CONTENTS

PERMUTATION & COMBINATION

JEE (ADVANCED) SYLLABUS

Permutation and Combination

JEE (MAIN) SYLLABUS

Fundamental principle of counting, permutation as an arrangement and combination as selection, Meaning of P (n,r) and C (n,r), simple applications.

PERMUTATION AND COMBINATION

There can never be surprises in logic...Wittgenstein, Ludwig

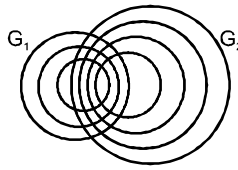
The most fundamental application of mathematics is counting. There are many natural methods used for counting

This chapter is dealing with various known techniques those are much faster than the usual counting methods.

We mainly focus, our methods, on counting the number of arrangements (Permutations) and the number of selections (combinations), even although we may use these techniques for counting in some other situations also .

Let us start with a simple problem

A group G_1 of 3 circles C_1, C_2, C_3 having different centers are situated in such a way that C_2 lie entirely inside C_1 ; C_3 lie entirely inside C_2. Another group G_2 of 4 circles C_1', C_2', C_3', C_4' are also situated in a similar fashion. The two groups of circles are in such a way that each member of G_1 intersect with every member of G_2, as shown in the following figure



(i) How many centres the circles altogether has ?
(ii) How many common chords are obtained ?

The answer to the first part is "3 + 4 = 7" and answer to the second part is "3 × 4 = 12" . The method in which we calculated first part of the problem is called as "addition rule" and the method we used to calculate its second part is called as the "multiplication rule". These rules altogether are the most important tools in counting, popularly known as "the fundamental counting principle".

Fundamental counting principle :

Suppose that an operation O_1 can be done in m different ways and another operation O_2 can be done in n different ways.

(i) **Addition rule :** The number of ways in which we can do exactly one of the operations O_1, O_2 is m + n

(ii) **Multiplication rule :** The number of ways in which we can do both the operations O_1, O_2 is mn.

Note : The addition rule is true only when O_1 & O_2 are mutually exclusive and multiplication rule is true only when O_1 & O_2 are independent (The reader will understand the concepts of mutual exclusiveness and independence, in the due course)

Example # 1 : There are 8 buses running from Kota to Jaipur and 10 buses running from Jaipur to Delhi. In how many ways a person can travel from Kota to Delhi via Jaipur by bus?

Solution : Let E_1 be the event of travelling from Kota to Jaipur & E_2 be the event of travelling from Jaipur to
Delhi by the person.
E_1 can happen in 8 ways and E_2 can happen in 10 ways.
Since both the events E_1 and E_2 are to be happened in order, simultaneously,
the number of ways = 8 × 10 = 80.

Example # 2 : How many numbers between 10 and 10,000 can be formed by using the digits 1, 2, 3, 4, 5 if
(i) No digit is repeated in any number. (ii) Digits can be repeated.

Solution : (i) Number of two digit numbers = 5 × 4 = 20
Number of three digit numbers = 5 × 4 × 3 = 60
Number of four digit numbers = 5 × 4 × 3 × 2 = 120
Total = 200

(ii) Number of two digit numbers = 5 × 5 = 25

Number of three digit numbers = 5 × 5 × 5 = 125
Number of four digit numbers = 5 × 5 × 5 × 5 = 625
Total = 775

Self Practice Problems :

(1) How many 4 digit numbers are there, without repetition of digits, if each number is divisible by 5 ?

(2) Using 6 different flags, how many different signals can be made by using atleast three flags, arranging one above the other?

Ans. (1) 952 (2) 1920

Arrangements :

If ^nP_r denotes the number of permutations (arrangements) of n different things, taking r at a time, then

$$^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2).....\,(n-r+1) = \frac{n\,!}{(n-r)!}$$

NOTE : (i) Factorials of negative integers are not defined.
(ii) $0\,! = 1\,! = 1$
(iii) $^nP_n = n\,! = n.\,(n-1)\,!$
(iv) $(2n)\,! = 2^n.\, n\,!\,[1.\,3.\,5.\,7...\,(2n-1)]$

Example # 3 : How many three digit can be formed using the digits 1, 2, 3, 4, 5, without repetition of digits? How many of these are even?

Solution : Three places are to be filled with 5 different objects.

∴ Number of ways = $^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

For the 2nd part, unit digit can be filled in two ways & the remaining two digits can be filled in $^4P_2$ ways.

∴ Number of even numbers = $2 \times {}^4P_2 = 24$.

Example # 4 : If all the letters of the word 'QUEST' are arranged in all possible ways and put in dictionary order, then find the rank of the given word.

Solution : Number of words beginning with E = $^4P_4 = 24$
Number of words beginning with QE = $^3P_3 = 6$
Number of words beginning with QS = 6
Number of words beginning withQT = 6.
Next word is 'QUEST'
∴ its rank is 24 + 6 + 6 + 6 + 1 = 43.

Self Practice Problems :

(3) Find the sum of all four digit numbers (without repetition of digits) formed using the digits 1, 2, 3, 4, 5.

(4) Find 'n', if $^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$.

(5) Six horses take part in a race. In how many ways can these horses come in the first, second and third place, if a particular horse is among the three winners (Assume No Ties)?

(6) Find the sum of all three digit numbers those can be formed by using the digits. 0, 1, 2, 3, 4.

Ans. (3) 399960 (4) 9 (5) 60 (6) 27200

Result : Let there be 'n' types of objects, with each type containing atleast r objects. Then the number of ways of arranging r objects in a row is n^r.

Example # 5 : How many 3 digit numbers can be formed by using the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5. In how many of these we have atleast one digit repeated?

Solution : We have to fill three places using 6 objects (repetition allowed), 0 cannot be at 100th place.

The number of numbers = 180. $\overset{5}{\square}\,\overset{6}{\square}\,\overset{6}{\square}$

Number of numbers in which no digit is repeated = 100 $\overset{5}{\square}\,\overset{5}{\square}\,\overset{4}{\square}$

∴ Number of numbers in which atleast one digit is repeated = 180 – 100 = 80

Example # 6 : How many functions can be defined from a set A containing 5 elements to a set B having 3 elements? How many of these are surjective functions?

Solution : Image of each element of A can be taken in 3 ways.

$\therefore$ Number of functions from A to B = 3^5 = 243.

Number of into functions from A to B = $2^5 + 2^5 + 2^5 - 3$ = 93.

$\therefore$ Number of onto functions = 150.

Self Practice Problems :

(7) How many functions can be defined from a set A containing 4 elements to a set B containing 5 elements? How many of these are injective functions?

(8) In how many ways 5 persons can enter into a auditorium having 4 entries?

Ans. (7) 625, 120 (8) 1024.

Combination :

If ${}^nC_r$ denotes the number of combinations (selections) of n different things taken r at a time, then

${}^nC_r = \dfrac{n\,!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{{}^nP_r}{r!}$ where $r \le n$; $n \in N$ and $r \in W$.

NOTE : (i) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(ii) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

(iii) ${}^nC_r = 0$ if $r \notin \{0, 1, 2, 3........, n\}$

Example # 7 : There are fifteen players for a cricket match.

(i) In how many ways the 11 players can be selected?

(ii) In how many ways the 11 players can be selected including a particular player?

(iii) In how many ways the 11 players can be selected excluding two particular players?

Solution : (i) 11 players are to be selected from 15

Number of ways = ${}^{15}C_{11}$ = 1365.

(ii) Since one player is already included, we have to select 10 from the remaining 14

Number of ways = ${}^{14}C_{10}$ = 1001.

(iii) Since two players are to be excluded, we have to select 11 from the remaining 13.

Number of ways = ${}^{13}C_{11}$ = 78.

Example # 8 : If ${}^{49}C_{3r-2} = {}^{49}C_{2r+1}$, find 'r'.

Solution : ${}^nC_r = {}^nC_s$ if either r = s or r + s = n.

Thus $3r - 2 = 2r + 1 \Rightarrow r = 3$

or $3r - 2 + 2r + 1 = 49 \Rightarrow 5r - 1 = 49 \Rightarrow r = 10$

$\therefore$ r = 3, 10

Example # 9 : A regular polygon has 20 sides. How many triangles can be drawn by using the vertices, but not using the sides?

Solution : The first vertex can be selected in 20 ways. The remaining two are to be selected from 17 vertices so that they are not consecutive. This can be done in ${}^{17}C_2 - 16$ ways.

$\therefore$ The total number of ways = $20 \times ({}^{17}C_2 - 16)$

But in this method, each selection is repeated thrice.

$\therefore$ Number of triangles = $\dfrac{20 \times ({}^{17}C_2 - 16)}{3}$ = 800.

Example # 10 : 15 persons are sitting in a row. In how many ways we can select three of them if adjacent persons are not selected ?

Solution : Let $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}$ be the persons sitting in this order.

If three are selected (non consecutive) then 12 are left out.

Let P,P,P,P,P,P,P,P,P,P,P,P be the left out & q, q, q be the selected. The number of ways in which these 3 q's can be placed into the 13 positions between the P's (including extremes) is the number ways of required selection.

Thus number of ways = ${}^{13}C_3$ = 286.

Example # 11 : In how many ways we can select 4 letters from the letters of the word MISSISSIPPI?

Solution : M

I I I I

SSSS

PP

Number of ways of selecting 4 alike letters = ${}^2C_1 = 2$.

