह हैं, तो 2×2 कोटि के आव्यूह A का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-21 यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\4 & 2 & 0\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ तो सत्यापित कीजिये $(A+B)'=A'+B'$

प्रश्न-22. दिखाइए कि $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\-1 & 2 & 1\\5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

प्रश्न-23. यदि $A=\begin{bmatrix}cosx & sinx\\-sinx & cosx\end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिये कि $A^2=\begin{bmatrix}cos2x & sin2x\\-sin & cos2x\end{bmatrix}$

प्रश्न-24. वर्ग आव्यूह $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & -6\end{bmatrix}$ सममित एवं एक विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में व्यक्त कीजिये।

प्रश्न-25. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\x & 2 & y\end{bmatrix}$ समीकरण $AA'=9I$ को संतुष्ट करता है तो x व y के मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-26. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}$ और $A^2=PA$ तो P का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-27. x तथा y ज्ञात कीजिये यदि $x+y=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & 9\end{bmatrix}$ तथा $x-y=\begin{bmatrix}3 & 6\\0 & -1\end{bmatrix}$

प्रश्न-28 आव्यूह A=$\begin{bmatrix}1 & 5\\6 & 7\end{bmatrix}$ के लिये सत्यापित कीजिये कि $(A+A')$ एक सममित आव्यूह है।

प्रश्न- 29 आव्यूह A=$\begin{bmatrix}1 & 5\\6 & 7\end{bmatrix}$ के लिये सत्यापित कीजिये कि $(A-A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न- 30 यदि A = $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\5 & 7 & 9\\-2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ तथा B = $\begin{bmatrix}-4 & 1 & -5\\1 & 2 & 0\\-1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिये कि $(A-B)'=A'-B'$

प्रश्न- 31 यदि A = $\begin{bmatrix}3 & -2\\4 & -2\end{bmatrix}$तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ एवं $A^2=kA-2I$ तो k का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न- 32 दिये गये समीकरण को x, y, z तथा t के लिये हल कीजिये यदि

$$2\begin{bmatrix}x & z\\y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{bmatrix}$$

प्रश्न- 33 X तथा Y के मान ज्ञात कीजिये यदि $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न- 34 X तथा Y के मान ज्ञात कीजिये यदि $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ तथा

$3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

प्रश्न- 35 यदि A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तथा B = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो ज्ञात AB कीजिये।

प्रश्न- 36 यदि A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ हो तो आव्यूहों के लिये योग के साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिये।

प्रश्न- 37 यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A + 3B = 5$ दिया हो तो आव्यूह X ज्ञात कीजिये

प्रश्नः-38 यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ दिया हो तथा $4A + 7B + 4X = 3I$ तो आव्यूह X ज्ञात कीजिये

प्रश्न-39 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$ का मान ज्ञात करें।

प्रश्न-40 आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में व्यक्त कीजिये।

प्रश्न-41 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिये सत्यापित कीजिये कि

(i) $A + A'$ एक सममित आव्यूह है

(ii) $A - A'$ एक विषम सममित आव्यूह है

प्रश्न- 42 प्रारंभिक रूपांतरण के प्रयोग से आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

प्रश्न- 43 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ हो तो एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिये कि $CD - AB = O$ जहाँ O एक शून्य आव्यूह हे।

प्रश्न- 44 आव्यूह A, B, C के लिये गुणन के साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिये

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ हो।

प्रश्न- 45 आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिये।

प्रश्नः- 46 सिद्ध कीजिये कि वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह A के लिये $A + A'$ एक सममित एवं $A - A'$ एक विषम सममित आव्यूह होते हैं।

प्रश्न-47 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा कि $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ हो तो

सत्यापित कीजिये कि $(A + B)C = AC + BC$

प्रश्न-48 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ है दर्शाइए कि $AB \neq BA$

प्रश्न-49 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापिक कीजिये कि

(i) $(A + A')$ एक सममित आव्यूह

(ii) $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है

प्रश्न-50 यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापिक कीजिये कि $(A - B)' = A' - B'$

उत्तरः– (अध्याय 3)

प्रश्न1-– (i) d (ii) c (iii) d (iv) c (v) a (vi) c (vii) a (viii) a (ix) c (x) c (xi) b (xii)b (xiii) b (xiv) b (xv) d (xvi) c

प्रश्न2- (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) असत्य (viii) सत्य (ix) असत्य (x) सत्य (xi) सत्य (xii) सत्य (xiii) सत्य (xiv) सत्य (xv) सत्य (xvi) असत्य (xvii) असत्य (xviii) सत्य

प्रश्न3. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) 3 (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ या $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

$(vi)\ x = 2, y = 4, z = 3$ (vii) ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी आव्यूह इकाई हो (1) तथा शेष अवयव शून्य हो , तत्समक आव्यूह कहलाता हे। $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(viii) एसा वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के अवयव अशून्य तथा शेष सभी अवयव शून्य हों।

(ix) $\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ (x) समान कोटि के दो आव्यूह योग के क्रम वनिमेय नियम का पालन करते हें

यदि $A + B = B + A$ (xi) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (xii) $A = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(A - B)$

(i) $\begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$ (xiv) एसा आव्यूह जिसमे केवल एक पंक्ति हो , पंक्ति आव्यूह कहलाता हे।

प्रश्न 4 (i) एक (ii) समान (iii) तत्समक (iv) A (v) $\begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) 4 (viii) A (ix) सममित (x) विषम-सममित (xi) अदिश (xii) तत्समक (xiii) 5

(xiv) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ (xv) I (identity matrix)

प्रश्न 5. (i) c (ii) e (iii) d (iv) j (v) f (vi) i (vii) h (viii) a (ix) g (x) b

अध्याय–4
सारणिक

स्मरणीय बिंदु :–

- प्रत्येक वर्ग आव्यूह से संबंधित एक सारणिक होता है।
- सारणिक में भी प्रविष्ठियाँ पँक्तियों एवं स्तंभों के रूप में होती हैं।
- सारणिक में पँक्तियों एवं स्तंभों की संख्या समान होती है।
- सारणिक को दो समान्तर उर्ध्वाधर रेखाओं के मध्य प्रविष्ठियों को प्रविष्ठ करके प्रदर्शित किया जाता है।
- आव्यूह A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ का सारणिक $|A|$ अर्थात
  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
- एक सारणिक को k से गुणा करने का अर्थ है, कि उसके अंदर केवल किसी एक पँक्ति या केवल एक स्तंभ के सभी अवयवों को k से गुणा किया गया है।
- यदि A = $[a_{ij}]_{3\times3}$ तो $|kA|=k^3|A|$
- यदि आव्यूह A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ तो A का सहखण्डज आव्यूह $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ होता है।जहाँ A_{ij} अवयव, a_{ij} का सहखण्जड है।
- कोई आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय या व्युत्क्रमणीय कहलाता है $|A| = 0$ यदि या $|A| \neq 0$
- आव्यूह A का परिवर्त आव्यूह A′ है तो $det(A) = det(A')$.

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए –

(i) यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तब x का मान होगा

(a) 6 (b) ± 6 (c) -6 (d) 0

(ii) यदि $A, 3\times3$ कोटि का वर्ग आव्यूह होगा तो $|kA|$

(a) $k|A|$ (b) $k^2|A|$ (c) $k^3|A|$ (d) $3k|A|$

(iii) निम्नलिखित में से कौन सा सत्य है

(a) सारणिक एक वर्ग आव्यूह है।

(b) सारणिक आव्यूह से सम्बद्ध एक संख्या है।

(c) सारणिक एक वर्ग आव्यूह से सम्बद्ध एक संख्या है।

(d) इनमे से कोई नहीं

(iv) यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग ईकाई है तथा इसके शीर्ष $(2,-6)$ $(5,4)$ तथा $(k,4)$ है तो k का मान है।

(a) 12 (b) -2 (c) $-12, -2$ (d) $12, -2$

(v) यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|adjA|$ का मान है।

(a) $|A|$ (b) $|A|^2$ (c) $|A|^3$ (d) $3|A|$

(vi) यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तो $\det(A^{-1})$ बराबर है :

(a) $\det(A)$ (b) $\frac{1}{\det(A)}$ (c) 1 (d) 0

(vii) यदि A और B दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो तब $(AB)^{-1}$ का मान बराबर होगा।

(a) $A^{-1}B^{-1}$ (b) $B^{-1}A^{-1}$ (c) AB (d) $A^{-1}B$

(viii) यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखण्ड A_{ij} है तों Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है।

(a) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (b) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(c) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (d) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

(ix) = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ का मान हैः-

(a) $a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}$ (b) $a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12}$ (c) $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ (d) 0

(x) सारणिक $\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\2 & 2 & 3\\3 & 2 & 3\end{vmatrix}$ का मान है-

(a) 2 (b) 10 (c) 0 (d) -8

(xi) सारणिक $\begin{vmatrix}1 & -2\\4 & 3\end{vmatrix}$ के अवयव 1 का उपसारणिक हैः-

(a) 4 (b) -2 (c) 1 (d) 3

(xii) सारणिक $\begin{vmatrix}1 & -2\\4 & 3\end{vmatrix}$ के अवयव 4 का सहखण्ड हैः-

(a) 2 (b) 3 (c) -4 (d) 1

(xiii) एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदिः-

(a) $|A| = 0$ (b) $|A| \neq 0$ (c) $|A| = 1$ (d) $|A|=2$

(xiv) एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदिः-

(a) $|A| = 0$ (b) $|A| \neq 0$ (c) $|A| = 1$ (d) $|A|=2$

प्रश्न2. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिएः

i. $\begin{vmatrix}\cos 15 & sin15\\sin75 & cos75\end{vmatrix}$ मान क्या है ?

ii. x के किस मान के लिए आव्यूह $\begin{vmatrix}6-x & 4\\3-x & 1\end{vmatrix}$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा।

iii. यदि A कोई 3×3 कोटि का आव्यूह है तब सारणिक के उपसारणिकों की संख्या लिखिए।

iv. यदि बिन्दु $(k+1, 1)$ $(2k+1, 3)$ और $(2k+2,\ 2k)$ संरेख है तो k का मान क्या है ?

v. $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करें।

vi. $\begin{vmatrix}3 & x\\x & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{vmatrix}$, x का मान ज्ञात करें।

vii. यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान क्या होता है ?

viii. यदि A , 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह हो तो A^{-1} और (adjA) में संबंध होता है।

ix. यदि $|A| = 10$ तो $|3A|$ का मान क्या होगा ? यदि A, 3×3 का वर्ग आव्यूह है।

x. यदि A , 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह हो, तथा $|A| = 20$,तो $|adjA|$ का मान क्या होगा ?

xi. $\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & a\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करें।

xii. $\begin{vmatrix}1 & bc & a(b+c)\\1 & ca & b(c+a)\\1 & ab & c(a+b)\end{vmatrix}$ का मान क्या होगा ?

xiii. क्या $\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 2\end{bmatrix}$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है ?

प्रश्न3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

i. सारणिक $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक————————है।

ii. बिन्दु $A(a, b+c)$, $B\,(b, c+a)$ और $C\,(a,\ a+b)$ ——————————है।

iii. यदि A कोई वर्ग आव्यूह है तथा $|A| \neq 0$ तो A एक——————————आव्यूह है।

iv. एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय कहलाता है। यदि————————

v. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल सारणिक रूप में...................... होता है.

vi. यदि A , n कोटि का अव्युत्क्रणीय आव्यूह है तो det(A) =..............

vii. यदि 3×3 कोटि के वर्ग आव्यूह A के लिये $|A|$= 3 हो तो $|\det(A)|$.............

viii. दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह A और B के लिये $(AB)^{-1}$ = ...

ix. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ का मान ....होगा।

x. यदि A कोटि 2 का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$= ....होगा।

xi. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix}$ तो x का मान ....होगा।

xii. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ में अवयव a_{ij} का सहखण्ड A_{ij} है तो सारणिक का प्रसार R_1 से करने पर सारणिक का मान ....होगा।

xiii. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ....होगा।

xiv. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ का मान ....होगा।

प्रश्न 4. सत्य/असत्य लिखिए–

i. यदि एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों को अन्य पंक्ति या स्तंभ के सहखण्डों से गुणा किया जाए तो उनका योग शून्य होता है।

ii. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ तब Δ का मान शून्य होगा।

iii. केवल वर्ग आव्यूह सारणिक कहलाते है।

iv. यदि A एक वर्ग आव्यूह है तब $\det(A) = \det(A')$, जहाँ $A' = A$ का परिवर्त।

v. प्रत्येक कोटि के आव्यूह से संबंधित एक सारणिक प्राप्त किया जा सकता है।

vi. यदि किसी सारणिक की कोई दो पँक्तियाँ या कोई दा स्तंभों के संगत अवयव समान हों,तो उस सारणिक का मान शून्य होता है।

vii. यदि किसी सारणिक की कोई दो पँक्तियाँ या कोई दो स्तंभों को आपस में बदल दिया जाय ,तो उस सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

viii. यदि $|A|$ = 0 तो A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

ix. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ का मान -2 है।

x. $A(adjA) = (adjA).A = |A|I$

xi. यदि 3×3 कोटि के सारणिक के प्रत्येक अवयव में k से गुणा कर दिया जाय तो सारणिक का मान k भी गुणा हो जाता है।

xii. किसी सारणिक का मान इसकी पँक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदल देने पर अपरिवर्तित रहता है।

xiii. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x का मान ± 6 है।

xiv. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

प्रश्न- 05 सही जोड़ी मिलाईये।

	A		B
(i)	$(AB)^{-1}$	(a)	$\|A\|\|B\|$
(ii)	$\|AB\|$	(b)	$\|A\|I$
(iii)	A.(adjA)	(c)	$\|A\|=0$
(iv)	A^{-1}	(d)	$\|A\| \neq 0$
(v)	व्युत्क्रमणीय आव्यूह	(e)	$B^{-1}A^{-1}$
(vi)	अव्युत्क्रमणीय आव्यूह	(f)	$\frac{adjA}{\|A\|}$
(vii)	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$	(g)	$x = \pm 3$
(viii)	Det(A′)	(h)	$x = 4$
(ix)	$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$	(i)	0
(x)	$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	(j)	$\|A\|$

प्रश्न-06 $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-07 यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, तो x का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-08 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइये कि $|2A| = 4|A|$.

प्रश्न-09 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, हो तो $|A|$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-10 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिसके शीर्ष $(3,8)$, $(-4,2)$ और $(5,1)$ हैं।

प्रश्न-11 दर्शाइये कि $A(a, b+c), B(b, c+a)$ और $C(c, a+b)$ संरेख हैं।

प्रश्न-12 सारणिक $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ में 4 का उपसारणिक ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-13 सारणिक $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ में 6 का सहखण्ड ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-14 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तो $adjA$ ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-15 सिद्ध कीजिये कि $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} = 0$

प्रश्न-16 यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 4 \end{vmatrix}$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-17 $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-18 दूसरी पँक्ति के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-19 यदि 2×2 आव्यूह A के लिये $|A| = 18$ तो $|adjA|$ ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-20 यदि 3×3 आव्यूह A के लिये $|A| = 15$ तो $|3A|$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-21 यदि A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ तो सत्यापित कीजिये कि A(adjA)=(adjA)A=$|A|I$

प्रश्न-22 समीकरण निकाय $\begin{matrix} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 3y = 5 \end{matrix}$ को आव्यूह विधि से हल कीजिये।

प्रश्न-23 प्रसार किये बिना सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

प्रश्न-24 $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-25 k का मान ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ त्रिभुज के शीर्ष $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$

प्रश्न-26 सारणिकों का प्रयोग करके (1,2) व (4,0) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-27 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ के प्रत्येक अवयव के सहखण्ड ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-28 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & c(a+b) \\ 1 & ab & a(a+b) \end{vmatrix} = 0$

प्रश्न-29 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

प्रश्न-30 सारणिक $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात काजिये।

प्रश्न-31 यदि $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ तो सिद्व कीजिए $|3A| = 27|A|$

प्रश्न-32 यदि x, y, z भिन्न–भिन्न है और $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^2 \\ y & y^2 & 1+y^2 \\ z & z^2 & 1+z^2 \end{vmatrix} = 0$

प्रश्न-33 तीसरे स्तंभो के सहखंडो के प्रयोग से $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए :

प्रश्न-34 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

प्रश्न-35 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

प्रश्न-36 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

प्रश्न-37 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

प्रश्न-38 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

प्रश्न-39 सिद्ध कीजिये कि $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

प्रश्न-40 n, कोटि के वर्ग आव्यूह A के लिये सिद्ध कीजिये कि $|adjA| = |A|^{n-1}$

प्रश्न-41 यदि A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिये कि $A.(adjA) = |A|I$ और A^{-1} भी

ज्ञात कीजिये।

प्रश्न-42 यदि A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिये कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

प्रश्न-43 समीकरण निकाय, $3x-2y+3z=8$

$2x+y-z=14$

$4x-3y+2z=4$

को आव्यूह विधि से हल कीजिये

प्रश्न-44 सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

प्रश्न-45 सारणिकों के प्रयोग से बिन्दुओं $(1,2)$ और $(3,6)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-46 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

प्रश्न-47 आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-48 आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह का सहखण्डज ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-49 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$ तथा A^{-1} भी

ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-50 हल करके x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\begin{bmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{bmatrix} = 0$

प्रश्न-51 गुणधर्मो का प्रयोग करके सारणिक का मान ज्ञात कीजिए $\begin{bmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & ab^2 & 0 \end{bmatrix}$

प्रश्न-52 निम्नलिखित प्रश्नों के लिए सत्यापित कीजिए कि :

A.(adjA) = (adjA).A = $|A|.I$

(i) A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

प्रश्न-53. निम्नलिखित आव्यूह ो के लिए व्युत्क्रम (यदि व्युत्क्रम अस्तिव हो) ज्ञात कीजिए :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

प्रश्न-54 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि A.(adjA) = $|A|.I$

और A^{-1} ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-55 सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखंड ज्ञात कीजिए।

उत्तरः–(अध्याय 4)

प्रश्न 1. (i) b (ii) c (iii) b (iv) c (v) c (vi) b (vii) b (viii) d (ix) b (x) (xi) d (xii) a (xiii) b (xiv) a

प्रश्न 2. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 2 (iii) 9 (iv) $0, {}^{3}/_{2}$ (v) 1 (vi) ± 2 (vii) 0 (viii) $A^{-1} = \frac{(adj)A}{|A|}$ (ix) 270 (x) 400 (xi) a^3 (xii) 0 (xiii) नहीं

प्रश्न 3. (i) 6 (ii) संरेख (iii) व्युत्क्रमणीय (iv) $|A| = 0$ (v) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ (vi) 0 (vii) 9 (viii) $B^{-1}A^{-1}$ (ix) 7 (x) 1 (xi) ± 4 (xii) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ (xiii) 0 (xiv) 6

प्रश्न 4. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य (vii) असत्य (viii) असत्य (ix) सत्य (x) सत्य (xi) असत्य (xii) असत्य (xiii) सत्य (xiv) असत्य

प्रश्न- 05 (i)- (e) (ii) (a) (iii) (b) (iv) (f) (v)(d) (vi)(c) (vii)(i) (viii) (j) (ix) (g) (x)(h)

अध्याय-5

सातव्य एवं अवकलनीयता

स्मरणीय बिंदु :

® एक वास्तविक मानीय फलन अपने प्रांत के किसी बिंदु पर संतत होता है यदि उस बिंदु पर फलन की सीमा, उस बिंदु पर फलन के मान के बराबर होती है।

® संतत फलनों के योग, अंतर, गुणनफल और भागफल संतत होते हैं, अर्थात्, यदि f तथा g संतत फलन हैं, तो

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ संतत होता है।

$(f.g)(x) = f(x).g(x)$ संतत होता है।

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ जहाँ $g(x) \neq 0$, संतत होता है।

® प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है किंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

® श्रृंखला-नियम फलनों के संयोजन का अवकलन करने वेफ लिए एक नियम है।

यदि $f = v\,o\,u$, $t = u(x)$ और यदि $\frac{dt}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dt}$ का अस्तित्व है तो

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

® कुछ मानक अवकलज (परिभाषित प्रांतों में) निम्नलिखित हैं :

$\frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(cosec^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

® लघुगणकीय अवकलन, $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ के रूप के फलनों के अवकलन करने के लिए एक सशक्त तकनीक है। इस तकनीक के अर्थपूर्ण होने के लिए आवश्यक है कि $f(x)$ तथा $u(x)$ दोनों ही धनात्मक हों।

प्रश्न1. सही विकल्प चुनिए-

(i) 5^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा।

$(a)\ 5^x log_e 5$ $\quad (b)\ 5^x log_5 e$ $\quad (c)\ 5^x$ $\quad (d)\ \frac{5^x}{log_e a}$

(ii) x^6 का x^3 के सापेक्ष अवकल गुणांक होगाः

$(a)\ 6x^3$ $\quad (b)\ 3x^2$ $\quad (c)\ 2x^3$ $\quad (d)\ 2x^2$

(iii) यदि $f(x) = cos^{-1}(sinx)$, तब $f'(x)$ का मान होगाः

$(a)\ 1$ $\quad (b)\ -1$ $\quad (c)\ 0$ $\quad (d)$ इनमे से कोई नहीं

(iv) यदि $y = a\sin mx + bcosmx$ तब $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$(a)\ m^2y$ $\quad (b)\ -m^2y$ $\quad (c) my$ $\quad (d)\ -my$

(v) $tan^{-1}\left(\frac{sinx}{1+cosx}\right)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक

$(a)\ \frac{1}{2}$ $\quad (b) - \frac{1}{2}$ $\quad (c)\ 0$ $\quad (d)$ इनमें से कोई नहीं

प्रश्न2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

(i) $\tan(x^2+5)$ का x के सापेक्ष अवकलन--------------होगा।

(ii) $\frac{dy}{dx}$ का मान--------- होगा यदि $\sin(x+y) = x^2 + y^2$

(iii) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ तब $\frac{dy}{dx}$ कलध्कग का मान---------होगा।

(iv) $\sec\left(\frac{5}{x}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन--------है।

(v) यदि य $f(x) = 1 - cosx$ है तो $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ का मान---------है।

(vi) यदि $y = \log_e e^x$ तब $\frac{dy}{dx}$ =......................