Number of ways of selecting 3 alike and 1 different letters = ${}^2C_1 \times {}^3C_1 = 6$

Number of ways of selecting 2 alike and 2 alike letters = ${}^3C_2 = 3$

Number of ways of selecting 2 alike & 2 different = ${}^3C_1 \times {}^3C_2 = 9$

Number of ways of selecting 4 different = ${}^4C_4 = 1$

Total number of ways = 2 + 6 + 3 + 9 + 1 = 21

Self Practice Problems :

(9) In how many ways 7 persons can be selected from among 5 Indian, 4 British & 2 Chinese, if atleast two are to be selected from each country ?

(10) Find a number of different seven digit numbers that can be written using only three digits 1,2&3 under the condition that the digit 2 occurs exactly twice in each number ?

(11) In how many ways 6 boys & 6 girls can sit at a round table so that girls & boys sit alternate?

(12) In how many ways 4 persons can occupy 10 chairs in a row, if no two sit on adjacent chairs?

(13) In how many ways we can select 3 letters of the word PROPORTION ?

Ans. (9) 100 (10) 672 (11) 86400 (12) 840 (13) 36

Arrangement of n things, those are not all different :

The number of permutations of 'n' things, taken all at a time, when 'p' of them are same & of one type, q of them are same & of second type, 'r' of them are same & of a third type & the remaining $n - (p + q + r)$ things are all different, is $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$.

Example # 12 : In how many ways we can arrange 3 red flowers, 4 yellow flowers and 5 white flowers in a row? In how many ways this is possible if the white flowers are to be separated in any arrangement? (Flowers of same colour are identical).

Solution : Total we have 12 flowers 3 red, 4 yellow and 5 white.

Number of arrangements = $\dfrac{12!}{3!\,4!\,5!}$ = 27720.

For the second part, first arrange 3 red & 4 yellow

This can be done in $\dfrac{7!}{3!\,4!}$ = 35 ways

Now select 5 places from among 8 places (including extremes) & put the white flowers there. This can be done in ${}^8C_5 = 56$.

∴ The number of ways for the 2^{nd} part = 35 × 56 = 1960.

Example # 13 : In how many ways the letters of the word "ARRANGE" can be arranged without altering the relative positions of vowels & consonants?

Solution : The consonants in their positions can be arranged in $\dfrac{4!}{2!}$ = 12 ways.

The vowels in their positions can be arranged in $\dfrac{3!}{2!}$ = 3 ways

∴ Total number of arrangements = 12 × 3 = 36

Self Practice Problems :

(14) How many words can be formed using the letters of the word ASSESSMENT if each word begin with A and end with T?

(15) If all the letters of the word ARRANGE are arranged in all possible ways, in how many of words we will have the A's not together and also the R's not together?

(16) How many arrangements can be made by taking four letters of the word MISSISSIPPI?

Ans. (14) 840 (15) 660 (16) 176.

Formation of Groups :

Number of ways in which (m + n + p) different things can be divided into three different groups containing m, n & p things respectively is $\frac{(m+n+p)\,!}{m\,!\,n\,!\,p\,!}$,

If m = n = p and the groups have identical qualitative characteristic then the number of groups $= \frac{(3n)!}{n!\,n!\,n!\,3!}$.

Note : If 3n different things are to be distributed equally among three people then the number of ways $= \frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

Example # 14 : 12 different toys are to be distributed to three children equally. In how many ways this can be done ?

Solution : The problem is to divide 12 different things into three different groups.

Number of ways $= \frac{12!}{4!\;4!\;4!} = 34650$.

Example # 15 : In how many ways 10 persons can be divided into 5 pairs?

Solution : We have each group having 2 persons and the qualitative characteristic are same (Since there is no purpose mentioned or names for each pair).

Thus the number of ways $= \frac{10!}{(2!)^5 5!} = 945$.

Self Practice Problems :

(17) 9 persons enter a lift from ground floor of a building which stops in 10 floors (excluding ground floor), if it is known that persons will leave the lift in groups of 2, 3, & 4 in different floors. In how many ways this can happen?

(18) In how many ways one can make four equal heaps using a pack of 52 playing cards?

(19) In how many ways 11 different books can be parcelled into four packets so that three of the packets contain 3 books each and one of 2 books, if all packets have the same destination?

Ans. (17) 907200 (18) $\frac{52!}{(13!)^4\;4!}$ (19) $\frac{11!}{(3!)^4 2}$

Circular Permutation :

The number of circular permutations of n different things taken all at a time is (n – 1) !.

If clockwise & anti–clockwise circular permutations are considered to be same, then it is $\frac{(n-1)!}{2}$.

Note : Number of circular permutations of n things when p are alike and the rest are different, taken all at a time, distinguishing clockwise and anticlockwise arrangement is $\frac{(n-1)\,!}{p!}$.

Example # 16 : In how many ways can we arrange 6 different flowers in a circle? In how many ways we can form a garland using these flowers?

Solution : The number of circular arrangements of 6 different flowers = (6 – 1)! = 120

When we form a garland, clockwise and anticlockwise arrangements are similar. Therefore, the number of ways of forming garland = $\frac{1}{2}$ (6 – 1) ! = 60.

Example # 17 : In how many ways 6 persons can sit at a round table, if two of them prefer to sit together?

Solution : Let $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ be the persons, where P_1, P_2 want to sit together.

Regard these person as 5 objects. They can be arranged in a circle in (5 – 1)! = 24 ways. Now P_1, P_2 can be arranged in 2! ways. Thus the total number of ways = 24 × 2 = 48.

Self Practice Problems :

(20) In how many ways letters of the word 'MONDAY' can be written around a circle, if vowels are to be separated in any arrangement ?

(21) In how many ways we can form a garland using 3 different red flowers,5 different yellow flowers and 4 different blue flowers, if flowers of same colour must be together?

Ans. (20) 72 (21) 17280

Selection of one or more objects

(a) Number of ways in which atleast one object may be selected out of 'n' distinct objects, is

$$^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nC_n = 2^n - 1$$

(b) Number of ways in which atleast one object may be selected out of 'p' alike objects of one type, 'q' alike objects of second type and 'r' alike objects of third type, is

$$(p + 1)\ (q + 1)\ (r + 1) - 1$$

(c) Number of ways in which atleast one object may be selected from 'n' objects where 'p' alike of one type, 'q' alike of second type and 'r' alike of third type and rest n – (p + q + r) are different, is $(p + 1)\ (q + 1)\ (r + 1)\ 2^{n - (p + q + r)} - 1$

Example # 18 : There are 12 different books in a shelf. In how many ways we can select atleast one of them?

Solution : We may select 1 book, 2 books,........, 12 books.

$\therefore$ The number of ways = $^{12}C_1 + {}^{12}C_2 + \ldots\ldots. + {}^{12}C_{12} = 2^{12} - 1$. = 4095

Example # 19 : There are 11 fruits in a basket of which 6 are apples, 3 mangoes and 2 bananas (fruits of same species are identical). How many ways are there to select atleast one fruit?

Solution : Let x be the number of apples being selected

y be the number of mangoes being selected and

z be the number of bananas being selected.

Then x = 0, 1, 2, 3, 4, 5,6

y = 0, 1, 2, 3

z = 0, 1, 2

Total number of triplets (x, y, z) is 7 × 4 × 3 = 84

Exclude (0, 0, 0)

$\therefore$ Number of combinations = 84 – 1 = 83.

Self Practice Problems

(22) In a shelf there are 6 physics, 4 chemistry and 3 mathematics books. How many combinations are there if (i) books of same subject are different? (ii) books of same subject are identical?

(23) From 5 apples, 4 mangoes & 3 bananas, in how many ways we can select atleast two fruits of each variety if (i) fruits of same species are identical? (ii) fruits of same species are different?

Ans. (22) (i) 8191 (ii) 139 (23) (i) 24 (ii) $2^{12} - 4$

Results : Let N = $p^{a} \cdot q^{b} \cdot r^{c} \ldots\ldots$ where p, q, r...... are distinct primes & a, b, c..... are natural numbers then:

(a) The total numbers of divisors of N including 1 & N is = (a + 1) (b + 1) (c + 1)........

(b) The sum of these divisors is =

$(p^0 + p^1 + p^2 + \ldots. + p^a)\ (q^0 + q^1 + q^2 + \ldots. + q^b)\ (r^0 + r^1 + r^2 + \ldots. + r^c)\ldots\ldots..$

(c) Number of ways in which N can be resolved as a product of two factors is

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(a+1)\,(b+1)\,(c+1)\,.... & \text{if N is not a perfect square} \\ \frac{1}{2}\left[(a+1)\,(b+1)\,(c+1)\,....+1\right] & \text{if N is a perfect square} \end{cases}$$

(d) Number of ways in which a composite number N can be resolved into two factors which are relatively prime (or coprime) to each other is equal to 2^{n-1} where n is the number of different prime factors in N.

Example # 20 : Find the number of divisors of 1350. Also find the sum of all divisors.

Solution : $1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2$

$\therefore$ Number of divisors = (1+ 1) (3 + 1) (2 + 1) = 24

sum of divisors = $(1 + 2)\,(1 + 3 + 3^2 + 3^3)\,(1 + 5 + 5^2) = 3720$.

Example # 21 : In how many ways 8100 can be resolved into product of two factors?

Solution : $8100 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2$

Number of ways $= \frac{1}{2}\,[(2 + 1)\,(4 + 1)\,(2 + 1) + 1] = 23$

Self Practice Problems :

(24) How many divisors of 9000 are even but not divisible by 4? Also find the sum of all such divisors.

(25) In how many ways the number 8100 can be written as product of two coprime factors?

Ans. (24) 12, 4056 (25) 4

Negative binomial expansion :

$(1 - x)^{-n} = 1 + {}^{n}C_1 x + {}^{n+1}C_2\, x^2 + {}^{n+2}C_3 x^3 + ... \text{ to } \infty$, if $-1 < x < 1$.

Coefficient of x^r in this expansion = ${}^{n+r-1}C_r$ $(n \in N)$

Result : Number of ways in which it is possible to make a selection from m + n + p = N things, where p are alike of one kind, m alike of second kind & n alike of third kind, taken r at a time is given by coefficient of x^r in the expansion of

$(1 + x + x^2 + ... + x^p)\,(1 + x + x^2 + ... + x^m)\,(1 + x + x^2 + ... + x^n)$.

For example the number of ways in which a selection of four letters can be made from the letters of the word **PROPORTION** is given by coefficient of x^4 in

$(1 + x + x^2 + x^3)\,(1 + x + x^2)\,(1 + x + x^2)\,(1 + x)\,(1 + x)\,(1 + x)$.

Method of fictious partition :

Number of ways in which n identical things may be distributed among p persons if each person may receive none, one or more things is ${}^{n+p-1}C_n$.

Example # 22 : Find the number of solutions of the equation x + y + z = 6, where x, y, z $\in$ W.

Solution : Number of solutions = coefficient of x^6 in $(1 + x + x^2 + ... x^6)^3$

= coefficient of x^6 in $(1 - x^7)^3\,(1 - x)^{-3}$

= coefficient of x^6 in $(1 - x)^{-3}$

$= {}^{3+6-1}C_6 = {}^{8}C_2 = 28$.

Example # 23 : In a bakery four types of biscuits are available. In how many ways a person can buy 10 biscuits if he decide to take atleast one biscuit of each variety?

Solution : Let the person select x biscuits from first variety, y from the second, z from the third and w from the fourth variety. Then the number of ways = number of solutions of the equation

x + y + z + w = 10.

where x = 1, 2, ...,7

y = 1, 2, ...,7

z = 1, 2, ...,7

w = 1, 2, ...,7

So, number of ways = coefficient of x^{10} in $(x + x^2 + ... + x^7)^4$

$= \text{coefficient of } x^6 \text{ in } (1 + x + ... + x^6)^4$
$= \text{coefficient of } x^6 \text{ in } (1 - x^7)^4 (1 - x)^{-4}$
$= \text{coefficient } x^6 \text{ in } (1 - x)^{-4}$
$= {}^{4+6-1}C_6 = {}^9C_3 = 84$

Self Practice Problems:

(26) Three distinguishable dice are rolled. In how many ways we can get a total 15?

(27) In how many ways we can give 5 apples, 4 mangoes and 3 oranges (fruits of same species are similar) to three persons if each may receive none, one or more?

Ans. (26) 10 (27) 3150

Derrangements :

Number of ways in which 'n' letters can be put in 'n' corresponding envelopes such that no letter goes to correct envelope is $n!\left(1-\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}-\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{4\,!}-.........+(-1)^n\frac{1}{n\,!}\right)$

Example # 24 : In how many ways we can put 5 writings into 5 corresponding envelopes so that no writing go to the corresponding envelope?

Solution : The problem is the number of dearragements of 5 digits.

This is equal to 5! $\left(\frac{1}{2\,!}-\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{4\,!}-\frac{1}{5\,!}\right)$ = 44.

Example # 25 : Four slip of papers with the numbers 1, 2, 3, 4 written on them are put in a box. They are drawn one by one (without replacement) at random. In how many ways it can happen that the ordinal number of atleast one slip coincide with its own number?

Solution : Total number of ways = 4 ! = 24.

The number of ways in which ordinal number of any slip does not coincide with its own number is the number of dearrangements of 4 objects = 4 ! $\left(\frac{1}{2\,!}-\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{4\,!}\right)$ = 9

Thus the required number of ways. = 24 – 9 = 15

Self Practice Problems:

(28) In a match the column question, Column I contain 10 questions and Column II contain 10 answers written in some arbitrary order. In how many ways a student can answer this question so that exactly 6 of his matching are correct ?

(29) In how many ways we can put 5 letters into 5 corresponding envelopes so that atleast one letter go to wrong envelope ?

Ans. (28) 1890 (29) 119

Exponent of prime p in n! :

Let p be a prime number, n be a positive integer and Let $E_p(n)$ denote the exponent of the prime p in the positive integer n. Then,

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+......+\left[\frac{n}{p^s}\right]$$

where s is the largest positive integer such that $p^s \le n < p^{s+1}$

Example # 26 : Find exponent 2 and 3 in 100!

Solution : Exponent of 2 in 100! is represented by $E_2(100!) = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + ... + \left[\frac{100}{2^6}\right]$

= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97

Exponent of 3 in 100! is represented by $E_3(100!) = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right]$

= 33 +11 + 3 + 1 = 48

Example # 27 : If 100! is divided by $(24)^k$ (where $k \in n$), then find maximum value of k.

Solution : Exponent of 2 in 100! is represented by $E_2(100!) = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + ... + \left[\frac{100}{2^6}\right]$

= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97

$\Rightarrow$ Exponent of 2^3 in 100! is 32.

Exponent of 3 in 100! is represented by $E_3(100!) = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right]$

= 33 +11 + 3 + 1 = 48

$\Rightarrow$ Exponent of $(2^3 \times 3)$ in 100! is min{48, 32} = 32

$\Rightarrow$ Exponent of (24) in 100! is = 32

$\Rightarrow$ maximum value of k is 32.

Self Practice Problems:

(30) Find the number of zeros at the end of $^{50}C_{25}$.

(31) Find the last non zero digits of 25!.

Ans (30) 0 (31) 4

Exercise-1

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

Section (A) : Fundamental principle of counting, problem based on selection of given object & arrangement of given object.

A-1. There are nine students (5 boys & 4 girls) in the class. In how many ways
- (i) One student (either girl or boy) can be selected to represent the class.
- (ii) A team of two students (one girl & one boy) can be selected.
- (iii) Two medals can be distributed. (no one get both)
- (iv) One prize for Maths, two prizes for Physics and three prizes for Chemistry can be distributed. (No student can get more than one prize in same subject & prizes are distinct)

A-2. There are 10 buses operating between places A and B. In how many ways a person can go from place A to place B and return to place A, if he returns in a different bus?

A-3. There are 4 boys and 4 girls. In how many ways they can sit in a row
- (i) there is no restriction.
- (ii) not all girls sit together.
- (iii) no two girls sit together.
- (iv) all boys sit together and all girls sit together .
- (v) boys and girls sit alternatively.

A-4.✍ Find the number of words those can be formed by using all letters of the word 'DAUGHTER'. If
- (i) Vowels occurs in first and last place.
- (ii) Start with letter G and end with letters H.
- (iii) Letters G, H, T always occurs together.
- (iv) No two letters of G, H, T are consecutive
- (v) No vowel occurs together
- (vi) Vowels always occupy even place.
- (vii) Order of vowels remains same.
- (viii) Relative order of vowels and consonants remains same.
- (ix) Number of words are possible by selecting 2 vowels and 3 consonants.

A-5. Words are formed by arranging the letters of the word "STRANGE" in all possible manner. Let m be the number of words in which vowels do not come together and 'n' be the number of words in which vowels come together. Then find the ratio of m: n.(where m and n are coprime natural number)

A-6. In a question paper there are two parts part A and part B each consisting of 5 questions. In how many ways a student can answer 6 questions, by selecting atleast two from each part?

A-7. How many 3 digit even numbers can be formed using the digits 1, 2, 3, 4, 5 (repetition allowed)?

A-8. Find the number of 6 digit numbers that ends with 21 (eg. 537621), without repetition of digits.

A-9. The digits from 0 to 9 are written on slips of paper and placed in a box. Four of the slips are drawn at random and placed in the order. How many out comes are possible?

A-10. Find the number of natural numbers from 1 to 1000 having none of their digits repeated.

A-11. A number lock has 4 dials, each dial has the digits 0, 1, 2, ...,9. What is the maximum unsuccessful attempts to open the lock?

A-12. In how many ways we can select a committee of 6 persons from 6 boys and 3 girls, if atleast two boys & atleast two girls must be there in the committee ?

A-13. In how many ways 11 players can be selected from 15 players, if only 6 of these players can bowl and the 11 players must include atleast 4 bowlers?

A-14. A committee of 6 is to be chosen from 10 persons with the condition that if a particular person 'A' is chosen, then another particular person B must be chosen.

A-15. In how many ways we can select 5 cards from a deck of 52 cards, if each selection must include atleast one king.

A-16. How many four digit natural numbers not exceeding the number 4321 can be formed using the digits 1, 2, 3, 4, if repetition is allowed ?

A-17. How many different permutations are possible using all the letters of the word MISSISSIPPI, if no two I's are together?

A-18. If A = {1, 2, 3, 4 .....n} and $B \subset A$; $C \subset A$, then the find number of ways of selecting
- (i) Sets B and C
- (ii) Order pair of B and C such that $B \cap C = \phi$
- (iii) Unordered pair of B and C such that $B \cap C = \phi$
- (iv) Ordered pair of B and C such that $B \cup C = A$ and $B \cap C = \phi$
- (v) Unordered pair of B and C such that $B \cup C = A$, $B \cap C = \phi$
- (vi) Ordered pair of B and C such that $B \cap C$ is singleton

A-19. For a set of six true or false statements, no student in a class has written all correct answers and no two students in the class have written the same sequence of answers. What is the maximum number of students in the class, for this to be possible.

A-20. How many arithmetic progressions with 10 terms are there, whose first term is in the set {1, 2, 3, 4} and whose common difference is in the set {3, 4, 5, 6, 7} ?