(vii) यदि $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ +.......... तब $\frac{dy}{dx}$ =.................

(viii) यदि $y = e^x cosx$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा ....

(ix) यदि $y = \sin x^n$ हो तो x के सापेक्ष अवकल का मान ....होगा

(x) $\sin x^3$ का अवकल गुणांक,......................... होता है

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए -

(i) प्रत्येक बहुपद फलन सतत् होता है।

(ii) फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर सतत् व अवकलनीय है।

(iii) प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् होता है।

(iv) a^{2x} का अवकल गुणांक $a^{2x}log2$ होता है।

(v) यदि $f(x) = \cos^{-1}(sinx)$ हो तो $f'(x)$ का मान 1 होगा।

(vi) $sinx$ का अवकल गुणांक $\frac{1}{1+x}$ होगा

(vii) $\log_e x$ का अवकल गुणांक $\frac{1}{x}$ होता है

(viii) $\frac{d}{dx}(log(tanx))$ का मान $cosec2x$ है

(ix) $Cos2x$ का अवकलन गुणांक $2sin2x$ होता हैं

(x) $logsinx$ का अवकल गुणांक है $cot\,x$

(xi) यदि $y = log(log(log\,x))$ हो तो $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x,logx.\log(logx)}$

(xii) किसी अचर राशि का अवकल गुणांक सदैव एक अचर होगा

प्रश्न 4 सही जोड़ी बनाइए

	खण्ड (अ)		खण्ड (ब)
(i)	$\lim_{x\to 0} \log_e \frac{(1+x)}{x}$.	(a).	6
(ii)	$\lim_{x\to 0} (\frac{e^x-1}{x})$.	(b).	na^{n-1}
(iii)	$\lim_{x\to 0} (\frac{a^x-1}{x})$.	(c).	$\frac{1}{2}$
(iv)	$\lim_{x\to 0} (\frac{x^n-a^n}{x-a})$.	(d).	1
(v)	$\lim_{x\to 0} (\frac{x^2-9}{x-3})$.	(e).	$\log_e a$
(vi)	$sin^{-1}x$ का अवकल गुणांक	(f)	$\frac{1}{1+x^2}$
(vii)	$tan^{-1}x$ का d/dx	(g)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

(i) यदि $y = sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ तब $\frac{dy}{dx}$ क्या होगा ?

(ii) $logx$ का अवकलज लिखिए।

(iii) यदि $f(x) = xcosx + e^x$ तो $f\,'(o)$ का मान क्या होगा ?

(iv) यदि $y = ax^2 + b$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान $x = 2$ पर क्या होगा ?

(v) $\sin x$ का अवकल गुणांक क्या होगा

(vi) $\log_e x$ का अवकल गुणांक क्या होगा

(vii) $tan^{-1}x$ का अवकल गुणांक क्या होगा

(viii) $sin^{-1}x$ का अवकल गुणांक क्या होगा

(ix) x^n का अवकल गुणांक क्या होगा

प्रश्न क्रमांक 6

1. $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सतततता की जॉच कीजिए
2. फलन $f(x) = |x-5|$ सतततता है कि नही जॉच कीजिए
3. फलन $cos(sin\,x)$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए
4. $ax + by^2 = cos\,y$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए
5. $\frac{e^x}{sinx}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए
6. $x^2 + 2x + 3$ फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए
7. यदि f सतत हो तो $|f|$ भी सतत होगा क्यों?
8. फलन x^{20} का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए
9. फलन $logx$ का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए
10. Cosine, cosecant, secant, और cotangent फलनो के विचार कीजिए कि कोन सतत है या असतत
11. दर्शाए कि $f(x) = cos\,x^2$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत फलन है ?
12. जॉच कीजिए कि क्या $sin|x|$ एक सतत फलन है ?
13. $f(x) = |x| - |x-1|$ द्वारा परिभाषित है । फलन के सभी असतत के बिंदु को ज्ञात कीजिए
14. $f(x) = \begin{cases} kx^2 \,;\; x \le 2 \\ k \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर सतत है |
15. $y = sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
16. $y = cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
17. $y = sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
18. $y = cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
19. $y = sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^{2-1}}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
20. $cos(log\,x + e^x)$ का $\frac{dy}{dx}$ क्या होगा |
21. $x = cos\theta - cos2\theta$ तथा $y = sin\theta - sin2\theta$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
22. $y = 5cos\,x - 3sin\,x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
23. $log(log\,x)$ का $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए |
24. $y^x = x^y$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान क्या होगा |
25. क्या फलन $f(x) = x^2 - sinx + 5$, $x = \pi$ सतत है |
26. फलन $\sin(logx)$ का द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए |
27. यदि $x = acos\theta$, $y = asin\theta$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
28. यदि $x = at^2$, $y = 2at$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए |
29. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-coskx}{xsinx} & \text{जहाँ } x \ne 0 \\ \frac{1}{2} & \text{जहाँ } x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर सतत है तो k का मान ज्ञात किजिए |
30. यदि $x\,sin\,(a+y) + sin\,a\,cos\,(a+y) = 0$ हो तो
31. सिद्ध कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{sin^2(a+y)}{\sin a}$
32. k का मान ज्ञात कीजिए यदि फलन $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \,;\; x \ne 0 \\ k \quad\quad ;\; x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर सतत् है।

33. यदि $x = a\,cos^3\theta$, $y = asin^3\theta$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान $\theta = \frac{\pi}{6}$ पर ज्ञात कीजिए।

34. $tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ का $sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

35. यदि $xy = e^{x-y}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

36. यदि $x = a\,(\theta + sin\theta)$, $y = a\,(1 - cos\theta)$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

37. यदि $e^x(x+1) = 1$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{dy}{dx})^2$

38. यदि $x^y + y^x = 1$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

39. यदि $(cosx)^y = (cosy)^x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

40. यदि $y = (x + \frac{1}{x})^x + x^{(x+1/x)}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

41. यदि $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

42. यदि $y = x^x - 2^{sinx}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

43. फलन $e^{6x}cos3x$ का द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात किजिए

44. फलन $x\,cosx$ का द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात किजिए

45. फलन $tan^{-1}x$ का द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात किजिए

46. फलन $\sin(logx)$ का द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात किजिए

उत्तरः— (अध्याय 5)

प्रश्न 1. (i) a (ii) c (iii) b (iv) b (v) a

प्रश्न 2. (i) $2xsec^2(x^2+5)$ (ii) $\frac{\cos(x+y)-2x}{2y-\cos(x+y)}$ (iii) $-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$ (iv) $\frac{-5\sec\left(\frac{5}{x}\right)\tan\left(\frac{5}{x}\right)}{x^2}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(vi) 1 (vii) e^x (viii) $e^x\cos x - e^x\sin x$ (ix) $nx^{n-1}\cos x^n$ (x) $3x^2\cos x^3$

प्रश्न 3. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) सत्य (x) सत्य (xi) सत्य (xii) असत्य

प्रश्न 4. (i) $\frac{2}{1+x^2}$ (ii) $xlogx - x$ (iii) 2 (iv) $4a$ (v) $\cos x$ (vi) $\frac{1}{x}$ (vii) $\frac{1}{1+x^2}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (ix) nx^{n-1}

अध्याय-6
अवकलज के अनुप्रयोग

स्मरणीय बिंदु -

® यदि एक राशि y एक दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$ को

संतुष्ट करते हुए परिवर्तित होती है तो $\frac{dy}{dx}$ (या $f'(x)$) x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है।

और $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (या $f'(x_0)$) $x = x_0$ पर) x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है।

® यदि दो राशियाँ x और y , t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात्

$x = f(t)$ और $y = g(t)$, तब श्रृंखला नियम से

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, यदि $\frac{dx}{dt} \neq 0$

® एक फलन f अंतराल

(a) $[a,b]$ मे वर्धमान है यदि $[a,b]$ मे $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,

सभी x_1 , $x_1 \in (a,b)$ के लिए विकल्पतः यदि प्रत्येक $x \in [a,b]$ के लिए

$f'(x) \geq 0$, है।

(b) अंतराल $[a,b]$ में ह्रासमान है यदि $[a,b]$ मे $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

सभी x_1 , $x_1 \in (a,b)$ के लिए विकल्पतः यदि प्रत्येक $x \in [a,b]$ के लिए

$f'(x) \leq 0$, है।

® फलन f के प्रांत में एक बिंदु c जिस पर या तो $f'(c) = 0$ या

f अवकलनीय नहीं है f का क्रांतिक बिंदु कहलाता है।

® प्रथम अवकलज परीक्षण मान लीजिए एक विवृत्त अंतराल I पर फलन f

परिभाषित है। मान लीजिए I में एक क्रांतिक बिंदु c पर फलन f संतत है तब

(a) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढता है तब $f'(x)$ का चिन्ह धन से

ऋण में परिवर्तित होता है अर्थात c के बायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक

बिंदु पर यदि $f'(x) > 0$ तथा c के दायी ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक

बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तब c स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है।

(b) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढता है तब $f'(x)$ का चिन्ह ऋण से धन में परिवर्तित होता है अर्थात c के बायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तथा c के दायी ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) > 0$ तब c स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है।

(c) जब x बदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढता है तब $f'(x)$ परिवर्तित नहीं होता है तब c न तो स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है और न ही स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है तब ब नति परिवर्तन का बिंदु है।

द्वितीय अवकलज परीक्षण मान लीजिए एक अंतराल I पर f एक परिभाषित फलन है और $c \in I$ है, मान लीजिए f, c पर लगातार दो बार अवकलनीय है, तब

(i) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) < 0$ तब $x = c$ स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है। f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

(ii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) > 0$ तब $x = c$ स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है। f का स्थानीय निम्नतम मान $f(c)$ है।

(iii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) = 0$ तब यह परीक्षण असफल रहता है। इस स्थिति में हम पुनः वापस प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग करते हैं और यह ज्ञात करते हैं कि c उच्चतम, निम्नतम या नति परिवर्तन का बिंदु है।

® निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात करने की व्यावहारिक विधि है:

चरण 1: अंतराल में f के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए अर्थात् x के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जहाँ या तो $f'(x) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है।

चरण 2: अंतराल के अंत्य बिंदु लीजिए।

चरण 3: (चरण 1 व 2 से प्राप्त) सभी बिंदुओं पर f के मानों की गणना कीजिए।

चरण 4: चरण 3 में गणना से प्राप्त f के सभी मानों में से उच्चतम और निम्नतम मानों को लीजिए। यही उच्चतम मान f का निरपेक्ष उच्चतम मान और निम्नतम मान f का निरपेक्ष निम्नतम मान होंगे।

प्रश्न क्रमांक 1- सही विकल्प चुनकर लिखिए।

(i) एक वृत्त की तृज्या $r = 6cm$ पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है :

(a) 10π (b) 12π (c) 8π (d) 11π

(ii) एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रूपयों में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है, जब $x = 15$ है तो सीमांत आय है :

(a) 116 (b) 96 (c) 90 (d) 126

(iii) निम्नलिखित में कौन से फलन $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर ह्रासमान नही है :

(a) $\cos x$ (b)$\cos 2x$ (c) $\cos 3x$ (d इनमें से कोई नही

(iv) निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरंतर ह्रासमान है :

(a) (0,1) (b) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ (c) $(0, \frac{\pi}{2})$ (d) इनमें से कोई नही

(v) निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2e^{-x}$ वर्धमान है ?

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(2, \infty)$ (d) $(0, 2)$

(vi) x के सभी वास्तविक मानों के लिए $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ का न्यूनतम मान है :

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) $\frac{1}{3}$

(vii) $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$ का उच्चतम मान है:

(a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 0

(viii) एक 10 m त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 m^3/h की दर से गेहूँ भरा जाता है। भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर है:

(a) 1 m/h (b) 0.1 m/h (c) 1.1 m/h (d) 0.5 m/h

प्रश्न क्रमांक 2-एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए

(i) $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \leq x \leq 1$ का उच्चतम मान क्या है ?

(ii) वक्र xy^2 और $xy = k$ एक दूसरे को समकोण पर काटते है यदि $8k^2 = ?$

(iii) x के सभी वास्तविक मानों के लिए $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ का न्यूनतम मान क्या है ?

(iv) किस अंतराल में $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

(v) यदि $x = f(t)$ और $y = g(t)$, तब श्रृंखला नियम से $\frac{dy}{dx}$ बराबर क्या होगा ?

प्रश्न क्रमांक 3-रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

(i) एक $10m$ तृज्या के बेलनाकार टंकी में 314 $m^2/_h$, की दर से गेंहूँ भरा जाता है, भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर .... है।

(ii) $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन अंतराल $(0, \frac{\pi}{2})$ में .... है

(iii) एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल .... होता है।

(iv) $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन अंतराल .... में निरंतर ह्रासमान है

(v) वक्र xy^2 और $xy = k$ एक दूसरे को .... पर काटते है यदि $8k^2 = 1$

(vi) एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की .... होती है।

(vii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) < 0$ तब $x = c$, ... का एक बिंदु है।

(viii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) > 0$ तब $x = c$, ... का एक बिंदु है।

प्रश्न क्रमांक 4-निम्न लिखित में से सत्य/असत्य लिखिए

(i) किसी उत्पाद की x इकाईयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रूपए में $R(x) = 3x^2 + 6x + 5$ से प्रदत्त है, जब $x = 5$ है तो सीमांत आय 36 रू. होगी।

(ii) वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी तृज्या r के सापेक्ष $9\pi\ cm^2$ होगी जबकि $r = 5cm$

(iii) न्यूनतम पृष्ठ का दिए आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई आधार की त्रिज्या की 2 गुनी होती है।

(iv) दी हुई तिर्यक ऊंचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु अर्द्ध शीर्ष कोण $tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है |

(v) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) > 0$ तब $x = c$ स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है। f का स्थानीय निम्नतम मान $f'(c)$ है।

(vi) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) < 0$ तब $x = c$ स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है। f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

प्रश्न.5 दर्शाइए कि वक्र xy^2 और $xy = k$ एक दूसरे को समकोण पर काटते है यदि $8k^2 = 1$

प्रश्न.6. एक 5 मीटर लंबी सीढ़ी दीवार से टिकी है। सीढ़ी के निचले सिरे को दीवार से $3\ cm/s^2$ की दर से हटाया जाता है सीढ़ी की दीवार पर ऊँचाई किस दर से कम होगी जब इसका निचला सिरा दीवार से 4 मी.दूर हो।

प्रश्न.7. सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चिष्ठ होता है।

प्रश्न.8. दो धनात्मक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिनका योग 35 और गुणनफल महत्तम हो।

प्रश्न.9. फलन $\sin x + \cos x$ का महत्तम मान ज्ञात करो।

प्रश्न.10. यदि अंतराल [0,2] में $x = 1$ पर फलन $x^4 - 62x^2 + ax + 9$ उच्चतम मान प्राप्त करता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न.11. सिद्ध कीजिए $f(x) = sin\,x$ से प्रदत्त फलन

(i) $(0, \frac{\pi}{2})$ में निरंतर वर्धमान है (ii) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर ह्रासमान है

(iii) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

प्रश्न.12. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f

(i) निरंतर वर्धमान है (ii) निरंतर ह्रासमान है

प्रश्न.13. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन

(i) निरंतर वर्धमान है (ii) निरंतर ह्रासमान है

प्रश्न.14. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल [1, 2] में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न.15. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = log\,sin\,x$, $(0, \frac{\pi}{2})$ और $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ में निरंतर ह्रासमान है।

प्रश्न.16. सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

प्रश्न.17. $100cm^3$ आयतन वाले डिब्बे सभी बंद बेलनाकार (लंब-वृत्तीय) डिब्बों में से न्यूनतम पृष्ठ

क्षेत्रफल वाले डिब्बे की विमाएँ ज्ञात किजिए।

प्रश्न.18. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए ताकि $x + y = 60$ और xy^3 उच्चतम हो।

प्रश्न.19. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लंब वृत्तीय शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\sin^{-1}(\frac{1}{3})$ होता है।

प्रश्न.20. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम शंकु का आयतन गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है।

प्रश्न.21. $f(x) = x^3 - 3x + 3$ द्वारा प्रदत्त फलन के लिए स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के सभी बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

प्रश्न.22. सिद्ध कीजिए कि न्यूनतम पृष्ठ का दिए आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुनी होती है।

प्रश्न.23. एक वृत्त और एक वर्ग के परिमापों का योग k है, जहाँ k एक अचर है सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम है, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दुगुनी है

प्रश्न.24. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊंचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु अर्द्ध शीर्ष कोण $tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

उत्तरः– (अध्याय–6)

प्रश्न कमांक–1

(i) b (ii) d (iii) c (iv) d (v) d (vi) d (vii) c (viii) a

प्रश्न कमांक–2

(i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) $(0, \pi)$ (v) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, यदि $\frac{dx}{dt} \neq 0$