A-21. Find the number of all five digit numbers which have atleast one digit repeated.

A-22. There are 3 white, 4 blue and 1 red flowers. All of them are taken out one by one and arranged in a row in the order. How many different arrangements are possible (flowers of same colurs are similar)?

Section (B) : Grouping and Circular Permutation

B-1. In how many ways 18 different objects can be divided into 7groups such that four groups contains 3 objects each and three groups contains 2 objects each.

B-2. In how many ways fifteen different items may be given to A, B, C such that A gets 3, B gets 5 and remaining goes to C.

B-3. Find number of ways of distributing 8 different items equally among two children.

B-4.
- (a) In how many ways can five people be divided into three groups?
- (b) In how many ways can five people be distributed in three different rooms if no room must be empty?
- (c) In how many ways can five people be arranged in three different rooms if no room must be empty and each room has 5 seats in a single row.

B-5. Prove that : $\dfrac{200!}{(10!)^{20}\ \ 19!}$ is an integer

B-6. In how many ways 5 persons can sit at a round table, if two of the persons do not sit together?

B-7. In how many ways four men and three women may sit around a round table if all the women are together?

B-8. Seven persons including A, B, C are seated on a circular table. How many arrangements are possible if B is always between A and C ?

B-9. In how many ways four '+' and five '–' sign can be arranged in a circles so that no two '+' sign are together.

Section (C) : Problem based on distinct and identical objects and divisors

C-1. Let N = 24500, then find
(i) The number of ways by which N can be resolved into two factors.
(ii) The number of ways by which 5N can be resolved into two factors.
(iii) The number of ways by which N can be resolved into two coprime factors.

C-2. Find number of ways of selection of one or more letters from AAAABBCCCDEF
(i) there is no restriction.
(ii) the letters A & B are selected atleast once.
(iii) only one letter is selected.
(iv) atleast two letters are selected

C-3. Find number of ways of selection of atleast one vowel and atleast one consonant from the word TRIPLE

C-4. Find number of divisiors of 1980.
(i) How many of them are multiple of 11? find their sum
(ii) How many of them are divisible by 4 but not by 15.

Section (D) : Multinomial theorem & Dearrangement

D-1. Find number of negative integral solution of equation $x + y + z = -12$

D-2. In how many ways it is possible to divide six identical green, six identical blue and six identical red among two persons such that each gets equal number of item?

D-3. Find the number of solutions of $x + y + z + w = 20$ under the following conditions:
(i) x, y, z, w are whole number
(ii) x, y, z, w are natural number
(iii) $x, y, z, w \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$
(iv) x, y, z, w are odd natural number

D-4. A person has 4 distinct regular tetrahedron dice. The number printed on 4 four faces of dice are –3, –1, 1 and 3. The person throws all the 4 dice. Find the total number of ways of getting sum of number appearing on the bottom face of dice equal to 0.

D-5. Five balls are to be placed in three boxes in how many diff. ways can be placed the balls so that no box remains empty if
(i) balls and boxes are diff,
(ii) balls identical and boxes diff.
(iii) balls diff. and boxes identical
(iv) balls as well as boxes are identical

D-6. Let D_n represents derangement of 'n' objects. If $D_{n+2} = a\, D_{n+1} + b\, D_n \ \forall\ n \in N$, then find $\frac{b}{a}$

D-7. A person writes letters to five friends and addresses on the corresponding envelopes. In how many ways can the letters be placed in the envelopes so that
(a) all letters are in the wrong envelopes?
(b) at least three of them are in the wrong envelopes?

Section (E) : Miscellaneous

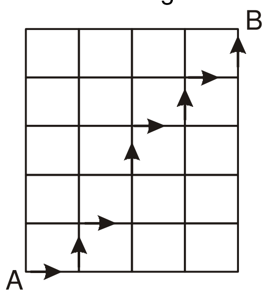
E-1. (i) Find exponent of 3 in 20 !
(ii) Find number of zeros at the end of 45!.

E-2. Find the total number of ways of selecting two number from the set of first 100 natural number such that difference of their square is divisible by 3

E-3. A four digit number plate of car is said to be lucky if sum of first two digit is equal to sum of last two digit. Then find the total number of such lucky plate. (Assume 0000, 0011, 0111, ... all are four digit number)

E-4. Let each side of smallest square of chess board is one unit in length.
(i) Find the total number of squares of side length equal to 3 and whose side parallel to side of chess board.
(ii) Find the sum of area of all possible squares whose side parallel to side of chess board.
(iii) Find the total number of rectangles (including squares) whose side parallel to side of chess board.

E-5. A person is to walk from A to B. However, he is restricted to walk only to the right of A or upwards of A. but not necessarily in the order shown in the figure. Then find the number of paths from A to B.



PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

Section (A) : Fundamental principle of counting, problem based on selection of given object & arrangement of given object, rank of word

A-1. The number of signals that can be made with 3 flags each of different colour by hoisting 1 or 2 or 3 above the other, is:
(A) 3 (B) 7 (C) 15 (D) 16

A-2. 8 chairs are numbered from 1 to 8. Two women & 3 men wish to occupy one chair each. First the women choose the chairs from amongst the chairs marked 1 to 4, then the men select the chairs from among the remaining. The number of possible arrangements is:
(A) ${}^6C_3 . {}^4C_4$ (B) $P_2 . {}^4P_3$ (C) ${}^4C_3 . {}^4P_3$ (D) ${}^4P_2 . {}^6P_3$

A-3. Number of words that can be made with the letters of the word "GENIUS" if each word neither begins with G nor ends in S, is:
(A) 24 (B) 240 (C) 480 (D) 504

A-4. The number of words that can be formed by using the letters of the word 'MATHEMATICS' that start as well as end with T, is
(A) 80720 (B) 90720 (C) 20860 (D) 37528

A-5. 5 boys & 3 girls are sitting in a row of 8 seats. Number of ways in which they can be seated so that not all the girls sit side by side, is:
(A) 36000 (B) 9080 (C) 3960 (D) 11600

A-6. Out of 16 players of a cricket team, 4 are bowlers and 2 are wicket keepers. A team of 11 players is to be chosen so as to contain at least 3 bowlers and at least 1 wicketkeeper. The number of ways in which the team be selected, is
(A) 2400 (B) 2472 (C) 2500 (D) 960

A-7 Passengers are to travel by a double decked bus which can accommodate 13 in the upper deck and 7 in the lower deck. The number of ways that they can be divided if 5 refuse to sit in the upper deck and 8 refuse to sit in the lower deck, is
(A) 25 (B) 21 (C) 18 (D) 15

A-8. The number of permutations that can be formed by arranging all the letters of the word 'NINETEEN' in which no two E's occur together. is
(A) $\frac{8!}{3!\ 3!}$ (B) $\frac{5!}{3! \times {}^6C_2}$ (C) $\frac{5!}{3!} \times {}^6C_3$ (D) $\frac{8!}{5!} \times {}^6C_3$.

A-9. 10 different letters of an alphabet are given. Words with 5 letters are formed from these given letters, then the number of words which have atleast one letter repeated is:
(A) 69760 (B) 30240 (C) 99748 (D) none

A-10. In a conference 10 speakers are present. If S_1 wants to speak before S_2 & S_2 wants to speak after S_3, then the number of ways all the 10 speakers can give their speeches with the above restriction if the remaining seven speakers have no objection to speak at any number is :
(A) ${}^{10}C_3$ (B) ${}^{10}P_8$ (C) ${}^{10}P_3$ (D) $\frac{10!}{3}$

A-11. If all the letters of the word "QUEUE" are arranged in all possible manner as they are in a dictionary, then the rank of the word QUEUE is:
(A) 15^{th} (B) 16^{th} (C) 17^{th} (D) 18^{th}

A-12. The sum of all the numbers which can be formed by using the digits 1, 3, 5, 7 all at a time and which have no digit repeated, is
(A) $16 \times 4!$ (B) $1111 \times 3!$ (C) $16 \times 1111 \times 3!$ (D) $16 \times 1111 \times 4!$.

A-13. How many nine digit numbers can be formed using the digits 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8, 8 so that the odd digits occupy even positions?
(A) 7560 (B) 180 (C) 16 (D) 60

A-14. There are 2 identical white balls, 3 identical red balls and 4 green balls of different shades. The number of ways in which they can be arranged in a row so that atleast one ball is separated from the balls of the same colour, is :
(A) $6\ (7! - 4!)$ (B) $7\ (6! - 4!)$ (C) $8! - 5!$ (D) none

A-15. A box contains 2 white balls, 3 black balls & 4 red balls. In how many ways can three balls be drawn from the box if atleast one black ball is to be included in draw (the balls of the same colour are different).
(A) 60 (B) 64 (C) 56 (D) none

A-16. Eight cards bearing number 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 are well shuffled. Then in how many cases the top 2 cards will form a pair of twin prime equals

(A) 720 (B) 1440 (C) 2880 (D) 2160

A-17. Number of natural number upto one lakh, which contains 1,2,3, exactly once and remaining digits any time is -

(A) 2940 (B) 2850 (C) 2775 (D) 2680

A-18.✍ The sum of all the four digit numbers which can be formed using the digits 6,7,8,9 (repetition is allowed)

(A) 2133120 (B) 2133140 (C) 2133150 (D) 2133122

A-19. If the different permutations of the word *'EXAMINATION'* are listed as in a dictionary, then how many words (with or without meaning) are there in this list before the first word starting with M.