प्रश्न कमांक–3

(i) 1m/h (ii) निरंतर वर्धमान (iii) अधिकतम(उच्चतम) (iv) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (v) समकोण (vi)आधी (vii) स्थानीय उच्चतम (viii) स्थानीय निम्नतम

प्रश्न कमांक–4

(i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य

अध्याय-7

समाकलन

स्मरणीय बिंदु

1. किसी फलन का अवकलन ज्ञात करने की प्रतिलोम विधि को समाकलन कहते है ।

2. किसी फलन का समाकलन अद्वितीय नहीं होता है ।

3. समाकलन ज्ञात करने की विधियां - प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन , आशिंक भिन्न में वियोजन द्वारा समाकलन , खंडश: समाकलन

4.खंडश: समाकलन का सूत्र -

प्रथम फलन * द्वितीय का समाकलन - [प्रथम का अवकलन गुणांक * द्वितीय का समाकलन] का समाकलन

5. $\int e^x [f(x) + f'(x)]dx$ का समाकलन = $e^x f(x)$

6. $\int [x f'(x) + f(x)]dx$ का समाकलन = $xf(x)$

7 $\int [f(x)^n f'(x)dx$ का समाकलन = $\frac{f(x)^{n+1}}{n+1}$

8.खंडश: समाकलन में जिस फलन का समाकलन ज्ञात नहीं है प्रथम फलन माना जाना चाहिये ।

9.यदि दोनों फलनो के समाकलन ज्ञात हों तो वह फलन जो उत्तरोतर अवकलन करने पर शून्य हो जाता है उसे प्रथम फलन मानना चाहियें ।

10. यदि समाकल्य कोई अकेला फलन है तो 1 को द्वितीय फलन मानना चाहिये ।

11. दो फलनो के गुणनफल का समाकलन करने के लिये उस फलन को प्रथम फलन मानना उचित होगा जो शब्द "ILATE" के अक्षरों से प्रारम्भ हो अर्थात

I = INVERSE FUNCTION , L = LOGARITHAMIC FUNCTION , A= ALGEBRAIC FUNCTION ,T = TRIGONOMETRIC ,E= EXPONENTIAL FUNCTION

12. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

13. $\int \frac{1}{x} dx = logx$

14. $\int e^x dx = e^x$

15. $\int sinxdx = -cosx$

16. $\int cosxdx = sinx$

17. $\int tanxdx = \log secx \quad or = -logcosx$

18. $\int cotxdx = \log sinx \quad or = -logcosecx$

19. $\int secxdx = \log(secx + tanx) \quad or = logtan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$

20. $\int cosecxdx = \log(cosecx - cotx) \quad or = logtan\frac{x}{2}$

21. $\int secxtanxdx = secx$

22. $\int cosecxcotxdx = -cosecx$

23. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x$

24. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$

25. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \text{cosec}^{-1} x$

26. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

27. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} log \frac{x-a}{x+a}$

28. $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} log \frac{a+x}{a-x}$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

30. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$

32. $\int (\sqrt{x^2 - a^2})dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)]$

33. $\int (\sqrt{x^2 + a^2})dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)]$

34. $\int (\sqrt{a^2 - x^2})dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}]$

प्रश्नकं–1:–सही विकल्प चुनकर लिखिए।

(i) $[\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}]$ का प्रति अवकलज है:

(a) $\frac{1}{3}x^{1/3}+2x^{1/2}+c$ (b) $\frac{2}{3}x^{2/3}+\frac{1}{2}x^2+c$

(c) $\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+c$ (d) $\frac{3}{2}x^{3/2}+\frac{1}{2}x^{1/2}+c$

(ii) यदि $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$ जिसमें $f(2)=0$ तो $f(x)$ है:

(a) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (b) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

(c) $x^4+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$ (d) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

(iii) $\int x^2\, e^{x^3} dx$ का मान है –

(a) $\frac{1}{3}\, e^{x^3}\, +c$ (b) $\frac{1}{3}\, e^{x^2}+c$

(c) $\frac{1}{2}\, e^{x^3}+c$ (d) $\frac{1}{2}\, e^{x^2}+c$

(iv) $\int e^x \sec x\,(1+tanx)\,dx$ बराबर है :–

(a) $e^x\cos x\, +c$ (b) $e^x \sec x\, +c$

(c) $e^x\sin x\, +c$ (d) $e^x\tan x\, +c$

(v) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$ बराबर है :–

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{12}$

(vi) $\int_0^{2/3}\frac{dx}{4+9x^2}$ बराबर है :–

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{24}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(vii) $\int \tan x\, dx$ का मान है -

(a) $\sec x\tan x$ (b) $log\sec x$ (c) $\tan x$ (d) sec^2x

(viii) $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx$ का मान है -

(a) $e^x\cos x+c$ (b) $e^x\sin x+c$ (c) $e^x\sec x+c$ (d) $e^x\tan x+c$

(ix) $\int\frac{dx}{xlogx}$ का मान है -

(a) $\log x+c$ (b) $\log(\log x)+c$ (c) $\log x^2+c$ (d) $\log(\log x^2)+c$

(x) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx\, dx$ का मान है -

(a) $\log 2$ (b) $\frac{1}{2}log2$ (c) $\frac{1}{2}log\sqrt{2}$ (d) $log\sqrt{2}$

(xi) $\int_1^e logx\, dx$ का मान है -

(a) e (b) $e-1$ (c) 1 (d) 0

(xii) यदि $f(x)=\int_0^x tsint\, dt$ तब $f'(x)$ का मान है -

(a) $cosx + sinx$ (b) $xsinx$ (c) $xcosx$ (d) $cosx - sinx$

(xiii) $\int \frac{dx}{x^2-9}$ का मान है -

(a) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$ (b) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$ (c) $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$ (d) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$

(xiv) $\int \frac{dx}{1-cosx}$ का मान है -

(a) $cot\frac{x}{2}$ (b) $-cot\frac{x}{2}$ (c) $-tan\frac{x}{2}$ (d) $tan\frac{x}{2}$

(xv) $\int e^x\, cose^x dx$ का मान होगा -

(a) e^x (b) $-e^x$ (c) $cose^x + c$ (d) $sin\, e^x + c$

(xvi) $\int \frac{e^{logx}}{x} dx$ का मान होगा -

(a) e^x (b) e^{logx} (c) $\frac{1}{x}logx$ (d) $logx$

प्रश्नक्र.—2 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) यदि $f(x) = \int_0^{\pi} t\, sint\, at$, तब $f'(x)$ का मान .... है।

(ii) समाकलन $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$ का मान .... है।

(iii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(x^3 + xcosx + tan^5x + 1)\ dx$ का मान .... है।

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} log\,(\frac{4+3sinx}{4+3cosx})\ dx$ का मान .... है।

(v) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}\ dx$ का मान .... है।

(vi) $\int secxdx$ का मान .... है।

(vii) $\int sin^2xdx$ का मान .... है।

(viii) $\int cosec^2axdx$ का मान .... है।

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ का मान .... है।

(x) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान .... है

(xi) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$ का मान .... है।

(xii) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^7xdx$ का मान .... है।

(xiii) $\int_{-1}^{1} x^3dx$ का मान .... है।

(xiv) यदि समाकलन की सीमाएँ बदल दी जाएँ तो समाकलन के मान का चिन्ह .... हो जाता है ।

(xv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx$ का मान .... है।

प्रश्नक्र.—3 एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये :

(i) यदि $f(a+b-x) = f(x)$ है तो $\int_a^b xf(x)\,dx$ बराबर है ?

(ii) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ बराबर है ?

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ बराबर है ?

(iv) $\int \frac{1}{x} dx$ का मान क्या होगा ?

(v) किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की प्रतिलोम संक्रिया को क्या कहते है ?

(vi) $sinax$ का प्रतिअवकलज लिखो ।

(vii) $\int e^x (\sin x + \cos x) dx$ का मान क्या होगा ?

(viii) $\int a^x\, dx$ का मान क्या होगा ?

(ix) $\int_0^{\pi} \int (\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}) dx$ का मान क्या होगा ?

(x) $\int \frac{sinx+cosx}{\sqrt{1+sin2x}} dx$ का मान क्या होगा ?

(xi) $\int \frac{cosx}{sin^2 x} dx$ का मान क्या होगा ?

(xii) $\int_0^8 |x-5|\, dx$ का मान क्या होगा ?

(xiii) $\int_{-2}^{2} |x|\, dx$ का मान क्या होगा ?

प्रश्नक्र –4(A) जोड़ी मिलाइये

(i)	$\int \frac{[10x^9+10^x log10]dx}{x^{10}+10^x}$	(a)	$\tan x - cost + c$
(ii)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x\, \cos^2 x}$	(b)	$\log(10^x + x^{10}) + C$
(iii)	$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x\, \cos^2 x} d_x$	(c)	$\tan(xe^x) + C$
(iv)	$\int \frac{e^x(1+x)}{cos^2(e^x x)} dx$	(d)	$tanx + cotx + c$
(iv)	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{sinx+\sqrt{cosx}}}\, dx$	(e)	1
(v)	$\int_0^1 x\, e^x\, dx$	(f)	$\frac{\pi}{4}$

प्रश्नक्र –4(B) जोड़ी मिलाइये

(i)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	(a)	$\frac{1}{a} tan^{-1} \frac{x}{a} + c$
(ii)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	(b)	$\frac{1}{2a} log \left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + c$
(iii)	$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	(c)	$\sin^{-1} \frac{x}{a} + c$
(iv)	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	(d)	$log \left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + c$
(v)	$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$	(e)	$\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-2} \frac{x}{a} + c$
(vi)	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$	(f)	$\frac{1}{2} x\sqrt{x^2}+a^2 + \frac{a^2}{2} log\left\|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\| + c$

प्रश्नक्र –4(C) जोड़ी मिलाइये

(i)	$\int_{-2}^{1} \frac{\lvert x\rvert}{x} dx$	(a)	1
(ii)	$\int_0^{\infty} e^{-x}\ dx$	(b)	-1
(iii)	$\int \sqrt{x^2-a^2}\ dx$	(c)	$log\ \vdots \left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$
(iv)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$	(d)	$\frac{1}{2a}\ log\ \left\lvert\frac{x-a}{x-a}\right\rvert + c$
(v)	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	(e)	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$
(vi)	$\int tanx\ dx$	(f)	$logsecx$

प्रश्नक्र –4(D) जोड़ी मिलाइये

(i)	$\int \frac{Cos2x}{[sin+cosx]^2}\ dx$	(a)	$\log\ \left\lvert\frac{[x-2]^2}{x-1}\right\rvert + c$
(ii)	$\int_0^1 tan^{-1}(\frac{2x-1}{1+x-x^2})\ dx$	(b)	$\log\ \lvert\sin x + cos\rvert + c$
(iii)	$\int \sqrt{1+x^2}\ dx$	(c)	$\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7}$ $+9\log\left\lvert x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right\rvert + \mathrm{c}$
(iv)	$\int \sqrt{x^2-8x+7}\ dx$	(d)	$\log\lvert x\rvert - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$
(v)	$\int \frac{x\ dx}{(x-1)(x-2)}$	(e)	0
(vi)	$\int \frac{dx}{x\ (x^2+1)}$	(f)	$\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\lvert x+\sqrt{1+x^2}\rvert + \mathrm{c}$

प्रश्नक्र –4(E) जोड़ी मिलाइये

(i)	$\int logx\ dx$	(a)	$\frac{\pi}{12}$
(ii)	$\int cotx\ dx$	(b)	0
(iii)	$\int_o^{\pi} cosx\ dx$	(c)	$\tan\ (e^x)$
(iv)	$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \log sinx\ dx$	(d)	$x\log - x$
(v)	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$	(e)	$-\frac{\pi}{2} log2$
(vi)	$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$	(f)	$\log sinx$

प्रश्न 5. सत्य / असत्य लिखिये ।

(i) $\int_0^{\pi} cos^3x\, dx$ का मान 0 होगा ।

(ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^5x\, dx$ का मान 0 होगा ।

(iii) अचर पद का समाकलन 0 होता है ।

(iv) $\int_a^b cosx\, dx$ का मान $absinx$ होता है ।

(v) $\int(1+tan^2x)dx$ का मान $tanx + c$ होता है ।

(vi) किसी फलन का समाकलन अद्‌वितीय नहीं होता है ।

(vii) $\int e^x \left[f(x)+f'(x)\right]dx$ का समाकलन = $e^x f(x)+c$

(viii) $\int(sec^2xtanx\, dx\ )$ का मान $tanx + c$ होता है ।

(ix) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)dt$ होता है ।

(x) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ होता है ।

प्रश्न 1. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 2. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 3. $\int secx\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 4. $\int logx\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 6. मान ज्ञात कीजिए : $\int \sin^{-1}(cosx)\ dx, 0 \le x \le \pi$

प्रश्न 7. मान ज्ञात कीजिए : $\int xe^x dx$

प्रश्न 8. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{x^2-16}$

प्रश्न 9. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{cos2xdx}{(sinx+cosx)^2}$

प्रश्न 10. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{cos}+\sqrt{sinx}} dx$

प्रश्न 11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4x}{sin^4x+cos^4x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 12. $\int \frac{1}{1+cos2x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 13. $\int(\sqrt{4-x^2})dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 14. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 15. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} cos\sqrt{x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 16. $\int \sin^{-1} x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 17. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 18. $\int \sin^{-1}(3x-4x^3)dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+tanx)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 20. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 21. $\int \sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 22. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{2a} \frac{f(x)}{f(x)+f(2a-x)}\,dx$

प्रश्न 23. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$

प्रश्न 24. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x+7}}$

प्रश्न 25. मान ज्ञात कीजिए : $\int e^x(\,logsinx + cotx)dx$

प्रश्न 26. $\int_{-1}^{2} |x^3 - x|\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 27. $\int_0^1 \frac{tan^{-1}x}{1+x^{\,2}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 28. $\int_{-1}^{1} (x+1)\;dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 29. $\int cos^2 xdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 30. $\int sin^3\,xdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 31. $\int sin^3\,xcos^{2x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 32. $\int cotxdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 33. $\int \frac{\sin(tan^{-1}x)}{1+x^2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 34. $\int \frac{1}{x^2-16}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 35. $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 36. $\int \frac{1}{x(x^n+1)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 37. $\int x\;cosxdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 38. सिध्द करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log sinx\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

प्रश्न 39. $\int \cos^{-1}(\frac{1-x^2}{1+x^2})\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 40. $\int \frac{dx}{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 41. $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 42. $\int(2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 43. $\int(\sqrt{x^2+4x+1)\,dx}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 44. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$

प्रश्न 45. का मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{(3x+1)dx}{2x^2-2x+3}$

प्रश्न 46. का मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{(x-3)\;e^x}{(x-1)^3}dx$

प्रश्न 47. $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ का मान ज्ञात कीजिए

प्रश्न 48. $\int_0^{\pi/2} \frac{cos^5 x}{sin^5 x+\,cosx^{\,5}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 49. $\int_0^{\pi/2} \log sinx\;dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रश्न 50. $\int \frac{dx}{1+\tan x}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

उत्तर (अध्याय–7)

प्रश्न (1) i) a ii) a iii) a iv) b v) d vi) c vii) b viii) c ix) b x) b xi) c xii) b xiii) c xiv) b xv) d xvi) b

प्रश्न (2) i) $x\sin x$ ii) 4 iii) π iv) 0 v) tan(e^x) +C vi) $\log(\sec x+\tan x)+c$ vii) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+c$ viii) $-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$ ix) $sin^{-1}\frac{x}{2}+c$ x) $\frac{\pi}{4}$ xi) 0 xii) 0 xiii) 0 xiv) विपरीत

प्रश्न (3) $i)$ $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $ii)$ $\tan(x+1)$ +C $iii)$ $\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{8x-9}{9})$ +C iv) $\log x+c$ v) समाकलन vi) $\frac{-1}{a}\cos ax$ vii) $e^x\sin x+c$ viii) $\frac{a^x}{\log a}+c$ ix) 0 x) $x+c$ xi) $-\operatorname{cosec} x+c$ xii) 17 xiii) 4

प्रश्न (4)

4(A)	4(B)	4(C)	4(D)	4(E)
(i) – (b) (ii)– (a) (iii)– (d) (iv)- (c) (v)- (f) (vi) – (e)	(i) – (d) (ii) – (c) (iii) – (a) (iv)- (b) (v)- (f) (vi) – (e)	(i) - (b) (ii)– (a) (iii)– (e) (iv)- (c) (v)- (d) (vi) – (f)	(i) – (b) (ii)– (e) (iii)– (f) (iv)- (c) (v)- (a) (vi) – (d)	(i) – (d) (ii)– (f) (iii)– (b) (iv)- (e) (v)- (a) (vi) – (c)

प्रश्न 5 i) सत्य ii) सत्य iii) असत्य iv) असत्य v) सत्य vi) सत्य vii) सत्य viii) असत्य ix) सत्य x) सत्य

अध्याय-8

समाकलन के अनुप्रयोग

स्मरणीय बिंदु

1.वक्र $y = f(x)$, x- अक्ष तथा भुजो $x = a$ एवम् $x = b$ से घिरे भाग का
क्षेत्रफल = $\int_a^b y\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$

2. वक्र $x = f(y)$, y- अक्ष तथा कोटियों $y = a$ एवम् $y = b$ से घिरे भाग का
क्षेत्रफल = $\int_a^b x\ dy = \int_a^b \phi(y)\ dy$

3. दो वक्रो $y = f(x)$, $y = g(x)$, तथा रेखाये $x = a$ एवम् $x = b$ के मध्य घिरे भाग का क्षेत्रफल = $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

4. दो वक्रो $x = f(y)$, $x = g(y)$, तथा रेखाये $y = a$ एवम् $y = b$ के मध्य घिरे भाग का क्षेत्रफल = $\int_a^b [f(y) - g(y)]dy$

5. दीर्घ वृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ जहाँ x- अक्ष पर निर्देशांक $(a, 0)$ तथा y – अक्ष पर निर्देशांक (0, b) है।

6. वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ जहाँ x – अक्ष पर निर्देशांक (a, 0) तथा y- अक्ष पर निर्देशांक $(0, a)$ है।

7. परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ जहाँ शीर्ष (0,0) तथा नाभि निर्देशांक $(a , 0)$ है।

8. परवलय का समीकरण $x^2 = 4ay$ जहाँ शीर्ष (0,0) तथा नाभि निर्देशांक $(0, a)$ है।

प्रश्न क्रमांक-1

(i) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

(a) π (b). $\frac{\pi}{2}$ (c) .$\frac{\pi}{3}$ (d) .$\frac{\pi}{34}$

(ii) वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$, से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

(a) 2 (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{9}{3}$ (d) $\frac{9}{2}$

(iii) वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

(a) -9 (b) $\frac{-15}{4}$ (c) $\frac{15}{4}$ (d) $\frac{17}{4}$

(iv) वक्र $y = |x|$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

(a) 0 (b). $\frac{1}{3}$ (c).$\frac{2}{3}$ (d) .$\frac{4}{3}$

(v) दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का संपूर्ण क्षेत्रफल है -

(अ) ab (ब) πab (स) πb (द) πa

(vi) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल है -

(अ) πb (ब) πab (स) πb (द) πa^2

(vii) वक्र $y^2 = x$,रेखाओं $x = 1, y = 4$ एवम् x -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है -

(अ) $\frac{11}{3}$ वर्ग इकाई (ब) $\frac{19}{3}$ वर्ग इकाई (स) $\frac{17}{3}$ वर्ग इकाई (द) $\frac{14}{3}$ वर्ग इकाई

(viii) $x = 0, x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) 4 (ब) 2 (स) 8 (द) 16

(ix) वक्र $y = x,\ x = e,\ y = \frac{1}{x}$ के धनात्मक x – अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) $\frac{3}{2}$ (ब) $\frac{5}{2}$ (स)1 (द) $\frac{1}{2}$

(x) $y -$ अक्ष $y = cosx,\ y = sinx, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) $\sqrt{2}\ +1$ (ब) $\sqrt{2}\ -1$ (स) $\sqrt{2}$ (द) 1

(xi) वक्र $y = x^3$ का $x -$ अक्ष रेखाओ $x = 0,\ x = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(अ) 64 वर्ग इकाई (ब) 32 वर्ग इकाई (स) 16 वर्ग इकाई (द) 128 वर्ग इकाई

(xii) $y^2 = 16x$ एवम् रेखा $x = 4$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल है –

(अ) $\frac{127}{3}$ वर्ग इकाई (ब) $\frac{125}{3}$ वर्ग इकाई (स) $\frac{128}{3}$ वर्ग इकाई (द) $\frac{126}{3}$ वर्ग इकाई

(xiii) वक्र $y^2 = x$,रेखाओं $x = 1, y = 2$ एवम् x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है -

(अ) $\frac{5}{3}$ वर्ग इकाई (ब) $\frac{1}{8}$ वर्ग इकाई (स) $\frac{9}{8}$ वर्ग इकाई (द) $\frac{7}{3}$ वर्ग इकाई

(xiv) वक्र $y^2 = 4x$,रेखा $y = 3$ एवम् y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(अ) $\frac{7}{4}$ वर्ग इकाई (ब) $\frac{9}{4}$ वर्ग इकाई (स) $\frac{5}{4}$ वर्ग इकाई (द) $\frac{11}{4}$ वर्ग इकाई

प्रश्न 2. रिक्त स्थान भरिये ।

(i) वक्र $x^2 + y^2 = 2x$ का क्षेत्रफल ……………….. है |

(ii) वक्र $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ……………….. है |

(iii) वक्र $y = x^2$ रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ………………… है |

(iv) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ……… है ।

(v) वक्र $y^2 = 4x$ रेखा $y = 3$ एवम् $y -$ अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ………… है |

(vi) दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ………………… है |

(vii) दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ………………… है |

(viii) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल ……………….. है |

(ix) वक्र $y = x^2 + x$, $x -$ अक्ष तथा रेखा $x = 2$ व $x = 5$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल …… है |

(x) वक्र $y = f(x), x -$ अक्ष तथा रेखा $x = a$ व $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल …… है |

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाये ।

(i)	वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ का क्षेत्रफल	(अ)	πa^2 वर्ग इकाई
(ii)	वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल	(ब)	$\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई
(iii)	वक्र $y = 2x - x^2$ व $x -$ अक्ष से घिरा क्षेत्रफल	(स)	25π वर्ग इकाई
(iv)	वक्र $y = x^2$ व $x -$ अक्ष से घिरा क्षेत्रफल	(द)	$\frac{4}{3}$ वर्ग इकाई
(v)	रेखा $y = 2x$ व $x = 0$, $x = 3$ से घिरा क्षेत्रफल	(इ)	$8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई
(vi)	वक्र $y^2 = 4x$ व रेखा $x = 3$ से घिरा क्षेत्रफल	(फ)	9 वर्ग इकाई

प्रश्न क्रमांक-4 निम्नलिखित में से सत्य/असत्य लिखिए।

1- वक्र $y = f(x), x$ अक्ष एवं रेखाओं $x = a$ तथा $x = b\ (b > a)$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_a^b y dx$ है।

2- किसी वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल $2\pi a^2$ होता है।

3- वक्र $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल $= \pi$ वर्ग इकाई है |

4- दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $= 12\pi$ वर्ग इकाई है |

5- वक्र $y^2 = 2y - x$ व $y -$ अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 16 वर्ग इकाई है |

6- वृत्त $x^2 + y^2 = 64$ का क्षेत्रफल 36π वर्ग इकाई है |

7- वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल $\frac{\pi}{4}$ वर्ग इकाई है |

8- वक्र $x^2 + y^2 = 2ax$ का क्षेत्रफल $= \pi a^2$ वर्ग इकाई है |

9- $\int e^x [f(x) + f'(x)]dx$ का समाकलन $= e^x f(x) + c$

10- $\int (sec^2 x tanx\ dx\ )$ का मान $tanx\ +\ c$ होता है ।

11- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)dt$ होता है ।

12- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a + b - x)dx$ होता है

प्रश्न क्रमांक- 5 एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

(i) वक्र $y^2 = x$, रेखाओं $x = 1, x = 4$ एवं x –अक्ष से घिरे क्षेत्र का प्रथम चतुर्थांश् में क्षेत्रफल क्या होगा ?

(ii) वक्र $x^2 = 4y, y = 2, y = 4$ एवं y –अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या है ?

(iii) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवम् रेखओ $x = 0$, $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(iv) वृत्त $x^2 + y^2 = 36$ का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(v) वक्र $y = logx$ व $y = 0$, $x = 2$ व x – अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(vi) वक्र $y = mx$, $x = 2$ व x – अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(vii) वक्र $y = 2x$, $x = 0$ व $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(viii) वक्र $y = 2\sqrt{9 - x^2}$ व x – अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(ix) वक्र $y = \sqrt{a^2 - x^2}, x = 0$ व $x = a$ व x – अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(x) वक्र $y^2 = 2y - x$ व x – अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(xi) वक्र $y^2 = 2x$ व सरल रेखा $x - y = 4$ घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(xii) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा

प्रश्न क्रमांक :

प्रश्न 1. वक्र $y = cosx$, x – अक्ष व $x = 0$ तथा $x = 2\pi$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 2. वक्र $y = sinx$, x – अक्ष व $x = 0$ तथा $x = 2\pi$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 3. रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा निर्देशांकों के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 4. वक्र $x^2 + y^2 = 1$ के प्रथम चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 5.वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 6. वक्र $y = sin^2x$, x – अक्ष व $x = 0$ तथा $x = \pi$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 7. वक्र $y = cos^2x$, x – अक्ष व $x = 0$ तथा $x = \pi$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 8. वक्र $y = sinx$, x – अक्ष व $x = \frac{\pi}{2}$ तथा $x = \frac{3\pi}{2}$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 9. वक्र $y^2 = 2y - x$, y – अक्ष घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 10. रेखा $y = 2, x = 0$ तथा $x = 3$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 11. वक्र $y = e^x, x = 0$ तथा $x = 2$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

प्रश्न 12. वक्र $y = x^2$ रेखा $y = 4$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 13. परवलय $y^2 = 8x$ तथा सरल रेखा $x = 8$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 14. परवलय $y = x^2$ तथा सरल रेखा $y = |x|$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

प्रश्न 15. परवलय $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 3$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

प्रश्न 16. वक्र $x^2 = 4y$ व सरल रेखा $x = 4y - 2$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 17. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा उसकी नाभिलम्ब जीवा से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 18. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ एवं कोटियों $x = 0$ और $x = ae$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ $b^2 = a^2(1 - e^2)$ एव $e < 1$ है।

प्रश्न 19. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का संपूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 20. परवलय $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 3$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 21. $9x^2 + 16y^2 = 144$ व सरल रेखा $x = 2$ से खंडित लघु भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 22. वक्र $y = x$ का x - अक्ष तथा रेखाओं $x = -1, x = 2$ के घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 23. वक्र $y = x^2$ तथा रेखा $y = 4$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 24. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 25. समाकलन का उपयोग करते हुये त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिसके शीर्ष (1,0), (2,2) व (3,1)है।

प्रश्न 26. परवलय $y^2=4ax$ तथा रेखा $y=mx$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 27. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल समाकलन द्वारा ज्ञात कीजिये जिसके भुजाये $y=2x+1$, $y=3x+1$ व $x=4$ है ।

प्रश्न 28. परवलय $4y=3x^2$ से रेखा $2y=3x+12$ द्वारा कटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 29. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ तथा रेखा $x+y=2$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

प्रश्न 30. समाकलन का उपयोग करते हुये त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिसके शीर्ष $A(2,1), B(3,4)$ व $C(5,2)$है।

प्रश्न 31. समाकलन विधि से रेखओ $|x|+|y|=a$ घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

प्रश्न 32. वक्र $y^2=4x$, एवं रेखा $x=3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 33. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2+y^2=32$, रेखा $y=x$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 34. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 35. वक्र $x^2=4y$, एवं रेखा $x=4y-2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 36. छेदक रेखा $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ द्वारा वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(उत्तर)अध्याय-8

प्रश्न 1– i) a ii) b iii) d iv) c (v) πab (vi) πa^2 (vii) $e^x \sec x + c$ (viii) $\frac{14}{3}$वर्ग इकाई (ix) 4 (x) $\frac{3}{2}$ (xi) $\sqrt{2}-1$ (xii) 64 वर्ग इकाई (xiii) $\frac{128}{3}$ वर्ग इकाई (xiv) $\frac{7}{3}$ वर्ग इकाई (xv) $\frac{9}{4}$वर्ग इकाई

प्रश्न 2. (i) π वर्ग इकाई (ii)πa^2 वर्ग इकाई (iii)) $\frac{32}{3}$वर्ग इकाई (iv) π वर्ग इकाई (v)$\frac{9}{4}$वर्ग इकाई (vi) 12π वर्ग इकाई (vii) 6π वर्ग इकाई (viii) $\frac{\pi}{4}$वर्ग इकाई (ix) $\frac{99}{2}$ वर्ग इकाई (x) $\int_a^b y\,dx$

प्रश्न3. (i) 25π वर्ग इकाई (ii)) πa^2 वर्ग इकाई (iii) $\frac{4}{3}$वर्ग इकाई (iv)$\frac{1}{3}$वर्ग इकाई (v) 9 वर्ग इकाई (vi) $8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

प्रश्न 4. $(i)\,\frac{14}{3}$ वर्ग इकाई (ii) $\frac{32-8\sqrt{2}}{3}$वर्ग इकाई
(iii) π वर्ग इकाई (iv) 36π वर्ग इकाई (v) $(log4-1)$ वर्ग इकाई (vi) $2m$ वर्ग इकाई (vii) 9 वर्ग इकाई (viii) 9π वर्ग इकाई (ix) $\frac{\pi a^2}{4}$वर्ग इकाई (x) $\frac{4}{3}$वर्ग इकाई
(xi) 18 वर्ग इकाई (xii) 2π वर्ग इकाई

प्रश्न 4– i) सत्य ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) सत्य

अध्याय-8

अवकल समीकरण

स्मरणीय बिन्दु :-

1. वे बीजगणितीय समीकरण जिनमें अवकल गुणांक के पद हो अवकल समीकरण (differential equation) कहलाते है।

उदा : $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$

2. साधारण अवकल समी. वह अवकल समी. जिनमें केवल एक ही स्वतंत्र चर है।

उदा :- $\frac{dy}{dx} + c = 0$

- अवकल समीकरण की कोटि (order of a diff. equeation) किसी अवकल समी. में उसके उच्चतम अवकलज की कोटि उसकी कोटि कहलाती है।

  उदा :- $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ की कोटि 2 है।

- अवकल समीकरण की घात (Degree of a diff. equeation) किसी अवकल समी. प्रयुक्त अवकलज या अवकल गुणांक भिन्नात्मक घातों तथा करणी चिन्हों से मुक्त हो तब उच्चतम अवकलन की घात, उस समी. की घात कहलाती है।

  उदा:- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + y = 0$ की घात 3 है।

- अवकल समी. का हल - किसी अवकल समी. का हल अथवा समाकलन चरों में वह सम्बन्ध होता है जिनसे और जिनसे प्राप्त अवकलजों से समीकरण संतुष्ट हो जाए।

- व्यापक और विशेष हल (general and Particular solution) किसी अवकल समी. में उस हल को जिसमें स्वेच्छ अचरों की संख्या, समी. की कोटि के बराबर हो व्यापक हल कहते है। व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशेष मान देने पर प्राप्त हल को विशेष हल कहते है।

- प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का अवकल समी. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ इसे निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

  $$Mdx + Ndy = 0$$

- समघात अवकल समी. (Homogeneous equation)

  $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ उदा.- $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

- रैखिक अवकल समी. (Linear diff. equ.) किसी अवकल समी. में परतन्त्र चर (माना Y) और उसके अवकलज प्रथम घात के हो तो उसे रैखिक अवकल समी. कहते है।

  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ जहां P एवं Q अचर अथवा केवल x के फलन है।

  उदाहरण : $\frac{dy}{dx} + y = e^x$ एक रैखिक समी. है।

  इसका हल : $y.(I.F.) = \int Q.(I.F.)dx + c$

  यहां $I.F.$ (समाकलन गुणांक) $= e^{\int pdx}$

- समघातीय फलन (Homogeneous function):-

  वह अवकल समी. जिसे $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ अथवा $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहां $f(x, y)$ एवं $g(x, y)$ शून्य घात वाले समघातीय फलन है, समघातीय अवकल समी. कहलाता है।

  उदा:- $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

प्रश्न 1- सही विकल्प चुनिये

(i) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है:

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) परिभाषित नहीं है।

(ii) अवकल समीकरण $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x[\frac{dy}{dx}]^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$ की घात है:

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) परिभाषित नहीं है।

(iii) $\frac{dx}{dy} = h(\frac{x}{y})$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौन सा प्रतिस्थापन किया जाताहै:

(a) $y = vx$ (b) $v = yx$ (c) $x = vy$ (d) $x = v$

(iv) अवकल समीकरण $(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay\ (-1 < y < 1)$ का समाकलन गुणक है:

(a) $\frac{1}{y^2-1}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (c) $\frac{1}{1-y^2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

(v) अवकल समी. $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2}$ की कोटि एवं घात होगी।

(a) 1, 2 (b) 2, 1 (c) 1, 1 (d) 2, 2

(vi) अवकल समी. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xcosx = 0$ की कोटि एवं घात होगी।

(a)1, 2 (b) 2, 1 (c) 1, 3 (d) 3, 1

(vii) अवकल समी. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$ की कोटि एवं घात होगी।

(a)1, 2 (b) 2, 2 (c) 2, 1 (d) 1, 1

(viii) अवकल समी. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + a^2y = 0$ की कोटि एवं घात होगी।

(a)2, 2 (b) 2, 1 (c) 1, 2 (d) 1, 1

(ix) अवकल समी. $P = \frac{\left\{1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{dy}{dx}}$ की कोटि एवं घात होगी।

(a) 6, 2 (b) 2, 6 (c) 2, 3 (d) 2, 3/2

(x) रेखीय अवकल समी. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का समाकलन गुणांक (I.F.) होगा ।

(a) $e^{\int Qdy}$ (b) $e^{\int Qdx}$ (c) $e^{\int Pdy}$ (d) $e^{\int Pdx}$

(xi) रेखीय अवकल समी. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ में P एवं Q है ।

(a) अचर अथवा x के फलन (b) अचर (c) x, y के फलन (d) अचर अथवा y के फलन

(xii) रेखीय अवकल समी. $\frac{dx}{dy} + Py = Q$ में P एवं Q है ।

(a) अचर अथवा x के फलन (b) अचर (c) x, y के फलन (d) अचर अथवा y के फलन

(xiii) रेखीय अवकल समी. $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ का हल है ।

$(a) xe^{\int Pdy}=\int[Qe^{\int Pdy}]dy+c$ $\quad$ $(b)\ xe^{\int Pdx}=\int[Qe^{\int Pdx}]dx+c$

$(c)\ ye^{\int Pdy}=\int[Qe^{\int Pdy}]+c$ $\quad$ $(d)\ ye^{\int Pdx}=\int[Qe^{\int Pdx}]dx+c$

(xiv) $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ समीकरण है।

(a) समघात (b) रैखिक (c) बरनौली (d) इनमें से कोई नही

प्रश्न 2. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए–

(i) $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2$ का समाकलन गुणक लिखिए ।

(ii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$ का व्यापक हल लिखिए।

(iii) रैखिक अवकल समीकरण का मानक रूप लिखिए।

(iv) अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}-sin^2 y$ कोटि एवं घात लिखिए।

(v) अवकल समी. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ की कोटि व घात बताईये।

(vi) समी. $\frac{dy}{dx}+y=e^x$ का हल है।

(vii) $y = usin3x$ का अवकल समी. है।

(viii) समघात समी. का एक उदा. लीखिये।

(ix) रैखिक समी. का एक उदा. लीखिये।

(x) $\frac{dy}{dx}-y=cosx$ का समाकलन गुणांक क्या है।

(xi) $x^2\frac{dy}{dx}=2$ का व्यापक हल बताईये।

(xii) रैखिक समी. $x\frac{dy}{dx}-3x^2y=x^3$ में P और Q का मान बताईये।

(xiii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ की कोटि तथा घात क्या है।

(xiv) प्रथम कोटि व दो घात वाला अवकल समीकरण लिखिये।

प्रश्न 3- सही जोडी बनाईये-

स्तम्भ (A)		स्तम्भ (B)
(i)	$y = mx + c$ के संगत अवकल समी है।	(अ) समघात अवकल समी.
(ii)	समी. $x(x+y)dy + y^2dx = 0$ है।	(ब) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
(iii)	अवकल समी. $(x+y+1)dy = dx$	(स) e^{-y}
(iv)	अवकल समी- $dy = (x+y+2)dx$ का समाकलन गुणांक है।	(द) रैखीय अवकल समी.
(v)	अवकल समी. $\frac{dy}{dx} + ay = e^{mx}$ का समाकलन गुणांक है।	(इ) एक
(vi)	$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ की घात है।	(फ) e^{ax}
(vii)	$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ है एक	(ल) समघात समी.
(viii)	$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ है	(स) रैखिक समी.

प्रश्न 4. निम्नलिखित में से सत्य/असत्य लिखिए।

(i) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का व्यापक हल $e^x + e^{-y} = c$ है।

(ii) $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy$ एक समघातीय अवकलन समीकरण नहीं है।

(iii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$ का हल $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$ है।

(iv) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + = x^2$ एक रैखिक अवकलन समीकरण नहीं है।

(v) समघात अवकल समी. को हल करने के लिये $y = vx$ मान रखा जाता है।

(vi) $(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$ को चरों के पृथक्करण द्‌वारा हल किया जा सकता है।

(vii) $\frac{dy}{dx} = cotx$ का हल $y = logsinx + c$ है।

(viii) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ की कोटि एक है।

(ix) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - sin^2y = 0$ की घात दो है।

(x) $y = e^x + 1$ अवकल समी. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ का एक हल है।

(xi) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ एक समघात फलन है।

(xii) $\frac{dx}{dy}+Py=Q$ का समाकलन गुणांक $e^{\int pdy}$ है।

(xiii) $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2$ का समाकलन गुणांक $\frac{1}{x}$ है।

(xiv) $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2logx$ एक रैखिक समी. है।

प्रश्न 5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) अवकल समीकरण $ylog\, ydx-xdy=0$ का हल.....................है।

(ii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=ytanx$; $y=2$ यदि $x=0$ का विशिष्ट हल.............है।

(iii) समी. $x^2+y^2=a^2$ के संगत अवकल समी. है-

(iv) अवकल समी. $\frac{dy}{dx}=sinx$ का हल है-

(v) रैखिक अवकल समी. $\frac{dy}{dx}+ytanx=sinx$ का समाकलन गुणांक (i.F) है-

(vi) $x(x+y)dy+xydx=0$ … … … … … …. अवकल समीकरण है।

(vii) यदि $y=xe^{2x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}=$ ....