(A) 2268000 (B) 870200 (C) 807400 (D) 839440

A-20. The number of ways in which a mixed double tennis game can be arranged from amongst 9 married couple if no husband & wife plays in the same game is:

(A) 756 (B) 3024 (C) 1512 (D) 6048

Section (B) : Grouping and circular Permutation

B-1. Number of ways in which 9 different toys be distributed among 4 children belonging to different age groups in such a way that distribution among the 3 elder children is even and the youngest one is to receive one toy more, is:

(A) $\frac{(5\,!)^2}{8}$ (B) $\frac{9\,!}{2}$ (C) $\frac{9\,!}{3\,!\,(2\,!)^3}$ (D) none

B-2. In an eleven storeyed building (Ground floor + ten floor), 9 people enter a lift cabin from ground floor. It is know that they will leave the lift in groups of 2, 3 and 4 at different residential storeys. Find the number of ways in which they can get down.

(A) $\frac{9\times 9!}{4}$ (B) $\frac{8\times 9!}{4}$ (C) $\frac{2\times 10!}{9}$ (D) $\frac{10!}{4}$

B-3. The number of ways in which 8 different flowers can be strung to form a garland so that 4 particulars flowers are never separated, is:

(A) $4\,!.\,4\,!$ (B) $\frac{8\,!}{4\,!}$ (C) 288 (D) none

B-4. The number of ways in which 6 red roses and 3 white roses (all roses different) can form a garland so that all the white roses come together, is

(A) 2170 (B) 2165 (C) 2160 (D) 2155

B-5. The number of ways in which 4 boys & 4 girls can stand in a circle so that each boy and each girl is one after the other, is:

(A) 3!. 4! (B) 4!. 4! (C) 8! (D) 7!

B-6. The number of ways in which 5 beads, chosen from 8 different beads be threaded on to a ring, is:

(A) 672 (B) 1344 (C) 336 (D) none

B-7. Number of ways in which 2 Indians, 3 Americans, 3 Italians and 4 Frenchmen can be seated on a circle, if the people of the same nationality sit together, is:

(A) $2.\,(4\,!)^2\,(3\,!)^2$ (B) $2.\,(3\,!)^3.\,4\,!$ (C) $2.\,(3\,!)\,(4\,!)^3$ (D) $2.\,(3\,!)^2\,(4\,!)^3$

Section (C) : Problem based on distinct and identical objects and divisors

C-1. The number of proper divisors of $a^p b^q c^r d^s$ where a, b, c, d are primes & p, q, r, s $\in$ N, is
(A) p q r s (B) (p + 1) (q + 1) (r + 1) (s + 1) – 4
(C) p q r s – 2 (D) (p + 1) (q + 1) (r + 1) (s + 1) – 1

C-2. N is a least natural number having 24 divisors. Then the number of ways N can be resolved into two factors is
(A) 12 (B) 24 (C) 6 (D) None of these

C-3. How many divisors of 21600 are divisible by 10 but not by 15?
(A) 10 (B) 30 (C) 40 (D) none

C-4. The number of ways in which the number 27720 can be split into two factors which are co-primes, is:
(A) 15 (B) 16 (C) 25 (D) 49

C-5. The number of words of 5 letters that can be made with the letters of the word
(A) 6890 (B) 7000 (C) 6800 (D) 6900

C-6. Let fruits of same kind are identical then how many ways can atleast 2 fruit be selected out of 5 Mangoes, 4 Apples, 3 Bananas and three different fruits.
(A) 959 (B) 953 (C) 960 (D) 954

Section (D) : Multinomial theorem and Dearrangement

D-1. The number of ways in which 10 identical apples can be distributed among 6 children so that each child receives atleast one apple is :
(A) 126 (B) 252 (C) 378 (D) none of these

D-2. Number of ways in which 3 persons throw a normal die to have a total score of 11, is
(A) 27 (B) 25 (C) 29 (D) 18

D-3. If chocolates of a particular brand are all identical then the number of ways in which we can choose 6 chocolates out of 8 different brands available in the market, is:.
(A) ${}^{13}C_6$ (B) ${}^{13}C_8$ (C) 8^6 (D) none

D-4. Number of positive integral solutions of $x_1 . x_2 . x_3 = 30$, is
(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28

D-5. There are six letters L_1, L_2 , L_3, L_4, L_5, L_6 and their corresponding six envelopes E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Letters having odd value can be put into odd value envelopes and even value letters can be put into even value envelopes, so that no letter go into the right envelopes, then number of arrangement equals.
(A) 6 (B) 9 (C) 44 (D) 4

D-6. Seven cards and seven envelopes are numbered 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and cards are to be placed in envelopes so that each envelope contains exactly one card and no card is placed in the envelope bearing the same number and moreover the card number 1 is always placed in envelope number 2 and 2 is always placed in envelope numbered 3, then the number of ways it can be done is
(A) 53 (B) 44 (C) 9 (D) 62

Section (E) : Miscellaneous

E-1. The number of ways of choosing triplets (x, y, z) such that z $\geq$ max {x, y} and x, y, z $\in$ {1, 2, 3 ......, n} is
(A) $\sum_{t=1}^{n} t^2$ (B) ${}^{n+1}C_3 - {}^{n+2}C_3$ (C) $2\,({}^{n+2}C_3) + {}^{n+1}C_2$ (D) $\left(\frac{n(n+1)^2}{2}\right)$

E-2. The streets of a city are arranged like the lines of a chess board. There are m streets running North to South & 'n' streets running East to West. The number of ways in which a man can travel from NW to SE corner going the shortest possible distance is:

(A) $\sqrt{m^2+n^2}$ (B) $\sqrt{(m-1)^2 \cdot (n-1)^2}$ (C) $\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ (D) $\frac{(m+n-2)!}{(m-1)! \cdot (n-1)!}$

E-3. Number of ways of selecting pair of black squares in chessboard such that they have exactly one common corner is equal to :

(A) 64 (B) 56 (C) 49 (D) 50

PART - III : MATCH THE COLUMN

1. **Match the column**

	Column – I		**Column – II**
(A)	The total number of selections of fruits which can be made from, 3 bananas, 4 apples and 2 oranges is, it is given that fruits of one kind are identical	(p)	120
(B)	There are 10 true-false statements in a question paper. How many sequences of answers are possible in which exactly three are correct ?	(q)	286
(C)✍	The number of ways of selecting 10 balls from unlimited number of red, black, white and green balls is, it is given that balls of same colours are identical	(r)	59
(D)	The number of words which can be made from the letters of the word 'MATHEMATICS' so that consonants occur together ?	(s)	75600

2. **Match the column**

	Column-I		**Column-II**
(A)	There are 12 points in a plane of which 5 are collinear. The maximum number of distinct convex quadrilaterals which can be formed with vertices at these points is:	(p)	185
(B)	If 7 points out of 12 are in the same straight line, then the number of triangles formed is	(q)	420
(C)	If AB and AC be two line segemets and there are 5, 4 points on AB and AC (other than A), then the number of quadrilateral, with vertices on these points equals	(r)	126
(D)	The maximum number of points of intersection of 8 unequal circles and 4 straight lines.	(s)	60

Exercise-2

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

1. A train is going from London to Cambridge stops at 12 intermediate stations. 75 persons enter the train after London with 75 different tickets of the same class. Number of different sets of tickets they may be holding is:

(A) ${}^{78}C_3$ (B) ${}^{91}C_{75}$ (C) ${}^{84}C_{75}$ (D) ${}^{78}C_{74}$

2.✍ A family consists of a grandfather, m sons and daughters and 2n grand children. They are to be seated in a row for dinner. The grand children wish to occupy the n seats at each end and the grandfather refuses to have a grand children on either side of him. In how many ways can the family be made to sit.

(A) (2n)! m! (m – 1) (B) (2n)! m! m (C) (2n)! (m –1)! (m – 1) (D) (2n – 1)! m! (m–1)

3. A bouquet from 11 different flowers is to be made so that it contains not less than three flowers. Then then number of different ways of selecting flowers to form the bouquet.
(A) 1972 (B) 1952 (C) 1981 (D) 1947

4. If $\alpha = x_1\ x_2\ x_3$ and $\beta = y_1\ y_2\ y_3$ be two three digit numbers, then the number of pairs of α and β that can be formed so that α can be subtracted from β without borrowing.
(A) $55 . (45)^2$ (B) $45 . (55)^2$ (C) $36 . (45)^2$ (D) 55^3

5. 'n' digits positive integers formed such that each digit is 1, 2, or 3. How many of these contain all three of the digits 1, 2 and 3 atleast once ?
(A) $3(n-1)$ (B) $3^n - 2.2^n + 3$ (C) $3^n - 3.2^n - 3$ (D) $3^n - 3.2^n + 3$

6. There are 'n' straight line in a plane, no two of which are parallel and no three pass through the same point. Their points of intersection are joined. Then the maximum number of fresh lines thus introduced is
(A) $\frac{1}{12}$ n (n – 1)^2(n – 3) (B) $\frac{1}{8}$ n (n – 1) (n + 2) (n – 3)
(C) $\frac{1}{8}$ n (n – 1) (n – 2) (n – 3) (D) $\frac{1}{8}$ n (n + 1) (n + 2) (n – 3)

7. X = {1, 2, 3, 4, ... 2017} and $A \subset X$; $B \subset X$; $A \cup B \subset X$ here $P \subset Q$ denotes that P is subset of Q($P \neq Q$). Then number of ways of selecting unordered pair of sets A and B such that $A \cup B \subset X$.
(A) $\frac{(4^{2017}-3^{2017})+(2^{2017}-1)}{2}$ (B) $\frac{(4^{2017}-3^{2017})}{2}$
(C) $\frac{4^{2017}-3^{2017}+2^{2017}}{2}$ (D) None of these