(viii) अवकल समी. $\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+6=0$ की कोटि व घात है .

(ix) अवकल समी. $\frac{dy}{dx}+2y=4x$ का हल .... है।

(x) अवकल समी. $\frac{dy}{dx}=cotx\, coty$ का व्यापक हल .... है।

(xi) अवकल समी. $\frac{dy}{dx}=4y$ का हल .... है।

प्रश्न क्रमांक 6 :

1) सिद्ध करो कि $y=cosx+c$ अवकल समी. $y'+sinx=0$ का हल है।

2) सिद्धकरो कि $y=\sqrt{1+x^2}$ अवकल समी. $y'=\frac{xy}{1+x^2}$ का हल है।

3) $y=mx$ का अवकलसमी. ज्ञात करो जहां m एक स्वेच्छ अचर है।

4) सिद्ध करो कि $y=x^3+ax^2+bx+c$ अवकल समी. $\frac{d^3y}{dx^3}=6$ का एक हल है।

5) अवकल समी- $\frac{dy}{dx}=sinx$ को हल कीजिये।

6) सिद्ध करो कि $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ का एक व्यापक हल $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ है।

7) $\frac{dy}{dx}=(1+x^2)(1+y^2)$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

8) सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$ का व्यापक हल $e^x+e^{-y}=c$ है।

9) $(x^2+1)\frac{dy}{dx}=1$ को हल कीजिये।

10) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=zx^2$ का समाकलन गुणांक ज्ञात करो।

11) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-2xy=(x^2+2)(x^2+1)$ में P और Q का मान ज्ञात करों।

12) समघात समी. किसे कहते है ? एक उदाहरण दीजिये।

13) रैखिक समी. क्या है ? एक उदाहरण दीजिये।

14) रैखिक समी. $\frac{dx}{dy}+Px=Q$ का समाकलन गुणांक क्या होगा ?

15) अवकल समी. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-cosx}{1+cosx}$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

16) $sec^2x\, tany\, dy+\ sec^2y\, tanx\, dy=0$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

17) $(e^x+c^{-x})dy-(e^x-e^{-x})dx=0$ का व्यापक हल ज्ञात करों।

18) वक्रों के मुल $y=asin\,(x+b)$ जहां a व b स्वेच्छ अचर है को निरूपित करने वाले अवकल समी. को ज्ञात करो।

19) $y''+(y')^2+2y=0$ की कोटि एवं घात बताओं।

20) $cos^2x\frac{dy}{dx}+y=tanx$ का समाकलन गुणांक ज्ञात करो।

21) $\frac{dy}{dx}=sin^{-1}x$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

22) ऐसे दीर्घवृत्तों के कुल का अवकल समी. ज्ञात करो जिनकी नाभियां y-अक्ष पर है तथा जिलका केन्द्र मूल बिन्दु है।

23) $\frac{dy}{dx}+2y=sinx$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

24) $\frac{dy}{dx}+\ \frac{y}{x}=x^2$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

25) $\frac{dy}{dx}+(secx)y=tanx,\ \ (0\le x<\frac{\pi}{2})$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

26) $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1+x^2}}=0$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

27) अवकल समी. $xy\frac{dy}{dx}=(x+2)(y+2)$ के लिये बिन्दु (1,-1) से गुजरने वाला वक्र ज्ञात करो।

28) $(1+x^2)dy+2xydx=\cot x\, dx\ \ (x\neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

29) $(x+y)\frac{dy}{dx}=1$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

30) $\frac{dy}{dx}+2ytan\,x\ =\sin x, y=0$ यदि $x=\frac{\pi}{3}$ का विशिष्ट हल ज्ञात करो।

31) किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5 प्रतिषत वार्षिक दर से होती है । इस बैंक में 1000 जमा कराए जाते है, ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जाएगी ?$(\log 2=0.6931)$

32) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y=1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए

33) दर्शाइये कि समी. $(x^2+xy)dy=(x^2+y^2)dx$ एक समघातीय समी. है। इसका व्यापक हल ज्ञात करो।

34) $(x^2-y^2)dx+2xy\,dy=0$ को हल करो।

35) $(x-y)dy-(x+y)dx=0$ को हल करो।

36) $(x+y)dy+(x-y)dx=0,\ y=1$ जब $x=1$ का विशिष्ट हल ज्ञात करो।

37) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$ को हल कीजिये।

38) $x\log x\ \frac{dy}{dx}+y=\frac{2}{x}\log x$ को हल कीजिये।

39) $ydx+(x-y^2)dy=0$ को हल करो।

40) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2};\ \ y=0$ यदि $x=1$ का हल ज्ञात करो।

41) $(1+e^{2x})dy+(1+y^2)e^x dx=0$ का विशिष्ट हल ज्ञात करो। $y=1$ यदि $x=0$ हो।

42) $ye^{\frac{x}{y}}dx=\left(xe^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dy, (y\neq 0)$ को हल कीजिये।

43) अवकल समीकरण $xy\frac{dy}{dx}=(x+2)(y+2)$ के लिए बिन्दु (1,–1) से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए।

प्रश्न-7 निम्नलिखित अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(i) $(x^2+xy)dy=(x^2+y^2)dx$

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$

(iii) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

(iv) $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2$

(v) $ydx-(x+2y^2)dy=0$

(vi) $(x+y)\frac{dy}{dx}=1$

(vii) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$

(viii) $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2 logx$

(ix) $(1+x^2)dy+2xy\,dx=cotx\,dx\ (x\neq 0)$

प्रश्न-8 निम्नलिखित अवकल समीकरणों के विशिष्ट हल कीजिए।

(i) $\frac{dy}{dx}-3ycotx=sin2x; y=2$ यदि $x=\frac{\pi}{2}$

(ii) $\frac{dy}{dx}+2y\ tanx=sin\,x\ ;\ y=2$ यदि $x=\frac{\pi}{3}$

(iii) $2xy+y^2-2x^2\frac{dy}{dx}=0\ \ ;\ \ \ y=2$ यदि $x=1$

(iv) $\frac{dy}{dx}-2\frac{y}{x}+cosec\left(\frac{y}{x}\right)=0\,;\ \ \ y=0$ यदि $x=1$

उत्तर (अध्याय–9)

प्रश्न1. i) a (ii) b (iii) c (iv) d (v) a (vi) a (vii) c (viii) b (ix) b (x) d (xi) a (xii) d (xiii) d (xiv) a

प्रश्न 2- (i) $\frac{1}{x}$ (ii) $y = tanx + c$ (iii) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ <u>OR</u> $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ (iv) 1,2

(v) (2,2) (vi) $2y = e^x + ce^{-x}$ (vii) $\frac{dy}{dx} = 12\cos 3x$ (viii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$ (ix) $\frac{dy}{dx} + 2y = 3x$

(x) e^{-x} (xi) $y = c - \frac{2}{x}$ (xii) P=-3x, Q=x^2 (xiii) (1,6) (xiv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$

प्रश्न 3- (i) ब (ii) अ (iii द (iv) स (v) फ (vi) इ (vii) स (viii) ल

प्रश्न 4 i) सत्य (ii). असत्य (iii). सत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) सत्य (vii) सत्य

(viii) असत्य (ix) सत्य (x) सत्य (xi) असत्य (xii) सत्य (xiii) सत्य (xiv) सत्य

प्रश्न 5 (i) $y = e^{cx}$ (ii) $\sec x$ (iii) $\left[x + y\frac{dy}{dx} = 0\right]$ (iv)$[y + sinx = c]$ (v) $[secx]$

(vi) समघात (vii) $\left[y(2 + \frac{1}{x})\right]$ (viii) [कोटि = 3, घात = 1] (ix) $[y = 2x - 1 + 6e^{-2x}]$

(x)$[sinx = c\ secy]$ (xi) $[y = Ae^{4x}]$.

अध्याय-10

सदिश बीजगणित

स्मरणीय तथ्य

- ❖ ऐसी राशि जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, सदिश राशि कहलाती है।
- ❖ सदिश AB को $\overrightarrow{AB}$ या $\overline{AB}$ से प्रदप्रर्शित करते हैं।
- ❖ A को प्रारंभिक बिन्दु तथा B को अन्तिम बिन्दु कहते हैं।
- ❖ $\overrightarrow{AB}$ = - $\overrightarrow{BA}$
- ❖ स्थिति सदिश (Position Vector) : - माना मूलबिन्दु 0 (0,0,0) के सापेक्ष किसी बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है, तो सदिश $\overrightarrow{OP}$ को बिन्दु P का स्थिति सदिश कहते हैं, जहां O प्रारंभिक बिन्दु तथा P अंतिम बिन्दु है।

  अत: P का स्थिति सदिश = $\overrightarrow{OP}$

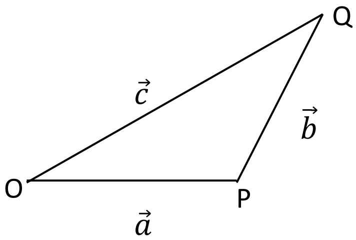
  $= x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$
- ❖ यदि A व B के स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{a}$ व $\vec{b}$ है तो $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
- ❖ <u>दिक कोज्या (Direction Cosines) :-</u> माना $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j} + c\,\hat{k}$, X -अक्ष, Y -अक्ष एवं Z अक्ष के साथ क्रमश α, β एवं ϒ कोण बनाता है तो cosα, cosβ, cosϒ को $\vec{r}$ की दिककोज्याए कहा जाता है।
- ❖ दिक कोज्याओं को l, m, n से प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात

$$Cos\alpha = l$$
$$Cos\beta = m$$
$$Cos\Upsilon = n$$

$$l = cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$m = cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$n = cos\Upsilon = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$ या $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

- ❖ सदिशों के योग का त्रिभुज नियम -



- ❖ $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ या $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
- ❖ $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{O}$ सदिश योगफल के गुणधर्म

1. क्रम विनिमय नियम का पालन करता है।

   अर्थात $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. साहचर्य नियम का पालन करता है।

   $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3. शून्य सदिश $\vec{O}$ को सदिश योगफल के लिये योज्य सर्वसमिका कहा जाता है।

अर्थात $\vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}$

❖ <u>शून्य सदिश (zero vector, null vector) :-</u> वह सदिश जिसका प्रारंभिक एवं अन्तिम बिन्दु सम्पाती होता है। इसे $\vec{O}$ से या $\overline{AA}$, $\overline{BB}$ .... आदि से निर्दिष्ट किया जाता है।

इसका परिमाण शून्य होता है।

❖ <u>संरेख सदिश (Collinear Vectors) :-</u> दो या दो से अधिक सदिश जो एक ही रेखा के समांतर हो, सरेख सदिश कहलाते है।

❖ समान सदिश (Equal Vector) :- दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते है यदि उनके परिमाण एवं दिशा समान है। इन्हे $\vec{a} = \vec{b}$ के रूप में लिखा जाता है।

❖ ऋणात्मक सदिश (Negative of a vector) :- एक सदिश जिसका परिमाण, दिये हुए सदिश के समान है परन्तु दिशा विपरीत हो ऋणात्मक सदिश कहलाता है। उदाहरण सदिश $\overline{BA}$, $\overline{AB}$ का ऋणात्मक सदिश है।

$\overline{AB} = -\overline{BA}$

$\overline{AB} + \overline{BA} = \bar{O}$

$\overline{AA} = \bar{O}$

❖ आदिश से सदिश का गुणनफल :-

$\lambda.\vec{a}$

यहा λ, सदिश $\vec{a}$ का संरेख है तथा λ का मान धनात्मक या ऋणात्मक होने के अनुसार इसकी दिशा समान या विपरीत होती है।

❖ <u>एक सदिश के घटक (Components of a vector) :-</u>

यदि $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ हो तो x, y, z सदिश $\vec{r}$ के अदिश घटक कहलाते हैं। तथा $x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ सदिश $\vec{r}$ के सदिश घटक कहलाते है।

❖ परस्पर लंबवत इकाई सदिश :- $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ परस्पर लंबवत इकाई सदिश है।

❖ किसी सदिश का परिणाम यदि $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ हो तो सदिश $\vec{r}$ का परिमाण $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

❖ किसी सदिश का इकाई सदिश किसी सदिश $\vec{a}$ का इकाई सदिश $\hat{a}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। तथा $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

❖ दो बिन्दुओं को मिलाने वाला सदिश :-

यदि $A = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$ तथा

$B = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$ हो तो

$\overline{AB} = (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k})$

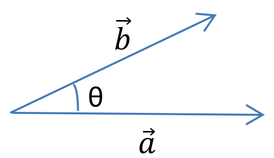
$= (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

❖ खण्ड सूत्र (Section Formula) :- यदि बिन्दु R, P एवं Q को $m : n$ में अंत: विभाजित करता है तो R का स्थिति सदिश OR होगा। तथा

$OR = \frac{m.\bar{b} + n.\bar{a}}{m+n}$

❖ यदि बिन्दु R, P और Q को बहायत: विभाजित करता है तो $OR = \frac{m.\bar{b} + n.\bar{a}}{m+n}$

❖ दो सदिशों का आदिश गुणनफल (Scalar Product of dot product) : - दो शून्योत्तर सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ प्रदर्शित किया जाता है तथा $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |a|.|b|\cos\theta$ जहां θ, a और b के बीच का कोण है।



1. $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$ [$\vec{a}\,.\,\vec{b}$ एक अदिश राशि है]

2. यदि $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$ तब $\vec{a} \perp \vec{b}$

3. $\vec{a}\,.\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$

4. $\vec{a}\,.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$

5. $\vec{\lambda} a(b) = \vec{\lambda}(a.b) = a.(\vec{\lambda} b)$

- यदि $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ तथा

  $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ हो तब

  $a.b = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

- दो सदिशों का सदिश गुणनफल (Vector Product or cross product) :- दो यून्योत्तर सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b}$ से निर्दिष्ट किया जाता है और $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.sin\theta.\hat{n}$ में जहां θ, a व b के बीच का कोण है $(0 \le \theta \le \pi)$ तथा $\hat{n}$ एक मात्रक सदिश है जो a व b के लम्बवत है।

- महत्वपूर्ण तथ्य :-

  1. $\vec{a} \times \vec{b}$ एक सदिश राशि है

  2. यदि $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

     या $\vec{a} \parallel \vec{b}$ या $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = 0$

  3. $\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$

  4. सदिश गुणनफल क्रम विनिमय नियम का पालन नही करता। अर्थात $\vec{a} \times \vec{b} \ne \vec{b} \times \vec{a}$

  5. यदि $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ तथा

     $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ हो तो

     $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

  6. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

  7. $\vec{\lambda} a \times (b) = \vec{\lambda}(a \times b) = a \times (\vec{\lambda} b)$

- $\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$
- $\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$
- $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
- $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath}$
- $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} = -\hat{k} \times \hat{\jmath}$
- $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} = -\hat{k} \times \hat{\imath}$
- a व b के लम्बवत मात्रक सदिश = $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$
- त्रिभुज का क्षेत्रफल :- यदि a और b त्रिभुज की संलग्न भुजाओं को प्रदर्शित करते है तब

  Δ ABC का क्षे. $= \frac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{b}|$ या

  Δ का क्षे. $= \frac{1}{2}\,|\vec{b}|\,|\vec{a}|.sin\theta$

- समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल :- यदि a व b किसी समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं को प्रदर्शित करते हैं तो

समांतर चतुर्भुज का क्षे. : $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$= |\vec{a}|\,|\vec{b}|.sin\theta$

यदि $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.cos\theta$

- यदि $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.cos\theta$ दिया हो तो दोनों सदिशों के बीच का कोण θ

  समी $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

- ❖ यदि $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.sin\theta.\hat{n}$ दिया हो तो दोनों के बीच का कोण θ ज्ञात करने के लिये

  या $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\,|\vec{a}|.|\vec{b}|.sin\theta.\hat{n}\,|$

  या $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a|.|b|.|sin\theta|.|\hat{n}|$

  या $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a|.|b|sin\theta|$

  या $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|a||b|} = sin\theta$

- ❖ एक सदिश $\vec{a}$ का दूसरे सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ से प्राप्त होता है।

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये

(i) किसी त्रिभुज ABC के लिए निम्न मे से कौन सा कथन सत्य नहीं है

(a) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ (b) $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0$
(c) $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA} = 0$ (d) $\overline{AB} - \overline{CB} + \overline{CA} = 0$

(ii) यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो संरेख सदिश है तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है

(a) $\vec{b} = \pi\vec{a}$ किसी अदिश π के लिए

(b) $\vec{a} = \pm\vec{b}$ (c) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के क्रमागत घटक समानुपाती नहीं है

(d) दोनों सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ की दिशा समान है परन्तु परिमाण विभिन्न है।

(iii) यदि शून्येत्तर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण a है और π एक शून्येत्तर अदिश है $\pi\vec{a}$ एक मानक सदिश है यदि :

(a) $\pi = 1$ (b) $\pi = -1$ (c) $a = |\pi|$ (d) $a = \frac{1}{|\pi|}$

(iv) यदि सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार है कि $|\vec{a}| = 3$ और $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, तब $|\vec{a} \times \vec{b}|$, एक मात्रक सदिश है यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है :

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(v) यदि आयत के शीर्ष A, B, C और D हैं जिनके स्थित सदिश क्रमश:

$-\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, $\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, $\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ और $-\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ का क्षेत्रफल हैः

(a) $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई (b) 1 वर्ग इकाई (c) 2 वर्ग इकाई (d) 4 वर्ग इकाई

(vi) यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच कोण θ है तो $\vec{a}.\vec{b} \geq 0$ होगा यदि

(a) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (b) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (c) $0 < \theta < \pi$ (d) $0 \leq \theta \leq \pi$

(vii) यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो मात्रक सदिश हैं और उनके बीच का कोण θ है तो $\vec{a} + \vec{b}$ एक मानक सदिश है यदि

(a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (b) $\theta = \frac{\pi}{3}$
(c) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (d) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

(viii) $\hat{\imath} \times (\hat{\jmath} \times \hat{k}) + \hat{\jmath}.(\hat{\imath} \times \hat{k}) + \hat{k}.(\hat{\imath} \times \hat{\jmath})$ का मान हैः

(a) 0 b) −1 c) 1 d) 3

(ix) यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ जब θ बराबर है:

(a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (c) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (d) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

(x) $\vec{a}$ की दिशा में इकाई संदिश होगा -

(a). $\hat{\imath}$ (b). $\frac{\vec{a}}{a}$ (c) a^2 (d) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

(xi) किसी त्रिभुज ABC में $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ का मान होगा -

(a). 0 (b). 1 (c). 3 (d). $\vec{a}$

(xii) यदि $\overline{OA} = \vec{a}$ तथा $\overline{OB} = \vec{b}$ हो तो $\overline{AB}$ का मान होगा -

(a). $\vec{a} + \vec{b}$ (b). $\vec{b} - \vec{a}$ (c). $\vec{a} - \vec{b}$ (d). $a^2 + b^2$

(xiii) निम्न में से शून्य सदिश है -

(a). $\overline{AA}$ (b). $\overline{AB}$ (c). $\overline{BA}$ (d). |AB|

(xiv) $\hat{\imath} \times \hat{\imath}$ का मान होगा -

(a). 0 (b). 1 (c). 2 (d). कुछ नहीं

(xv) $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$ का मान होगा -

(a). $\hat{k}$ (b). $\hat{\imath}$ (c). $\hat{\jmath}$ (d). 0

(xvi) $\hat{\imath}.(\hat{\jmath} \times \hat{k})$ का मान होगा -

(a). $\hat{k}$ (b). $\hat{\imath}$ (c). 1 (d). 0

(xvii) यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान्तर हो तो $\vec{a} \times \vec{b}$ होगा।

(a) 1 (b). $absin\theta$ (c). ab (d). 0

(xviii) $\hat{\imath} \times (\hat{\jmath} \times \hat{k})$ का मान होगा -

(a). $\hat{\jmath}$ (b). $\hat{\imath}$ (c). $\vec{O}$ (d). 0

(xix) l, m, n को कहते है -

(a). दिक कोण (b). दिक कोज्या (c). कोण (d). सदिश

(xx) $\vec{a} . \vec{b}$ है एक -

(a). सदिश राशि (b). अदिश राशि (c). संरेख सदिश (d). ऋणात्मक सदिश

(xxi) $\vec{a} \times \vec{b}$ है एक –

(a). सदिश राशि (b). अदिश राशि (c). संरेख सदिश (d). समान सदिश

(xxii) यदि $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ हो तो सदिश $\vec{r}$ का परिमाण होगा -

(a). $(x + y + z)$ (b). $x^2 + y^2 + z^2$ (c). $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (d). $\sqrt{x + y + z}$

(xxiii) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$ का मान होगा -

(a). $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (a). $\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}$ (c). $ab - ac$ (d). $\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

(xxiv) दो सदिशों $5\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}$ तथा $\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ तथा के बीच का कोण होगा -

(a). 30^0 (b). 0^0 (c). 90^0 (d). इनमे से कोई नहीं

प्रश्न-2 निम्नलिखित में से सत्य/असत्य लिखिए।

i) त्रिभुज की तीनों भुजाओं को क्रम में लेने पर उनका सदिश योग 1 होता है।

ii) दिए हुए सदिश $\vec{a}$ के लिए $a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश होता है।

iii) एक सदिश के सदिश घटक इसके दिक अनुपात कहलाते हैं।

iv) यदि किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं तो उसका क्षेत्रफल $|\vec{a} \times \vec{b}|$ द्वारा प्राप्त होता है।

v) यदि $|\vec{a}. \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ हो तो a व b के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ होगा।

vi) $\hat{\imath} \times (\hat{\jmath} \times \hat{k}) + \hat{\jmath}.(\hat{\imath} \times \hat{k}) + \hat{k}.(\hat{\imath} \times \hat{\jmath})$ का मान 1 है।

vii) यदि θ का मान π हो तो $\vec{a}. \vec{b}$ = - $|\vec{a}|.|\vec{b}|$ होगा।

viii) यदि A व B का स्थिति सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ हो तो AB का मान ($\vec{b}$ - $\vec{a}$) होगा।

ix) $(\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k})$ का परिमाण 1 है।

x) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}. \vec{b}$ होता है ।

xi) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\vec{a} \times \vec{b}|$ है।

xii) ($3\hat{\imath}$ - $2\hat{\jmath}$ + $\hat{k}$) और ($2\hat{\imath}$ + $\hat{\jmath}$ - $4\hat{k}$) परस्पर लंब है।

xiii) $\vec{a}. \vec{b}$ = $5\sqrt{2}$, $|\vec{a}|$ = 2, $|\vec{b}|$ = 5 हो तो दोनों के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ होगा।

xiv) $l^2 + m^2 + n^2$ का मान 1 होता है।

प्र.3. सही जोडी बनाईये –

स्तम्भ A	स्तम्भ B
(i) P(-2,-3) व Q (-1,1) तो |PQ|	(अ) $\sqrt{162}$
(ii) $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - 8\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ हो तो $\|\vec{a} + \vec{b}\|$	(ब) 5
(iii) $\vec{a}.(\vec{a} \times \vec{b})$ =	(स) 10
(iv) यदि $\vec{a} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{k} + \hat{\jmath}$ हो तो $\vec{a}.\vec{b} =$	(द) 0
(v) $(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$ के समांतर इकाई सदिश	(इ) शून्य सदिश
(vi) जिस सदिश का आदि एवं अंतिम बिन्दु सम्पाती हो।	(फ) $i/\sqrt{2} + j/\sqrt{2}$
(vii) यदि $\vec{a} \perp \vec{b}$ तब $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2$ का मान	(ल) 1
(viii) $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} =$	(स) $\| a \|^2 + \| b \|^2$

प्रश्न 4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

i) यदि दो शून्येत्तर सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ =.................

ii) $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} =$............................

iii) यदि बिन्दु A, B और C संरेख है तो $|\overrightarrow{AC}|$ =----------+ $|\overrightarrow{BC}|$

iv) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ और के लिए सदैव $|\vec{a}.\vec{b}|$-------------- $|\vec{a}||\vec{b}|$

v) यदि $\vec{a}$ व $\vec{b}$ लम्बवत हो तो $\vec{a}.\vec{b}$ = ...

vi) यदि $\vec{a}$ व $\vec{b}$ समान्तर हो तो $\vec{a}$ =..................................

vii) यदि a व b समान्तर हो तो $\vec{a} \times \vec{b}$ =..................................

viii) यदि $\vec{a} + \vec{b} = \vec{O}$ हो तो $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के बीच का कोण......................होगा।

ix) $l^2 + m^2 + n^2$ =.................................., जहाँ l, m, n किसी रेखा की दिक् कोज्यएँ हैं

x) यदि $\vec{a} = \vec{b}$ हो तो ये दोनो ....कहलाते है।

xi) $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ हो तो (x, y, z) सदिश r के.........................कहलाते है।

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

i) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए त्रिभुज असमिका लिखिए।

ii) सदिश $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश लिखिए।

iii) सदिश $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

iv) क्या दो सदिशों के योग के लिए क्रम-विनिमयता का पालन होता है ?

v) $3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}$ की दिशा में इकाई सदिश क्या होगा ?

vi) $\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \sqrt{15}\,\hat{k}$ का मापांक क्या है ?

vii) यदि $\overrightarrow{OP} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ हो तो सदिश OP की लंबाई क्या होगी।

viii) $\hat{\imath} \times (\hat{\jmath} \times \hat{k})$ का मान क्या है ?

ix) $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ की दिशा में इकाई सदिश होगा।

x) $a\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ व $3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ परस्पर लम्बवत हो तो a का मान होगा ।

xi) यदि $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ हो तो $\vec{a}.\vec{a}$ का मान क्या होगा।

xii) $6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ की दिक कोज्याऐं क्या होगी।

xiii) सदिश बीजगणित में विस्थापन किस प्रकार की राशि है।

प्रश्न क्रमांक 6 –

1) सदिशों के अदिश गुणनफल की परिभाषा दीजिये।

2) मात्रक सदिश की परिभाषा दीजिये।

3) सदिशों के सदिश गुणनफल की परिभाषा दीजिये।

4) x, y, z का मान ज्ञात करो यदि सदिश $\vec{a} = (x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})$ तथा $\vec{a} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k})$ समान सदिश है।

5) सिद्ध करो $\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

6) सिद्ध करो $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{k} \times \hat{\imath} = 0$

7) सिद्ध करो $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

8) सिद्ध करो $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$

9) सदिश $\vec{a} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k})$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात किजिये।

10) $(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k})$ मी दिक कोज्याऐं ज्ञात करो।

11) यदि $a = 1, b = 2$ तथा $a.b = 1$ हो तो इसके बीच का कोण ज्ञात करो।

12) यदि $\vec{a} = (\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 7\hat{k})$ तथा $\vec{a} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ हो तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान ज्ञात करो।

13) सदिशों के अदिश गुणनफल का क्रमविनिमय नियम सिद्ध करो। अर्थात $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

14) सिद्ध करो $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

15) यदि $\vec{a} = 5\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ हो तो सिद्ध करो कि $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ लंबवत है।

16) सदिश $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिये।

17) यदि $|\vec{a}| = 2$ हो $|\vec{b}| = 3$ तथा $\vec{a}.\vec{b} = 4$ हो तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ का मान ज्ञात करो।

18) $(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$ पर सदिश $(\hat{\imath} - \hat{\jmath})$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिये।

19) $(3\vec{a} - 5\vec{b}).(2\vec{a} + 7\vec{b})$ का मान ज्ञात करो।

20) यदि $\vec{a} = (2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k})$ और $\vec{b} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ हो तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान ज्ञात करों।

21) x, y और z के मान ज्ञात कीजिए यदि सदिश $\vec{a} = x\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + z\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + \hat{k}$ समान हैं।

22) सदिशों $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

23) दर्शाइए कि सदिश $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, और $-4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 8\hat{k}$ संरेख हैं।

24) सदिश $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, और $3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

25) दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

26) सदिश $-\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ की दिक् कोज्याऐं ज्ञात कीजिए।

27) सदिश $5\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात करो जिसका परिमाण 8 इकाई है।

28) X का मान ज्ञात करो यदि $X = (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ एक इकाई सदि है।

29) यदि $\vec{a} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ हो तो वेक्टर $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ के समान्तर मात्रक सदिश ज्ञात कीजिये।

30) दर्शाइये कि सदिश $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ अक्षों OX, OY तथा OZ के साथ बराबर झुका हुआ है।

31) दो बिन्दुओं P(2,3,4) तथा Q(4,1,-2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

32) दर्शाइये कि बिन्दु A, B और C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} = (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k})$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ और

33) $c^{\to} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ है, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षो का निर्माण करते है।

34) $i - 2j + 3k$ और $3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।

35) सदिश $\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ का सदिश $7\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिये।

36) दर्शाइये कि बिन्दु $A(1,2,7), B(2,6,3)$ और $C(3,10,-1)$ संरेख है।

37) दर्शाइये कि सदिश $2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ और $3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष की रचना करते हैं।

38) यदि $\vec{a} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

39) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजांए

40) $\vec{a} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, द्वारा दी गई हैं।

41) x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $x(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ एक मात्रक सदिश है।

42) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिन्दु $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ और $C(2,3,1)$ है।

43) सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत मात्रक सदिश ज्ञात करो जहां $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ एवं $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

44) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके शीर्ष बिन्दु $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ और $C(2,3,1)$ है।

45) λ और μ ज्ञात करों यदि $(2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 27\hat{k}) \times (\hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} + \mu\hat{k}) = 0$ हो ।

50) एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी संलग्न भुआए $\vec{a} = (\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k})$ तथा $\vec{b} = (2\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + \hat{k})$ द्वारा परिभाषित है।

51) यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, $\hat{\imath}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{\jmath}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ और $\hat{k}$ के साथ एक न्यूनकोण θ बनाता है तो θ का मान ज्ञात करों।

52) माना $\vec{a} = (a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k})$, $\vec{b} = (b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k})$ और $\vec{c} = (c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k})$ हो तब सिद्ध करो $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

53) माना $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$=4 , $|\vec{c}|$=5 और इनमें से प्रत्येक अन्य दो सदिशों के योगफल पर लंबवत है तो $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ का मान ज्ञात करों।

54) बिन्दुओं $P\ (\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k})$ और $Q\ (-\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को $2:1$ में (i) अंत: और (ii) बाहत: विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिये।

55) बताईये कि दिये गये तीनों सदिश मात्रक सदिश है तथा ये परस्पर एक दूसरे के लम्बवत है।

$\frac{1}{7}(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+6\hat{k})$, $\frac{1}{7}(3\hat{\imath}-6\hat{\jmath}+2\hat{k})$, $\frac{1}{7}(6\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k})$

56) यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

तब $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ का मान ज्ञात करों।

उत्तर :– (अध्याय 10)

प्रश्नक्रमांक–1 i) c ii) a iii) d iv) b v) c vi) b vii) d viii) c ix) c x) d xi) a xii) b xiii) a xiv) a xv) a xvi) c xvii) d xviii) d xix) b xx) b xxi) a xxii) c xxiii) d xxiv) b

प्रश्नक्रमांक–2 i) असत्य ii). सत्य iii). असत्य iv.) सत्य v) सत्य vi) सत्य vii) सत्य viii) सत्य ix). असत्य x). असत्य xi). सत्य xii). सत्य xiii). सत्य xiv). सत्य

प्रश्नक्रमांक–3 i) $|\vec{a}||\vec{b}|$ ii) 0 iii) $|\overrightarrow{ab}|$ iv) $\leq$ v) 0 vi) $\lambda\vec{b}$ vii) 0 viii) π ix) 1 x) समान सदिश xi) घटक

प्रश्नक्रमांक–4 $i)$ $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ ii) $\frac{\hat{\imath}+\hat{\jmath}+2\hat{k}}{\sqrt{6}}$ iii) $\sqrt{62}$ iv). हाँ v). $\frac{1}{5}(3\hat{\imath}+4\hat{\jmath})$ vi). 5 vii). $\sqrt{3}$ viii). 1 ix) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})$ x) 9 xi) 6 xii) $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{-3}{7}$ xii) सदिश

त्रि-विमीय ज्यामिति

स्मरणीय बिंदु :

- एक रेखा की दिक्-कोसाइन रेखा द्वारा निर्देशांक्षों की धन दिशा के साथ बनाए कोणों की कोसाइन होती है।
- यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन सएउएद l, m, n हैं
  तो $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली

  रेखा की दिक्-कोसाइन

  $\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ}$ हैं

  जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

- एक रेखा का दिक्-अनुपात वे संख्याएँ हैं जो रेखा की दिक्-कोसाइन के समानुपाती होती है

यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n और दिक्-अनुपात a, b, c हैं तो

- $l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $l = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

- विषमतलीय रेखाएँ अंतरिक्ष की वे रेखाएँ जो न तो समांतर हैं और न ही प्रतिच्छेदी हैं। यह रेखाएँ विभिन्न तलों में होती हैं।
- विषमतलीय रेखाओं के बीच का कोण वह कोण है जो एक किसी बिंदु वरीयता मूल बिंदु कीदध से विषमतलीय रेखाओं में से प्रत्येक समांतर खींची गई दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच में है।
- यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दिक्-कोसाइन वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ है तब
  $cos\,\theta = |l_1.l_2 + m_1.m_2 + n_1.n_2|$
- यदि a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दिक्-अनुपातों वाली वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ है तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2}\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2}}\right|$$

- एक ज्ञात बिंदु जिसकी स्थिति सदिश $\bar{a}$ है से गुजरने वाली और सदिश $\bar{b}$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण $\bar{r} = \bar{a} + \lambda\bar{b}$ है।
- बिंदु (x_1, y_1, z_1) से जाने वाली रेखा जिसकी दिक्-कोसाइन l, m, n हैं का समीकरण
  $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ है।
- दो बिंदुओं जिनके स्थिति सदिश $\bar{a}$ और $\bar{b}$ है से जाने वाली रेखा के समीकरण का सदिश समीकरण $\bar{r} = \bar{a} + \lambda\bar{b}$ है।
- दो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) से जाने वाली रेखा का कार्तीय समीकरण
  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ हैं।

- यदि दो रेखाओं $\bar{r} = \overline{a_1} + \lambda\,\overline{b_1}$ और $\bar{r} = \overline{a_2} + \lambda\,\overline{b_1}$ के बीच का न्यूनकोण θ है तो $cos\,\theta = \left|\frac{\overline{b_1}\,.\,\overline{b_2}}{|\overline{b_1}||\overline{b_2}|}\right|$
- यदि दो रेखाओं $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ और $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ के बीच का कोण θ है तब

  $cos\,\theta = |l_1.l_2 + m_1.m_2 + n_1.n_2|$

- दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी वह रेखाखंड है जो दोनों रेखाओं पर लंब हैं। दो रेखाओं $\bar{r} = \overline{a_1} + \lambda\,\overline{b_1}$ और $\overline{a_2} + \mu\,\overline{b_2}$ के बीच न्यूनतम दूरी

  $\left|\frac{(\overline{b_1} \times \overline{b_2}).(\overline{a_2} \times \overline{a_1})}{|\overline{b_1} \times b_2|}\right|$ है।

➢ दो रेखाओं $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ और $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ के बीच न्यूनतम दूरी :

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}}$$ है।

➢ दो समांतर रेखाओं $\bar{r} = \overline{a_1} + \lambda \bar{b}$ और $\bar{r} = \overline{a_2} + \mu \bar{b}$ के बीच की दूरी

$$\left|\frac{\bar{b} \times (\overline{a_2} - \overline{a_1})}{|\bar{b}|}\right|$$ है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न -

प्र.1 सही विकल्प चुनकर लिखिए -

(i) यदि रेखा के अक्षों पर प्रक्षेप 2, –1, 2 हो तो रेखा की लम्बाई है:

(a) 4 (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 3

(ii) एक बिन्दु जिस का स्थिति सदिश $\vec{a}$ है से $\vec{r}.\vec{n} = d$ से दूरी सदिश रूप में होगी:

(a) $|d - \vec{a}.\hat{n}|$ (b) $|\vec{r}.\vec{n} - d|$
(c) $|d.\hat{n} - \vec{r}|$ (d) $|\vec{a} - \vec{r}.d|$

(iii) घन के किन्ही दो विकर्णो के बीच कोण की कोज्या का मान होता है:

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{-1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

(iv) रेखाओं $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-1}$ तथा $\frac{x-4}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{2}$ के बीच का कोण

a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$ b) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ c) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{9}\right)$ d) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right)$

(v) अक्षों पर 2, 3, –4 अन्तः खण्ड काटने वाले समतल का समीकरण :

a) $6x + 4y - 3z = 0$ b) $6x + 4y - 3z = -12$
c) $6x + 4y - 3z = 12$ d) इनमे से कोई नहीं ।

(vi) बिंदु (x, y, z) की x- अक्ष से दूरी है :

a) $\sqrt{x^2 + y^2}$ b) $\sqrt{x^2 + z^2}$ c) $\sqrt{y^2 + z^2}$ d) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(vii) बिंदु $(2, 1, 4)$ की y- अक्ष से दूरी है :

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{30}$ d) 3

(viii) मूलबिंदु (0,0,0) के सापेक्ष P के निर्देशांक (3, 12, 4) है , तब OP की दिक् कोज्यायें :

a) 3, 12, 4 b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{13}, \frac{12}{13}, \frac{2}{13}$ d) $\frac{3}{13}, \frac{12}{13}, \frac{4}{13}$

(ix) एक रेखा अक्षों के साथ α, β, γ कोण बनाती है, तो $Sin^2\alpha + Sin^2\beta + Sin^2\gamma$ का मान है :

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(x) एक रेखा के दिक् अनुपात 1, 2, 3 हैं तो इसकी दिक् कोज्यायें होंगी :

a) $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$
c) $\sqrt{14}, \sqrt{14}, \sqrt{14}$ d) 1, 2, 3

(xi) एक रेखा x तथा y अक्ष के साथ 45^0 का कोण बनाती है। तब रेखा द्वारा z अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बना कोण :

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$

(xii) दो बिन्दुओं (4, 3, -5) तथा (-2, 1, -8) को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्यायें :

a) $\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ b) $\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ c) इनमे से कोई नहीं

प्रश्न-2 सत्य/असत्य लिखिए।

(i) वे राशियां जो किसी रेखा की दिशा कोज्याओं के समानुपाती होती है द्कि अनुपात कहलाती है

(ii) दो समान्तर रेखाओं की दिशा कोज्याएं समान होती है यदि उनकी अभिदिशा समान हो।

(iii) यदि $\cos\propto, cos\beta, cos\gamma$ किसी रेखा की दिक कोज्याएं हो तो

$Cos^2 \propto + Cos^2\beta + \ Cos^2\gamma = \frac{4}{3}$

(iv) एक रेखा अक्षों के साथ बराबर कोण बनाती है तो इसकी द्कि कोज्याएं भी समान होगी।

(v) दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच की दूरी सदैव शून्य होती है ।

(vi) बिन्दु (1, 0, 2) की x-अक्ष से दूरी 1 है ।

(vii) बिन्दु A(1, 2, 3), B(4, 0, 4) तथा C(-2, 4, 2) संरेख हैं ।

(viii) यदि एक रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n बिन्दु है तब $l^2 + m^2 + n^2 = 0$ होगा।

(ix) रेखाएँ जिनके दिक् अनुपात (3, 4, 5)और (4, .3, 5) हैं, के बीच का कोण 30^0 है।

(x) दो बिन्दुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है से जाने वाली रेखा के समीकरण का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{a} - \vec{b})$ हैं ।

प्रश्न 3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) रेखा का सदिश समीकरण..................है।

(ii) दो समान्तर रेखाओं के दिक अनुपात...........होते है।

(iii) दो समान्तर रेखाओं की दिक कोज्याएं ....होती है।

(iv) यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेदी हैं तब उनके बीच की न्यूनतम दूरी ....होगी ।

(v) सदिश $2i - 3j + 6k$ की दिक् कोज्याएँ ....होंगी ।

(vi) यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात 1,.1,1 तथा 1, 2,1 हैं । तब उनके बीच का कोण................होगा ।

(vii) बिन्दु (2, 3, 4) तथा (4, 5, 6) को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्याएँ............हैं।

(viii) घन के विकर्णों के बीच का कोण ....होता है ।

(ix) x –अक्ष की दिक् कोज्याएँ ....होती है ।

(x) सरल रेखाओं $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$ तथा $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ के बीच का कोण ....है ।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

(i) दो बिन्दुओं (0,0,0) एवं (a, b, c) को मिलने वाली रेखा के दिक अनुपात लिखिए

(ii) दो सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के बीच कोज्या का सूत्र लिखिए।

(iii) x, y व z अक्षों की दिक् कोज्याएँ क्या होगी?