8. The number of ways in which 15 identical apples & 10 identical oranges can be distributed among three persons, each receiving none, one or more is:
(A) 5670 (B) 7200 (C) 8976 (D) 7296

9. Two variants of a test paper are distributed among 12 students. Number of ways of seating of the students in two rows so that the students sitting side by side do not have identical papers & those sitting in the same column have the same paper is:
(A) $\frac{12!}{6!\,6!}$ (B) $\frac{(12)!}{2^5 . 6!}$ (C) $(6!)^2. 2$ (D) $12! \times 2$

10. How many ways are there to invite one of three friends for dinner on 6 successive nights such that no friend is invited more than three times ?
(A) $\frac{6\times6!}{1!2!3!} + 3\times\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!2!2!}$ (B) $\frac{6\times6!}{1!2!3!} + 6\times\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!2!2!}$
(C) $\frac{6\times6!}{1!2!3!} + \frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!2!2!}$ (D) $\frac{3\times6!}{1!2!3!} + 3\times\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!2!2!}$

11. If n identical dice are rolled, then number of possible out comes are.
(A) 6^n (B) $\frac{6^n}{n!}$ (C) ${}^{(n+5)}C_5$ (D) None of these

12. Number of ways in which a pack of 52 playing cards be distributed equally among four players so that each have the Ace, King, Queen and Jack of the same suit, is
(A) $\frac{36\,!\,.\,4\,!}{(9\,!)^4}$ (B) $\frac{36\,!}{(9\,!)^4}$ (C) $\frac{52\,!\,.\,4\,!}{(13\,!)^4}$ (D) $\frac{52\,!}{(13\,!)^4}$

13. Find total number of positive integral solutions of $15 < x_1 + x_2 + x_3 \le 20$.

(A) 685 (B) 1140 (C) 455 (D) 1595

14. Seven person $P_1, P_2, ..., P_7$ initially seated at chairs $C_1, C_2 .... ,C_7$ respectively. They all left their chairs symultaneously for hand wash. Now in how many ways they can again take seats such that no one sits on his own seat and P_1 sits on C_2 and P_2 sits on C_3 ?

(A) 52 (B) 53 (C) 54 (D) 55

15. Given six line segments of length 2, 3, 4, 5, 6, 7 units, the number of triangles that can be formed by these segments is

(A) ${}^6C_3 - 7$ (B) ${}^6C_3 - 6$ (C) ${}^6C_3 - 5$ (D) ${}^6C_3 - 4$

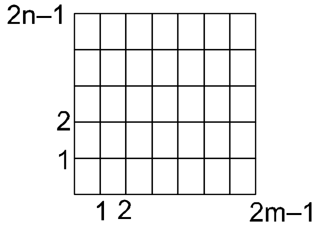
16. There are m apples and n oranges to be placed in a line such that the two extreme fruits being both oranges. Let P denotes the number of arrangements if the fruits of the same species are different and Q the corresponding figure when the fruits of the same species are alike, then the ratio P/Q has the value equal to :

(A) ${}^nP_2 . {}^mP_m . (n - 2)!$ (B) ${}^mP_2 . {}^nP_n . (n - 2)!$ (C) ${}^nP_2 . {}^nP_n . (m - 2)!$ (D) none

17. The number of intersection points of diagonals of 2009 sides regular polygon, which lie inside the polygon.

(A) ${}^{2009}C_4$ (B) ${}^{2009}C_2$ (C) ${}^{2008}C_4$ (D) ${}^{2008}C_2$

18. A rectangle with sides 2m – 1 and 2n – 1 is divided into squares of unit length by drawing parallel lines as shown in the diagram, then the number of rectangles possible with odd side lengths is



(A) $(m + n - 1)^2$ (B) 4^{m+n-1} (C) $m^2 n^2$ (D) $m(m + 1)n(n + 1)$

19. Find the number of all rational number $\frac{m}{n}$ such that

(i) $0 < \frac{m}{n} < 1$, (ii) m and n are relatively prime (iii) m n = 25!

(A) 256 (B) 128 (C) 512 (D) None of these

PART-II: NUMERICAL VALUE QUESTIONS

INSTRUCTION :

- The answer to each question is **NUMERICAL VALUE** with two digit integer and decimal upto two digit.
- If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.

1. Number of five digits numbers divisible by 3 and divisible by 4 that can be formed using the digits 0, 1, 2, 3, 4, 7 and 8 if, each digit is to be used atmost one is M and N are respectively then value of $\frac{M}{N}$ is

2. The sides AB, BC & CA of a triangle ABC have 3, 4 & 5 interior points respectively on them. If the number of triangles that can be constructed using these interior points as vertices is k and number of lines segments including sides of triangle is p then $\frac{k}{p}$ is

3. Shubham has to make a telephone call to his friend Nisheeth, Unfortunately he does not remember the 7 digit phone number. But he remembers that the first three digits are 635 or 674, the number is odd and there is exactly one 9 in the number. The maximum number of trials that Shubham has to make to be successful is N then $\left(\frac{N}{100}\right)$ is equal to

4. Seven different coins are to be divided amongst three persons. If no two of the persons receive the same number of coins but each receives atleast one coin & none is left over, then the number of ways in which the division may be made is k, then number of ways in which k can be resolve as a product of two coprime number is

5. Number of ways in which five vowels of English alphabets and ten decimal digits can be placed in a row such that between any two vowels odd number of digits are placed and both end places are occupied by vowels is 20(b!)(5!) then b equals to

6. The number of integers which lie between 1 and 10^6 have the sum of the digits equal to 12 is A and number of such 6 digit integer which have the sum of the digits equal to 12 is B then $\frac{A}{B} =$

7. The number of ways in which 8 non-identical apples can be distributed among 3 boys such that every boy should get atleast 1 apple & atmost 4 apples is N then $\left(\frac{N}{100}\right)$ is equal to

8. In a hockey series between team X and Y, they decide to play till a team wins '10' match. If N is number of ways in which team X wins and if M is number of ways in which team X win while first match is win by team X then $\frac{N}{M} =$

9. Three ladies have brought one chlid each for admission to a school. The principal wants to interview the six persons one by one subject to the condition that no mother is interviewed before her chlid. Then find the number of ways in which interviews can be arranged

10. In a shooting competition a man can score 0, 2 or 4 points for each shot. Then the number of different ways in which he can score 14 points in 5 shots is

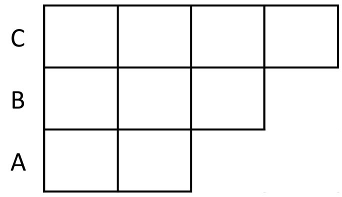
11. Six persons A, B, C, D, E and F are to be seated at a circular table. The number of ways this can be done if A must have either B or C on his right and B must have either C or D on his right is

12. The number of permutations and combination which can be formed out of the letters of the word "SERIES" taking three letters together is a & b respectively then find $\frac{a}{b}$

13. A box contains 6 balls which may be all of different colours or three each of two colours or two each of three different colours. The number of ways of selecting 3 balls from the box (if ball of same colour are identical) is

14. Five friends F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 book five seats C_1, C_2 , C_3 ,C_4 , C_5 respectively of movie KABIL independently (i.e. F_1 books C_1, F_2 books C_2 and so on). In how many different ways can they sit on these seats if no one wants to sit on his booked seat, more over F_1 and F_2 want to sit adjacent to each other.

15. The number of ways in which 5 X's can be placed in the squares of the figure so that no row remains empty is:



16. Sum of all the numbers that can be formed using all the digits 2, 3, 3, 4, 4, 4, is N then $\left(\frac{N}{1111110}\right)$ is equal to

17. Six married couple are sitting in a room. Number of ways in which 4 people can be selected so that there is exactly one married couple among the four is N then (N–225) is equal to

18. Let P_n denotes the number of ways of selecting 3 people out of ' n ' sitting in a row, if no two of them are consecutive and Q_n is the corresponding figure when they are in a circle. If $P_n - Q_n = 6$, then find $\frac{P_n}{Q_n}$

19. The number of ways selecting 8 books from a library which has 10 books each of Mathematics, Physics, Chemistry and English, if books of the same subject are alike, is N then find $\frac{N}{10}$

20. The number of three digit numbers of the form xyz such that $x < y$ and $z \le y$ is N then $\frac{N}{100}$ is equal to

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

1. In an examination, a candidate is required to pass in all the four subjects he is studying. The number of ways in which he can fail is

(A) ${}^4P_1 + {}^4P_2 + {}^4P_3 + {}^4P_4$ (B) $4^4 - 1$
(C) $2^4 - 1$ (D) ${}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4$

2. The kindergarten teacher has 25 kids in her class. She takes 5 of them at a time, to zoological garden as often as she can, without taking the same 5 kids more than once. Then the number of visits, the teacher makes to the garden exceeds that of a kid by:

(A) ${}^{25}C_5 - {}^{24}C_4$ (B) ${}^{24}C_5$ (C) ${}^{25}C_5 - {}^{24}C_5$ (D) ${}^{24}C_4$

3. A student has to answer 10 out of 13 questions in an examination. The number of ways in which he can answer if he must answer atleast 3 of the first five questions is:

(A) 276 (B) 267
(C) ${}^{13}C_{10} - {}^5C_3$ (D) ${}^5C_3 \,.\, {}^8C_7 + {}^5C_4 \,.\, {}^8C_6 + {}^8C_5$

4. Number of ways in which 3 different numbers in A.P. can be selected from 1, 2, 3,...... n is:

(A) $\frac{(n-2)(n-4)}{4}$ if n is even (B) $\frac{n^2-4n+5}{2}$ if n is odd
(C) $\frac{(n-1)^2}{4}$ if n is odd (D) $\frac{n\,(n-2)}{4}$ if n is even

5. 2m white identical coins and 2n red identical coins are arranged in a straight line with (m + n) identical coins on each side of a central mark. The number of ways of arranging the identical coins , so that the arrangements are symmetrical with respect to the central mark.

(A) ${}^{m+n}C_m$ (B) ${}^{m+n}C_n$ (C) ${}^{m+n}C_{|m-n|}$ (D) ${}^{m+n}C_{|n-m|}$

6. The number of ways in which 10 students can be divided into three teams, one containing 4 and others 3 each, is

(A) $\frac{10\ !}{4\ !\ 3\ !\ 3\ !}$ (B) 2100 (C) ${}^{10}C_4 \cdot {}^5C_3$ (D) $\frac{10\ !}{6\ !\ 3\ !\ 3\ !} \cdot \frac{1}{2}$

7. If all the letters of the word 'AGAIN' are arranged in all possible ways & put in dictionary order, then

(A) The 50^{th} word is NAAIG (B) The 49^{th} word is NAAGI

(C) The 51^{st} word is NAGAI (D) The 47^{th} word is INAGA

8. You are given 8 balls of different colour (black, white,...). The number of ways in which these balls can be arranged in a row so that the two balls of particular colour (say red & white) may never come together is:

(A) $8! - 2.7!$ (B) $6.\ 7!$ (C) $2.\ 6!.\ {}^7C_2$ (D) none

9. Consider the word 'MULTIPLE' then in how many other ways can the letters of the word 'MULTIPLE' be arranged ;

(A) without changing the order of the vowels equals 3359

(B) keeping the position of each vowel fixed equals 59

(C) without changing the relative order/position of vowels & consonants is 359

(D) using all the letters equals $4 \cdot 7! - 1$

10. The number of ways of arranging the letters AAAAA, BBB, CCC, D, EE & F in a row if the letter C are separated from one another is:

(A) ${}^{13}C_3 . \frac{12!}{5!\ 3!\ 2!}$ (B) $\frac{13!}{5!\ 3!\ 3!\ 2!}$ (C) $\frac{14!}{3!\ 3!\ 2!}$ (D) $11. \frac{13!}{6!}$

11. The number of non-negative integral solutions of $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le n$ (where n is a positive integer) is

(A) ${}^{n+3}C_3$ (B) ${}^{n+4}C_4$ (C) ${}^{n+5}C_5$ (D) ${}^{n+4}C_n$

12. There are 10 seats in the first row of a theatre of which 4 are to be occupied. The number of ways of arranging 4 persons so that no two persons sit side by side is:

(A) ${}^7C_4$ (B) $4.\ {}^7P_3$ (C) ${}^7C_3.\ 4!$ (D) 840

13. ${}^{50}C_{36}$ is divisible by

(A) 19 (B) 5^2 (C) 19^2 (D) 5^3

14. ${}^{2n}P_n$ is equal to

(A) $(n + 1)(n + 2) ..... (2n)$ (B) $2^n [1 . 3 . 5 .....(2n - 1)]$

(C) $(2) . (6) . (10) .... (4n - 2)$ (D) $n! ({}^{2n}C_n)$

15. The number of ways in which 200 different things can be divided into groups of 100 pairs, is:

(A) $\frac{200\ !}{2^{100}}$ (B) $\left(\frac{101}{2}\right)\left(\frac{102}{2}\right)\left(\frac{103}{2}\right) .... \left(\frac{200}{2}\right)$

(C) $\frac{200\ !}{2^{100}\ (100)\ !}$ (D) (1. 3. 5...... 199)

PART - IV : COMPREHENSION

Comprehension # 1

There are 8 official and 4 non-official members, out of these 12 members a committee of 5 members is to be formed, then answer the following questions.

1. Number of committees consisting of at least two non-official members, are
(A) 456 (B) 546 (C) 654 (D) 466

2. Number of committees in which a particular official member is never included, are
(A) 264 (B) 642 (C) 266 (D) 462

Comprehenssion # 2

Let n be the number of ways in which the letters of the word "RESONANCE" can be arranged so that vowels appear at the even places and m be the number of ways in which "RESONANCE" can be arrange so that letters R, S, O, A, appear in the order same as in the word RESONANCE, then answer the following questions.

3. The value of n is
(A) 360 (B) 720 (C) 240 (D) 840

4. The value of m is
(A) 3780 (B) 3870 (C) 3670 (D) 3760

Comprehension # 3

A mega pizza is to be sliced n times, and S_n denotes maximum possible number of pieces.

5.✍ Relation between S_n & S_{n-1}
(A) $S_n = S_{n-1} + n + 3$ (B) $S_n = S_{n-1} + n + 2$ (C) $S_n = S_{n-1} + n + 2$ (D) $S_n = S_{n-1} + n$

6.✍ If the mega pizza is to be distributed among 60 person, each one of them get atleast one piece then minimum number of ways of slicing the mega pizza is :
(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 11

Exercise-3

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**

* **Marked Questions may have more than one correct option.**

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

1. Let S = {1, 2, 3, 4}. The total number of unordered pairs of disjoint subsets of S is equal to
(A) 25 (B) 34 (C) 42 (D) 41
[IIT-JEE-2010, Paper-2, (5, –2), 79]

2. The total number of ways in which 5 balls of different colours can be distributed among 3 persons so that each person gets at least one ball is **[IIT-JEE 2012, Paper-1, (3, –1), 70]**
(A) 75 (B) 150 (C) 210 (D) 243

Paragraph for Question Nos. 3 to 4

Let a_n denote the number of all n-digit positive integers formed by the digits 0,1 or both such that no consecutive digits in them are 0. Let b_n = the number of such n-digit integers ending with digit 1 and c_n = the number of such n-digit integers ending with digit 0.

3. Which of the following is correct ? **[IIT-JEE 2012, Paper-2, (3, –1), 66]**

(A) $a_{17} = a_{16} + a_{15}$ (B) $c_{17} \neq c_{16} + c_{15}$ (C) $b_{17} \neq b_{16} + c_{16}$ (D) $a_{17} = c_{17} + b_{16}$

4. The value of b_6 is

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 11

5. Let $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$ be positive integers such that $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 20$. Then the number of such distinct arrangements $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ is **[JEE (Advanced) 2014, Paper-1, (3, 0)/60]**

6. Let $n \geq 2$ be an integer. Take n distinct points on a circle and join each pair of points by a line segment. Colour the line segment joining every pair of adjacent points by blue and the rest by red. If the number of red and blue line segments are equal, then the value of n is

[JEE (Advanced) 2014, Paper-1, (3, 0)/60]

7. Six cards and six envelopes are numbered 1, 2, 3, 4, 5, 6 and cards are to be placed in envelopes so that each envelope contains exactly one card and no card is placed in the envelope bearing the same number and moreover the card numbered 1 is always placed in envelope numbered 2. Then the number of ways it can be done is **[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) 264 (B) 265 (C) 53 (D) 67

8. Let n be the number of ways in which 5 boys and 5 girls can stand in a queue in such a way that all the girls stand consecutively in the queue. Let m be the number of ways in which 5 boys and 5 girls can stand in a queue in such a way that exactly four girls stand consecutively in the queue. Then the value of $\frac{m}{n}$ is **[JEE (Advanced) 2015, P-1 (4, 0) /88]**

9. A debate club consists of 6 girls and 4 boys. A team of 4 members is to be selected from this club including the selection of a captain (from among these 4 members) for the team. If the team has to include at most one boy. Then the number of ways of selecting the team is

[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (3, –1)/62]

(A) 380 (B) 320 (C) 260 (D) 95

10. Words of length 10 are formed using the letters A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Let x be the number of such words where no letter is repeated; and let y be the number of such words where exactly one letter is repeated twice and no other letter is repeated. Then, $\frac{y}{9x}$ = **[JEE(Advanced) 2017, Paper-1,(3, 0)/61]**

11. Let S = {1, 2, 3, ..., 9}. For k = 1, 2,......,5, let N_k be the number of subsets of S, each containing five elements out of which exactly k are odd. Then $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ =

[JEE(Advanced) 2017, Paper-2,(3, –1)/61]

(A) 210 (B) 252 (C) 126 (D) 125

12. The number of 5 digit numbers which are divisible by 4, with digits from the set {1, 2, 3, 4, 5} and the repetition of digits is allowed, is _______. **[JEE(Advanced) 2018, Paper-1,(3, 0)/60]**

13. In a high school, a committee has to be formed from a group of 6 boys M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 and 5 girls G_1, G_2, G_3, G_4, G_5. **[JEE(Advanced) 2018, Paper-2,(3, –1)/60]**

(i) Let α_1 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 5 members, having exactly 3 boys and 2 girls.

(ii) Let α_2 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has at least 2 members, and having an equal number of boys and girls.

(iii) Let α_3 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 5 members, at least 2 of them being girls.

(iv) Let α_4 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 4 members, having at least 2 girls and such that both M_1 and G_1 are **NOT** in the committee together.