(iv) एक रेखा की दिक् कोज्याएँ जो कि निर्देशांकों के साथ समान कोण बनाती है?

(v) बिन्दु (1, 2, 3) की x-अक्ष से दूरी ज्ञात करो ।

(vi) एक रेखा अक्षों के साथ α , β , γ कोण बनाती है तब $Sin^2\alpha + Sin^2\beta + Sin^2\gamma$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(vii) रेखाओं $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ तथा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

प्र.5 सही जोड़ी बनाइए -

कॉलम A	कॉलम B
1) रेखा की समीकरण का सदिश रूप	अ) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$
2) यदि दो रेखाएँ जिनके दिक् अनुपात a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 हैं तथा परस्पर लम्ब हैं ।	ब) $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$
3) किसी घन के विकर्णों के बीच का कोण	स) $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$
4) यदि दो रेखाएँ जिनके दिक् अनुपात a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 हैं तथा परस्पर समान्तर हैं	द) $a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 = 0$

प्रश्न क्रमांक 6 –

प्र.1 यदि एक रेखा के दिक् अनुपात 2, -1, .2 हैं तो इसकी दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए ।

प्र.2 बिन्दुओं (-2, 0, 4) और (6, 8, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।

प्र.3 x, y और z अक्षों की दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए ।

प्र.4 यदि रेखा x, y तथा z अक्षों के साथ क्रमशः 90^0 , 60^0 , 30^0 का कोण बनाती है तो दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए ।

प्र.5 एक रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक के साथ समान कोण बनाती है।

प्र.6 दो बिन्दुओं (-2,4,-5) और (1,2,3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए ।

प्र.7 सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ तथा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब है ।

प्र.8 p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब होंगे ।

प्र.9 बिन्दुओं (-1, 0, 2) और (3, 4, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश व कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए ।

प्र.10 तथा दो रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करने हेतु सूत्र सदिश रूप में लिखिए।

प्र.11 दर्शाइए कि बिन्दु $A(2, 3, 4)$, $B(1, -2, 3)$ और $C(3, 8, -11)$ संरेख हैं ।

प्र.12 बिन्दु (5, 2, -4) से जाने वाली तथा सदिश $3i + 2j - 8k$ के समांतर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए ।

प्र.13 एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ है । इस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।

प्र.14 दिए गए रेखाखण्ड -
$\vec{r} = (2i - 5j + k) + \lambda(3i + 2j + 6k)$ और $\vec{r} = (7i - 6k) + \mu(i + 2j + 2k)$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

प्र.15 दिए गए रेखाखण्ड $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ तथा $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

प्र.16 उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-2, 4, -5) से जाती है और $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समान्तर है ।

प्र.17 बिन्दु (1, 2, -4) से जाने वाली और दोनो रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

प्र.18 दर्शाइए कि बिन्दु (2,3,4),(-1,-2,1),(5,8,7) संरेख है।

प्र.19 बिन्दु (5,2,-4) से होकर जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्र.20 बिन्दुओं (-1,0,2) और (3,4,6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्र.21 रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{z} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए ।

प्र.22 रेखाओं $\vec{r} = (i + 2j + k) + \lambda(i - j + k)$ और $\vec{r} = (2i - j - k) + \mu(2i + j + 2k)$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए ।

प्र.23 रेखाएँ जिनके सदिश समीकरण

$\vec{r} = i + 2j - 4k + \lambda(2i + 3j + 6k)$ और

$\vec{r} = 3i + 3j - 5k + \mu(2i + 3j + 6k)$ हैं,

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए

प्र.24 एक रेखा एक घन के विकर्णों के साथ α,β,γ तथा δ कोण बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि $Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma + Cos^2\delta = \frac{4}{3}$

प्र.25 निम्नलिखित रेखा युग्म के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

i) $\vec{r} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k} + \lambda(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k})$ और $\vec{r} = 7\hat{\imath} - 6\hat{k} + \mu(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$

ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{18}$

उत्तर - (अध्याय-11)

प्र01– i) d (ii) b (iii) b (viii) d (ix) b (x) b (xi) a (xii) b

प्र02– (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य v) सत्य vi) असत्य vii) सत्य viii) असत्य ix) सत्य x) सत्य

प्र03– (ii) $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{a}$ (ii) अनुपातिक (iii) समान iv) शून्य v) $\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}$ vi) $\frac{\pi}{2}$

vii) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}},$ viii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ix) 1, 0, 0 x) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{5}\right)$

प्र04– (i) a, b, c (ii) $cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ (iii) (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) iv) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$ v) $\sqrt{13}$

vi) 2 (vii) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$

प्र.5 सही जोड़ी बनाइए : (i) स (ii) द (iii) अ (iv) ब

अध्याय-12
रैखिक प्रोग्रामन

स्मरणीय बिंदु

® एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या वह समस्या है जो कई चरों के रैखिक फलन के इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) को ज्ञात करने से संबंधित फलन को उद्देश्य फलन कहते हैं। जब प्रतिबंध यह हो कि चर ऋणेतर हों और रैखिक असमीकरणों (जिनको रैखिक व्यवरोध कहते हैं) को संतुष्ट करते हों। चरों को कभी-कभी निर्णायक चर कहते हैं और ऋणेतर हैं।

® कुछ महत्वपूर्ण रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ निम्नलिखित हैंः

(i) आहार संबंधी समस्या

(ii) उत्पादन संबंधी समस्या

(iii) परिवहन संबंधी समस्या

® सभी व्यवरोधों और ऋणेतर व्यवरोधों $x \geq 0, y \geq 0$ द्वारा निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्रए एक रेखीय प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत क्षेत्र (या हल समुच्चय) कहलाता है।

® सुसंगत क्षेत्र के अंतः भाग के तथा सीमांत बिंदु व्यवरोधों के सुसंगत हलों को प्रदर्शित करते हैं। सुसंगत क्षेत्र के बाह्य भाग के किसी भी बिंदु को असंगत हल कहते हैं।

® सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) एक देता है तो इसे इष्टतम हल कहते हैं।

® निम्नलिखित प्रमेय रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने के लिए आधरभूत महत्त्व के हैंः

प्रमेय 1: माना कि R एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए सुसंगत क्षेत्र (उत्तल बहुभुज) है और माना कि $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। जब Z एक इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) देता है जहाँ रैखिक असमीकरण चरों x और y द्वारा व्यवरोधों के रूप में वर्णित है तो यह इष्टतम मान सुसंगत क्षेत्र के एक कोनीय बिंदु (शीर्ष) पर होना ही चाहिए।

प्रमेय 2: माना कि R एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए सुसंगत क्षेत्र (उत्तल बहुभुज) है और माना कि $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। जब यदि R परिबध्द है तब उद्देश्य फलन, R में एक अधिकतम और एक न्यूनतम दोनों ही देता है और इनमें से प्रत्येक बिंदु R के कोनीय बिंदु (शीर्ष) पर स्थित होता है।

® यदि सुसंगत क्षेत्र अपरिबध्द है तब अधिकतम या न्यूनतम अस्तित्व में नहीं भी हो सकता है। तथापि यदि यह अस्तित्व में होता है तो R के कोनीय बिंदु पर स्थित होना चाहिए।

® कोनीय बिंदु विधि: एक रैखिक समस्या को हल करने के लिए यह विधि निम्न पदों में क्रियान्वित होती हैः

(1) रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सुसंगत क्षेत्र को ज्ञात कीजिए तथा इसके कोनीय बिंदु (शीर्षों) को ज्ञात कीजिए।

(2) प्रत्येक कोनीय बिंदु पर उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का मान ज्ञात कीजिए। मान लीजिए इन बिंदुओं पर अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः M तथा m हैं।

(3) यदि सुसंगत क्षेत्र परिबध्द है, तो M और m क्रमशः उद्देश्य फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मान हैं। यदि सुसंगत क्षेत्र अपरिबध्द है तब .

(i) उद्देश्य फलन का M अधिकतम मान है यदि $ax + by > M$ के द्वारा निर्धारित खुला अधर्ातल सुसंगत क्षेत्र के साथ कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं रखता है। अन्यथा उद्देश्य फलन का अधिकतम मान नहीं है।

(ii) उद्देश्य फलन का न्यूनतम मान m है यदि $ax + by < m$ द्वारा निर्धारित खुला अर्धतल और सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अन्यथा उद्देश्य फलन का कोई न्यूनतम मान नहीं है।

® यदि सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं का इष्टतम मान एक ही प्रकार का है अर्थात् दोनों वही अधिकतम या न्यूनतम मान प्रदान करते है तब इन दोनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के किसी भी बिंदु पर भी उसी प्रकार का इष्टतम हल है।

प्र.1 सही विकल्प चुनकर लिखिए -

(i) असमीकरण निकाय $2x + y \leq 10,\ x + 3y \leq 15,\ x, y \geq 0$ से निर्धारित सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु (0,0) (5,0) (3,4) और (0,5) है तो $z = px + qy$ जहाँ $p, q > 0, p, q$ के लिए निम्नलिखित में कौन सा प्रतिबंध उचित है ताकि z का अधिकतम (3,4) और (0,5) पर घटित होता है।

a). $p = q$ b) $p = 2q$ c) $= 3q$ d) $q = 3p$

(ii) उद्देष्य फलन $z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान निम्न में से किस कोनीय बिन्दु पर है

a) (0,10) b) (5,5) c) (15,15) d) (0,20) उद्देश्य फलन

(iii) $z = 4x + y$ का अधिकतम मान निम्न में से किस कोनीय बिन्दु पर है

a) (0,0) b) (30,0) c). (20,30) d) (0,50)

(iv) रैखिक प्रोग्रामन समस्या के उद्धेश्य फलन में चर होते हैं -

a) शून्य b) शून्य या धनात्मक c) ऋणात्मक d) शून्य या ऋणात्मक

(v) रेखीय व्यवरोधों के अन्तर्गत उद्धेश्य फलन का अधिकतम मान होता है -

a) सुसंगत क्षेत्र के केन्द्र पर b) (0, 0) पर

c) सुसंगत क्षेत्र के किसी भी शीर्ष पर d) (0, 0) से अधिकतम दूरी पर स्थित शीर्ष पर

(vi) उद्धेश्य फलन $z = 4x + y$ का अधिकतम मान निम्न मे से किस कोणीय बिन्दु पर है -

a) (0, 0) b) (30, 0) c) (20, 30) d) (0, 50)

(vii) उद्धेश्य फलन $z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान निम्न मे से किस कोणीय बिन्दु पर है -

a) (0, 0) b) (5, 5) c) (15, 15) d) (0, 20)

(viii) एक रेखीय प्रोग्रामन समस्या का उद्धेश्य फलन होता है:-

a) एक प्रतिबन्ध b) अनुकूलतम हल निकालने का रेखीय फलन

c) चरों के बीच संबंध d) इनमें से कोई नहीं

(ix) एक रेखीय प्रोग्रामन समस्या में निम्नलिखित में से कौन सा शब्द प्रयुक्त नहीं होता है -

a) फालतू चर b) उद्धेश्य फलन c) अवतल क्षेत्र d) सुसंगत हल

(x) उद्धेश्य फलन $z = 6x + 16y$ का न्यूनतम मान जबकि प्रतिबंध है $x \leq 40, y \geq 20$ $x, y \geq 0$ है

a) 240 b) 320 c) 0 d) इनमें से कोई नहीं

(xi) वह बिन्दु जिस पर $z = 3x + 2y$ का प्रतिबंधों $x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$ अधिकतम मान प्राप्त होता है, होगा -

a) (2, 0) b) (1.5, 2) c) (1.5, 0) d) (0, 0)

(xii) उद्धेश्य फलन $z = 11x + 7y$ का अधिकतम मान प्रतिबंधों $x \leq 3,\ y \leq 13,$ $y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ के अन्तर्गत होगा -

a) 0 b) 33 c) 47 d) 14

प्र.क्रमांक-2 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) रैखिक फलन $z = ax + by$ जबकि a, b अचर है जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण होना है एक............कहलाता है।

(ii) सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम मान देता है.........कहलाता है।

(iii) सुसंगत क्षेत्र प्रदत्त समस्या के लिए एक रैखिक प्रोग्राम समस्या के ऋणेत्तर व्यवरोध $x, y \geq 0$ सहित सभी व्यवरोधों एक नियत उभनिष्ठ क्षेत्र................ कहलाता है।

(iv) जिस फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान ज्ञात करना हो, वह.......... कहलाता है ।

(v) एक निश्चित क्रम में विशिष्ट चरणों में संपादित प्रक्रिया ....कहलाती है ।

(vi) यदि संभाव्य क्षेत्र रिक्त समुच्चय हो तो समस्या का............................होता है ।

(vii) उद्देश्य फलन के अधिकतम या न्यूनतम मान को............................कहते हैं ।

(viii) $y \leq 0$ का ग्राफ ....चतुर्थांश में स्थित है ।

(ix) असमिकाओं $x \geq 2$ और $y \geq 1$ का ग्राफ .... चतुर्थांश में स्थित होता है ।

(x) किसी रेखीय प्रोग्रामन समस्या के लिए संभाव्य क्षेत्र हमेंशा .... बहुभुज होता है ।

(xi) प्रतिबंधों को एक घातीय फलनों, रेखीय समीकरणों या असमीकरणों के द्वारा व्यक्त किया जाता है । अतः इन्हें ....कहते हैं ।

(xii) एक रेखीय प्रोग्रामन समस्या उद्धेष्य फलन हमेंशा ....होता है ।

(xiii) सही व्यवरोधों और ऋणेतर व्यवरोधों $x \geq 0, y \geq 0$ द्वारा निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्र, एक रेखीय प्रोग्रामन समस्या का ....कहलाता है ।

प्र.3 निम्न कथनों में सत्य/असत्य बताइए ।

(i) सुसंगत क्षेत्र के अंतःभाग के तथा सीमांत बिन्दु व्यवरोधों के सुसंगत हल को प्रदर्शित करते है।

(ii) सुसंगत क्षेत्र के बाह्य भाग के किसी भी बिन्दु को असंगत हल कहते कहते है।

(iii) जिस फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान ज्ञात करना होता है, उन्हें उद्देश्य फलन कहते हैं ।

(iv) किसी रेखीय प्रोग्रामन समस्या के लिए संभाव्य क्षेत्र हमेंशा रैखिक बहुभुज होता है

(v) यदि संभाव्य क्षेत्र रिक्त समुच्चय हो, तो समस्या का सीमाबद्ध हल होता है ।

(vi) किसी हल के संभाव्य होने का प्रतिबंध $x \geq 0, y \geq 0$ है ।

(vii) दी हुई समस्या के सभी प्रतिबंधों का पालन करने वाले चर राशियों के मान ग्राफीय

(viii) निरूपण के क्षेत्र से संबंधित होते हैं उस क्षेत्र को संभाव्य क्षेत्र कहते हैं ।

(ix) यदि शीर्ष बिन्दुओं वाले मानों से न्यूनतम या अधिकतम चुनना संभव न हो तो प्रश्न का असीमित हल होता है ।

(x) दो या दो से अधिक समीकरणों के निकाय को रेखीय असमीकरण निकाय कहते हैं ।

(xi) $y \geq 0$ का ग्राफ तृतीय व चतुर्थ चतुर्थांश में होगा ।

(xii) सुसंगत क्षेत्र के बाह्य भाग के किसी भी बिन्दु को असंगत हल कहते हैं ।

(xiii) किसी हल के संभाव्य होने का प्रतिबंध $x \geq 0, y \geq 0$ है ।

प्र.4 एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए ।

(i) उद्देश्य फलन के अधिकतम या न्यूनतम मान को क्या कहते हैं

(ii) यदि शीर्ष बिन्दुओं वाले मानों से न्यूनतम या अधिकतम मान चुनना सम्भव न हो, तो प्रश्न का हल कैसा होता है

(iii) एक निश्चित क्रम में विशिष्ट चरणों में सम्पादित प्रक्रिया को क्या कहते हैं

(iv) चर राशियों के मानो के उस समुच्चय को जो सभी प्रतिबन्धों का पालन करे वह समस्या का कैसा हल कहलाता है ?

(v) $x \geq 0$ को ग्राफ के रूप में प्रदर्शित कीजिए ।

प्र.5 निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

$x + y \geq 8$
$3x + 5y \leq 15$
$x \geq 0,\ y \geq 0,$

प्र.6 निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत $= 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

$x + y \leq 4, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,$

प्र.7 निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण एवं अधिकतमीकरण कीजिए।

$x + 2y \leq 120, \quad x + y \geq 60,\ x - 2y \geq 0,\ x, y \geq 0,$

प्र.8 आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = -50x + 20y$ का न्यूनतमान निम्न व्यवरोधो के अंतर्गत ज्ञात कीजिए।

$2x - y \geq -5$, $3x + y \geq 3$,
$2x - 3y \leq 12$, $x \geq 0, y \geq 0$,

प्र.9 आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = -x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

$x \geq 3$, $x + y \geq 5$, $x + 2y \geq 6$, $y \geq 0$,

प्र.10 असमीकरण $3x + 2y \leq 6$ का ग्राफ खींचिए ।

प्र.11 $z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि यह

$x + y \leq 4$, $x \geq 0, y \geq 0$ द्वारा प्रतिबंधित है ।

प्र.12 निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z = -3x + 4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिएः

$x + 2y \leq 8$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

प्र.13 निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिएः

$x + 2y \leq 10$, $3x + y \leq 15$, $x, y \geq 0$

प्र.14 निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z = x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिएः

$x - y \leq -1$, $-x + y \leq 0$, $x, y \geq 0$

प्र.15 $z = 5x + 10y$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जबकि प्रतिबंध है :
$x + 2y \leq 120$, $x + y \geq 60$, $x - 2y \geq 0$, $x, y \geq 0$

उत्तर (अध्याय-12)

प्रश्न क्र. 01– (i) d (ii) b (iii) b (iv) b (v) d (vi) b (vii) (viii) b

(ix) a (x) b (xi) a (xii) c

प्रश्न क्र. 02– (i) रैखिक उद्देश्य फलन (ii) इष्टतम हल (iii) सुसंगत क्षेत्र – iv) उद्धेश्य फलन

v) प्रोग्रामिंग vi) कोई हल नहीं vii) इष्टतम मान viii) द्वितीय तथा तृतीय ix) प्रथम

x) उत्तल xi) व्यवरोध xi) रेखीय xiii) सुसंगत क्षेत्र

प्रश्न क्र. 02– (i) सत्य (ii) सत्य iii) सत्य iv) असत्य v) असत्य vi) सत्य vii) सत्य viii) सत्य ix) असत्य x) सत्य xi) सत्य xii) सत्य

अध्याय-13
प्रायिकता

स्मरणीय बिंदु :

इस अध्याय के मुख्य बिंदु निम्न प्रकार से हैं

® घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता जब कि घटना F दी गई है,
निम्न प्रकार से ज्ञात की जाती है

$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$, $P\,(\,F\,)\ \neq\ 0$

$0\ \leq\ P\,(E|F)\ \leq\ 1,$ $\quad P\,(E'|\,F)\ =\ 1 - P\,(E|F)$

$P\,(E \cup F|G)\ =\ P\,(E|G)\ +\ P\,(F|G) - P\,(E \cap F|G)$

$P\,(E \cap F)\ =\ P(E)\,P\,(F|E), P\,(E)\ \neq\ 0$ या

$P\,(E \cap F)\ =\ P(F)\,(E|F), P\,(F)\ \neq\ 0$

® यदि E और F स्वतंत्रा घटनाएँ हैं तो $P\,(E \cap F)\ =\ P\,(E)\,P\,(F)$

और $P\,(E|F) =\ P\,(E), P\,(\,F\,) \neq\ 0$

$P\,(F|E)\ =\ P\,(F), P(E)\ \neq\ 0$

® संपूर्ण प्रायिकता की प्रमेयः मान लें $\{E_1\,, E_2\,, \dots E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है और $E_1\,, E_2\,, \dots E_n$ में प्रत्येक की प्रायिकता शून्येत्तर है। साथ ही और A एक शून्येतर प्रायिकता की घटना है तब प्रतिदर्श समष्टि से संबधित एक घटना है, तब $P(A)\ =\ P(E_1)\,P\,(A|E_1\,)\ +\ P\,(E_2)\,P\,(A|E_2\,) + \dots + P\,(E_n\,)\,P(A|E_n\,)$

® **बेज-प्रमेयः** यदि $E_1\,, E_2\,, \dots E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती हैं अर्थात् $E_1\,, E_2\,, \dots E_n$ युग्मतः असंयुक्त हैं और $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n\ =\ S$ और A एक शून्येतर प्रायिकता की घटना है तब

$$P\,(E_i|A) = \frac{P(E_i)\,P(A|E_i\,)}{\sum_{j=0}^{n} P(E_j)\,P(A|E_i\,)}$$

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये

(i) यदि A और B दो घटनाएं इस प्रकार है कि P(A/B) = P(B/A) $\neq 0$ तब:

a) $A \subset B$ b) A = B c) $A \cap B = \emptyset$ d) P(A)= P(B)

(ii) यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$ तब P(A/B) है :

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) परिभाषित नहीं d) 1

(iii) एक पांसे का जोडा़ उछाला जाता है तो प्रत्येक पांसे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता निम्न में से क्या है ?

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{36}$

(iv) दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते है यदिः

a) A और B परस्पर अपवर्जी हैं b) $P(A'B') =\ [1 - P(A)]\,[1 - P(B)]$

c) $P(A) = P(B)$ d) $P(A) + P(B) = 1$

(v) दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते है यदिः

a) $A \subset B$ b) $B \subset A$ c) $B = \emptyset$ d) $A = \emptyset$

(vi) दो $P(A/B) > P(A)$ तब निम्न में से कौन सही है :

a) $P(B/A) < P(B)$ b) $P(B/A) > P(B)$
c) $P(A \cap B) < P(A).P(B)$ d) $P(B/A) = P(B)$

(vii) यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि $P(A) + P(B) -$ P(A और B) = $P(A)$ तब

a) $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ b) $P\left(\frac{A}{B}\right) = 1$
c) $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0$ d) $P\left(\frac{A}{B}\right) = 0$

(viii) तीन सिक्के एक साथ उछालने पर घटना "न्यूनतम दो चित्त प्राप्त होना" की प्रायिकता होगी:

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

(ix) तीन सिक्के एक साथ उछालने पर घटना "पहले सिक्के पर पटट प्रदर्शित होना" की प्रायिकता होगी:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{8}$

(x) किसी यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित दो घटनाएं E व F हैं। तब E की प्रायिकता जबकि F घटित हो चुकी हो का संकेत होगाः

(a) $P(\frac{E}{F})$ (b) $P(\frac{F}{E})$

(c) $P(FE)$ (d) $P(F + E)$

(xi) यदि E और F इस प्रकार की घटनाएं हैं कि $P(E) = 0.6$ और $P(F) = 0.3$

$P(E \cap F) = 0.2$ हो तो $P\left(\frac{E}{F}\right)$ का मान होगाः

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{2}{5}$

(xii) यदि A और B इस प्रकार की घटनाएं हैं कि $P(A) = \frac{6}{11}$ और $P(B) = \frac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ हो तो $P(A \cap B)$ का मान होगाः

(a) $\frac{1}{11}$ (b) $\frac{2}{11}$ (c) $\frac{3}{11}$ (d) $\frac{4}{11}$

(xiii) यदि E और F किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएं हैं. तो E और F स्वतंत्र घटनाएं होती हैं, यदि

(a) $P(E \cap F) = P(E).P(F)$ (b) $P(E \cup F) = P(E).P(F)$

(c) $P(E \cap F) = \frac{P(E)}{P(F)}$ (d) $P(E \cap F) = \frac{P(F)}{P(E)}$

(xiv) यदि A और B ऐसी घटनाएं हैं, कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$ तो निम्न में से कौन सा सही हैः

(a) $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (b) $P\left(\frac{A}{B}\right) < P(A)$
(c) $P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$ (d) $P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(B)$

(xv) A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित्त प्रदर्शित हुआ है। वास्तविक रुप से चित्त प्रकट होने की प्रायिकता है:

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

प्रश्न-2 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएं है तो $P(A \cap B) =$......................

(ii) यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएं है तो $P(AUB) =$......................

(iii) यदि किसी एक घटना के घटित होने की सूचना दूसरी घटना के घटित होने पर कोई प्रभाव नहीं डालती है तो ऐसी घटनाएं ....कहलाती है।

(iv) एक पांसे को उछालने पर विषम अंक आने की प्रायिकता..................होगी।

(v) यदि $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ हो और A तथा B स्वतंत्र घटनाएं हैं तो $P(A \cap B)$ का मान .... होगा।

(vi) 52 ताश की गडडी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए। दोनो पत्तों के काले रंग के होने की प्रायिकता .... होगी।

(vii) बेज़ प्रमेय के अनुप्रयोग में घटनाओं को .... कहते हैं।

(viii) इस प्रकार के परीक्षण, जिनके केवल दो परिणाम होते हैं, जो प्रायः 'सफलता' या 'असफलता' कहलाते हैं .... परीक्षण कहलाते हैं।

प्रश्न क्रमांक-3 एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

(i) यदि E और F किसी यादृच्छिक परीक्षण की दो स्वतंत्र घटनाएं है तो $P(E \cap F)$ बराबर ?

(ii) यदि E और F एक प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएं हैं तथा $P(E/F)$ तथा $P(E/F)$ दो सप्रतिबंध प्रायिकाताएँ हैं तो $P(E \cap F) = P(E).P(F/E) = P(F).P(E/F)$ इस नियम को क्या कहते हैं ?

(iii) दो घटनाएं E और F को क्या कहेंगे यदि $P(E \cap F) \neq P(E).P(F)$

(iv) $P(A/B)$ का मान क्या होगा यदि $P(B)=0.5$ और $P(A \cap B) = 0.32$

(v) तीन न्याय (Fair) सिक्कों को उछालने के परीक्षण की प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(vi) तीन पांसे एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या कितनी होगी ?

(vii) एक पांसे को दो बार उछाला गया। घटना "योगफल 6 प्राप्त होना" के अनुकूल परिणामों को लिखिए।

(viii) दो पांसों को उछालने पर घटना " तीसरी उछाल पर अंक 4 प्रकट होना" के अनुकूल परिणामों को लिखिए।

(ix) तीन पांसों को उछालने पर घटना "पहली उछाल पर अंक 6 और दूसरी उछाल पर अंक संख्या "5 प्रकट होना" के अनुकूल परिणामों को लिखिए।

(x) एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है। घटना "तीसरी उछाल पर चित्त प्राप्त होना" के अनुकूल परिणामों को लिखिए।

(xi) एक पांसे को उछाला जाता है। घटना "पांसे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है" को E से तथा घटना "पांसे पर प्राप्त संख्या सम है" को F से प्रदर्शित किया जाता है। क्या घटनाएं E व F स्वतंत्र हैं?

(xii) एक पांसे को उछाला जाता है। घटना "पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना" को E से तथा घटना "दूसरी उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना" को F से प्रदर्शित किया जाता है। क्या घटनाएं E व F स्वतंत्र हैं?

(xiii) तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर अधिकतम दो पटट प्राप्त होने की घटना से संबंधित परिणामों को लिखिए।

प्रश्न क्रमांक-4 सत्य/असत्य लिखिए।

(i) दो घटनाओं E और F को परस्पर स्वतंत्र घटनाएं कहते है यदि $P(E\cap F) = P(E).P(F)$

(ii) यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएं हो तो $P(AUB) = P(A).P(B)$

(iii) यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएं हो तो $P(AUB) = P(A) + P(B)$

(iv) जब किसी एक घटना के घटित होने की सूचना दूसरी घटना की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नही डालती तब इस प्रकार की घटनाओं को स्वतंत्र घटनाएं कहते हैं।

(v) यदि E और F दो परस्पर अपवर्जी घटनाएं हों तब $P(E\cap F) = 1$

(vi) यदि E और F प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएं हों तब $P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{n(E\cap F)}{n(F)}$

(vii) यदि E और F प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएं हों तब $P(S/F) = 0$

(viii) घटना F के दिए जाने पर घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता को $P(F/E)$ द्वारा दर्शाया जाता है।

(ix) $P(E\cap F)$ को $P(EF)$ भी लिखते हैं।

(x) यदि $P(B) \neq 0$ तो $P(A/B)$ परिभाषित नही होता।

(xi) यदि दो ऐसी घटनाएं घटती हैं जिनकी प्रायिकता शून्येत्तर हैं. तो वे परस्पर अपवर्जी नही हो सकतीं।

(xii) यदि दो घटनाएं E व F स्वतंत्र हैं तो E' व F' भी स्वतंत्र होंगी।

प्रश्न 5. सही जोड़ी मिलाइए:

कॉलम **A**	कॉलम **B**
(i) $P\left(\frac{E}{F}\right)$	(अ) 0
(ii) $P(E\cup F)$	(ब) $\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$
(iii) यदि E और F दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों तो $P(E\cap F)$	(स) $P(E) + P(F) - P(E\cap F)$
(iv) यदि E और F स्वतंत्र घटनाएँ हों तो $P(E\cap F)$	(द) $1 - P(\frac{E}{F})$
(v) $P(\frac{E'}{F})$	(इ) $P(E).P(F)$

प्रश्न क्रमांक-6

1. एक पाठशाला में 1000 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 430 लड़कियां हैं। यह ज्ञात है कि 430 में से 10 प्रतिशत लड़कियां कक्षा 12 में पढ़ती हैं। क्या प्रायिकता है कि एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा 12 में वढ़ता है यदि यह ज्ञात है कि चुना गया विद्यार्थी लड़की है।
2. यदि $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.4$ तो $P(A\cup B)$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. स्वतंत्र घटनाओं की परिभाषा लिखिए।
4. मान लो E और F दो घटनाएं इस प्रकार है कि $P(E) = \frac{3}{5}, P(F) = \frac{3}{10}$ और $P(E\cap F) = \frac{1}{5}$ तब क्या घटनाएं E और F स्वतंत्र हैं?
5. संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय को लिखिए।
6. बेज़ प्रमेय को लिखिए।

7. 12 एक सिक्के की दो उछालों में चित्तों की संख्या का प्रायिकता बंटन तैया कीजिए।
8. एक अनभिनत पांसे को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का प्रायिकता बंटन तैयार कीजिए।
9. एक दंपति के दो बच्चे हैं। दोनो बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि

10. यह ज्ञात है कि दोनों बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है।

11. A और B इस प्रकार की घटनाएं हैं कि $P(A) \neq 0$ तो $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात कीजिए
यदि $A \cap B = \emptyset$

12. सिद्ध कीजिए $P(\frac{E'}{F}) = 1 - P(\frac{E}{F})$

13. एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक
बच्चा लड़का है, तो दोनो बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है

14. एक पांसे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

15. यह दिया गया है कि दो पांसों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएं भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं हैं तो A या B में से एक के होने की
प्रायिकता $= 1 - P(A')P(B')$

17. एक पांसे को तीन बार उछाला जाता है तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होन की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

18. A और B स्वतंत्र घटनाएं दी गयी हैं जहां $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$ तो P(A और B में से कोई नही) का मान ज्ञात कीजिए।

19. यदि $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5$, और $P(B/A) = 0.4$ तो निम्न ज्ञात कीजिए: a). $P(A \cap B)$ b). $P(A/B)$ c). $P(A \cup B)$

20. $P(AUB)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A/B) = \frac{2}{5}$

21. एक पाँसे को दो बार उछाला गया है और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

22. एक पांसे को दो बार उछाला गया घटना पांसे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है को E से तथा पासे पर प्राप्त संख्या सम है को F से निरूपति किया जाए तो क्या E और F घटनांए स्वतंत्र है।

23. एक विशेष समस्या को A और B स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः
$\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है। यदि दोनो स्वतंत्र रूप से हल करने का प्रयास करते हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि समस्या हल हो जाती है।

24. 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन किए दो पत्ते निकाले गए दोनो पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

25. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पत्तें बिना प्रतिस्थापित किए निकाले गए पहले दो पत्ते बादशाह और तीसरे का इक्का होने की
क्या प्रायिकता है ?

26. एक छात्रावास में 60 प्रतिशत विद्यार्थी हिन्दी काए 40 प्रतिशत विद्यार्थी अंग्रेज़ी का और 20 प्रतिशत विद्यार्थी दोनो अख़बार पढ़ते हैं। एक छात्रा को यादृच्छया चुना जाता है।
(a) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और नही अंग्रेज़ी का अख़बार पढ़ती है।
(b) यदि वह हिन्दी का अख़बार पढ़ती है तो उसके अंग्रेज़ी का अख़बार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
(c) यदि वह अंग्रेज़ी का अख़बार पढ़ती है तो उसके हिन्दी का अख़बार भी पढ़ने की
प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

27. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न 500 बहुविकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहुविकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाता है तो एक आसान प्रश्न के बहुविकल्पीय होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

28. दो गेंद एक बॉक्स से बिना प्रतिस्थापित किए निकाली जाती हैं। बॉक्स में 10 काली और 8 लाल गेंद है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए -
(a) दोनों गेंदें लाल हों। (b) प्रथम काली और दूसरी लाल हो (c) एक काली और दूसरी लाल हो।

29. एक विशेष समस्या को A तथा B द्वारा स्वतंत्र रुप से हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रुप से समस्या हल करने का प्रयास करते हैं तोए प्रायिकता ज्ञात कीजिए
(a) समस्या हल हो जाती है। (b) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

30. यह ज्ञात है कि एक महाविद्यालय के छात्रों में से 60 प्रतिशत छात्रावास में रहते हैं और 40 प्रतिशत छात्रावास में नही रहते है। पूर्ववर्ती वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में 30 प्रतिशत और छात्रावास में न रहने वालों में से 20 प्रतिशत छात्रों ने A ग्रेड लिया। वर्ष के अन्त में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A ग्रेड मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास में रहने वाला है।

31. एक बहुविकल्पीय प्रश्न का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। मान लें कि उसके उत्तर जानने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है और अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। मान लें कि छात्र के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई छात्र प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है।

32. एक बीमा कंपनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएं क्रमशः 0.01 , 0.03 और 0.15 हैं। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

33. एक न्याय्य सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चितों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।

34. मान लीजिए दो पांसों को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं के योग को X से व्यक्त किया गया है। X का प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

35. बरनौली प्रमेय से संबंधित शर्ते लिखिए।

36. पांसों के एक जोड़े को चार बार उछाला जाता है। यदि “पांसों पर प्राप्त अंकों का द्विक होना“ एक सफलता मानी जाती है, तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

37. 52 ताश की एक भली-भांति फेंटी गयी गडडी में से 5 पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापन सहित निकाले जाते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि
(a) सभी पांच पत्ते हुकुम के हों
(b) केवल तीन पत्ते हुकुम के हों
(c) एक भी पत्ता हुकुम का नही हो

38. एक पांसे को 7 बार उछालने पर तथ्यतः दो बार 5 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

39. एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगाकर चार या अधिक अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा ?

40. दर्शाइए यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं है तो A या B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता $= 1 - P(A').P(B')$

41. एक पांसे को तीन बार उछाला जाता है तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

42. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं दी गई है जहां $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$ तो निम्न को ज्ञात कीजिए।
a) $P($A और $B)$
b) $P($A और B नहीं$)$
c) $P($A या $B)$
d) $P($A और B में कोई भी नहीं$)$

उत्तर– (अध्याय–13)

प्रश्नक्र.–1– (i) d (ii) c (iii) d (iv) b (v) a (vi) c (vii) b (viii) c (ix) a (x) a

(xi) b (xii) d (xiii) a (xiv) c (xv) a

प्रश्नक्र.–2

(i) 0
(ii) P(A)+P(B)
(iii) स्वतंत्र घटनााएं
(iv) 1／2
(v) $\frac{3}{25}$
(vi) $\frac{25}{102}$
(vii) परिकल्पनाएं
(viii) 1

प्रश्नकं.–3

(i) P(E).P(F)
(ii) प्रायिकता का गुणन नियम
(iii) पराश्रित
(iv) 0.64
(v) (HHH),(HHT),(HTH),(THH),(HTT),(THT),(TTH),(TTT)
(vi) 216
(vii) (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)
(viii) (1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)
(ix) (6,1,5),(6,2,5),(6,3,5),(6,4,5),(6,6,5)
(x) (TTH),(THH),(HTH),(HHH)
(xi) हाँ
(xii) हाँ
(xiii) (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)
(xiv) (TTH),(THT),(HTT),(THH),(HTH),(HHT)

प्रश्नकं.–4

(i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) असत्य
(x) सत्य (xi) सत्य (xii) असत्य (xiii) सत्य

प्रश्नकं.–5

कॉलम A	कॉलम B
(i) $P\left(\frac{E}{F}\right)$	(ब) $\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$
(ii) $P(E \cup F)$	(स) $P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
(iii) यदि E और F दो परस्पर अपवर्जी घटनाएं हों तब $P(E \cap F)$	(अ) 0
(iv) यदि E और F स्वतंत्र घटनाएं हों तब $P(E \cap F)$	(इ) $P(E), P(F)$
(v) $P(\frac{E'}{F})$	(द) $1 - P(\frac{E}{F})$