LIST-I	**LIST-II**
(P) The value of α_1 is	(1) 136
(Q) The value of α_2 is	(2) 189
(R) The value of α_3 is	(3) 192
(S) The value of α_4 is	(4) 200
	(5) 381
	(6) 461

The correct option is

(A) $P \to 4$; $Q \to 6$; $R \to 2$; $S \to 1$ (B) $P \to 1$; $Q \to 4$; $R \to 2$; $S \to 3$

(C) $P \to 4$; $Q \to 6$; $R \to 5$; $S \to 2$ (D) $P \to 4$; $Q \to 2$; $R \to 3$; $S \to 1$

14. Five persons A,B,C,D and E are seated in a circular arrangement. If each of them is given a hat of one of the three colours red, blue and green, then the numbers of ways of distributing the hats such that the person seated in adjacent seats get different coloured hats is

[JEE(Advanced) 2019, Paper-2 ,(4, –1)/62]

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

1. **Statement-1 :** The number of ways of distributing 10 identical balls in 4 distinct boxes such that no box is empty is ${}^9C_3$. **[AIEEE 2011, I, (4, –1), 120]**

Statement-2 : The number of ways of choosing any 3 places from 9 different places is ${}^9C_3$.

(1) Statement-1 is true, Statement-2 is true; Statement-2 is a correct explanation for Statement-1.

(2) Statement-1 is true, Statement-2 is true; Statement-2 is **not** a correct explanation for Statement-1.

(3) Statement-1 is true, Statement-2 is false.

(4) Statement-1 is false, Statement-2 is true.

2. There are 10 points in a plane, out of these 6 are collinear. If N is the number of triangles formed by joining these points. then : **[AIEEE 2011, II, (4, –1), 120]**

(1) $N \le 100$ (2) $100 < N \le 140$ (3) $140 < N \le 190$ (4) $N > 190$

3. Assuming the balls to be identical except for difference in colours, the number of ways in which one or more balls can be selected from 10 white, 9 green and 7 black balls is : **[AIEEE-2012, (4, –1)/120]**

(1) 880 (2) 629 (3) 630 (4) 879

4. Let T_n be the number of all possible triangles formed by joining vertices of an n-sided regular polygon. If $T_{n+1} - T_n = 10$, then the value of n is : **[AIEEE - 2013, (4, –1),360]**

(1) 7 (2) 5 (3) 10 (4) 8

5. The number of integers greater than 6,000 that can be formed, using the digits 3, 5, 6, 7 and 8, without repetition, is : **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 216 (2) 192 (3) 120 (4) 72

6. If all the words (with or without meaning) having five letters, formed using the letters of the word SMALL and arranged as in a dictionary; then the position of the word SMALL is :

[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]

(1) 59 (2) 52 (3) 58 (4) 46

7. A man X has 7 friends, 4 of them are ladies and 3 are men. His wife Y also has 7 friends, 3 of them are ladies and 4 are men. Assume X and Y have no common friends. Then the total number of ways in which X and Y together can throw a party inviting 3 ladies and 3 men, so that 3 friends of each of X and Y are in this party, is **[JEE(Main) 2017, (4, – 1), 120]**

(1) 485 (2) 468 (3) 469 (4) 484

8. From 6 different novels and 3 different dictionaries, 4 novels and 1 dictionary are to be selected and arranged in a row on a shelf so that the dictionary is always in the middle. The number of such arrangements is : **[JEE(Main) 2018, (4, – 1), 120]**

(1) at least 500 but less than 750 (2) at least 750 but less than 1000

(3) at least 1000 (4) less than 500

9. Let S be the set of all triangles in the xy-plane, each having one vertex at the origin and the other two vertices lie on coordinate axes with integral coordinates. If each triangle in S has area 50 sq. units, then the number of elements in the set S is : **[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-2 (4, – 1), 120]**

(1) 32 (2) 36 (3) 18 (4) 9

10. Consider three boxes, each containing 10 balls labelled 1,2,....,10. Suppose one ball is randomly drawn from each of the boxes. Denote by n_i, the label of the ball drawn from the i^{th} box, (i = 1, 2, 3). Then, the number of ways in which the balls can be chosen such that $n_1 < n_2 < n_3$ is :

[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-1 (4, – 1), 120]

(1) 120 (2) 164 (3) 240 (4) 82

11. Let S = {1, 2, 3....., 100}. The number of non-empty subsets A of S such that the product of element in A is even is : **[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) $2^{50} + 1$ (2) $2^{50}(2^{50}–1)$ (3) $2^{100} – 1$ (4) $2^{50} –1$

Answers

EXERCISE -1

PART - I

Section (A) :

A-1. (i) 9 (ii) 20 (iii) 72 (iv) 326592

A-2. 90

A-3. (i) 40320 (ii) 37440 (iii) 2880 (iv) 1152 (v) 1152

A-4. (i) 4320 (ii) 720 (iii) 4320 (iv)14400 (v) 14400
(vi) 2880 (vii) 6720 (viii) 720 (ix) 3600

A-5. 5: 2 **A-6.** 200 **A-7.** 50 **A-8.** 7. $^7P_3$ **A-9.** $^{10}P_4$ **A-10.** 738
A-11. 9999 **A-12.** 65 **A-13.** 1170 **A-14.** 154 **A-15.** 886656 **A-16.** 229
A-17. 7350

A-18. (i) 4^n (ii) 3^n (iii) $\frac{3^n-1}{2}+1$ (iv) 2^n
(v) 2^{n-1} (vi) $^nC_1 \,.\, 3^{n-1}$

A-19. 63 **A-20.** **20** **A-21.** 62784 **A-22.** 280

Section (B) :

B-1. $\frac{18!}{(3!)^4 \;.\; (2!)^3 \;\; 4! \;\; 3!}$ **B-2.** 360360

B-3. 70
B-4. (a) 25 (b) 150. (c) 270000
B-6. 12 **B-7.** 144 **B-8.** 48 **B-9.** 1

Section (C) :

C-1. (i) 18 (ii) 23 (iii) 4
C-2. (i) 479 (ii) 256 (iii) 6 (iv) 473
C-3. 45
C-4. (i) 18, 11.$(2^0 + 2^1 + 2^2)$ $(3^0 + 3 + 3^2)$ $(5^\circ + 5)$
(ii) 3.2 + 1.1.2 = 8

Section (D) :

D-1. 55 **D-2.** 37

D-3. (i) $^{23}C_3$ (ii) $^{19}C_3$ (iii) $^{19}C_3 - 4.^9C_3$ (iv) $^{11}C_8$

D-4. $^9C_3 - 4 \times {}^5C_3 = 44$

D-5. (i) 150 (ii) 6 (iii) 25 (iv) 2
D-6. 1

D-7. (a) 44 (b) 109

Section (E) :

E-1. (i) 8 (ii) 10

E-2. $^{34}C_2 + {}^{33}C_2 + {}^{33}C_2 + {}^{34}C_1 \,.\, {}^{33}C_1$

E-3. 670

E-4. (i) 36 (ii) 1968 (iii) 1296

E-5. 126

PART - II

A-1.	(C)	**A-2.**	(D)	**A-3.**	(D)	**A-4.**	(B)	**A-5.**	(A)	**A-6.**	(B)	**A-7**	(B)
A-8.	(C)	**A-9.**	(A)	**A-10.**	(D)	**A-11.**	(C)	**A-12.**	(C)	**A-13.**	(D)	**A-14.**	(A)
A-15.	(B)	**A-16.**	(C)	**A-17.**	(A)	**A-18.**	(A)	**A-19.**	(A).	**A-20.**	(C)		

Section (B) :

B-1.	(C)	**B-2.**	(D)	**B-3.**	(C)	**B-4.**	(C)	**B-5.**	(A)	**B-6.**	(A)	***B-7.***	*(B)*

Section (C) :

C-1.	(D)	**C-2.**	(A)	**C-3.**	(A)	**C-4.**	(B)	**C-5.**	(A)	**C-6.**	(B)

Section (D) :

D-1.	(A)	**D-2.**	(A)	**D-3.**	(A)	**D-4.**	(C)	**D-5.**	(D)	**D-6.**	(A)

Section (E) :

E-1.	(A)	**E-2.**	(D)	**E-3.**	(C)

PART - III

1. (A) $\rightarrow$ (r), (B) $\rightarrow$ (p), (C) $\rightarrow$ (q), (D) $\rightarrow$ (s)

2. (A) - (q) ; (B) - (p) ; (C) - (s) ; (D) - (r)

EXERCISE -2

PART - I

1.	(A)	**2.**	(A)	**3.**	(C)	**4.**	(B)	**5.**	(D)	**6.**	(C)	**7.**	(A)
8.	(C)	**9.**	(D)	**10.**	(A)	**11.**	(C)	**12.**	(A)	**13.**	(A)	**14.**	(B)
15.	(A)	**16.**	(A)	**17.**	(A)	**18.**	(C)	**19.**	(A)				

PART - II

1.	01.16 or 01.17	**2.**	04.02	**3.**	34.02	**4.**	08.00	**5.**	10.00	**6.**	01.40
7.	46.20	**8.**	01.90	**9.**	90.00	**10.**	30.00	**11.**	18.00	**12.**	04.20
13.	31.00	**14.**	21.00	**15.**	98.00	**16.**	20.00	**17.**	15.00	**18.**	01.12
19.	16.50	**20.**	02.76								

PART - III

1.	(CD)	**2.**	(AB)	**3.**	(ACD)	**4.**	(CD)	**5.**	(AB)	**6.**	(BC)
7.	(ABCD)	**8.**	(ABC)	**9.**	(ABCD)	**10.**	(AD)	**11.**	(BD)	**12.**	(BCD)
13.	(AB)	**14.**	(ABCD)	**15.**	(BCD)						

PART - IV

1.	(A)	**2.**	(D)	**3.**	(B)	**4.**	(A)	**5.**	(D)	**6.**	(D)

EXERCISE -3

PART - I

1.	(D)	**2.**	(B)	**3.**	(A)	**4.**	(B)	**5.**	(7)	**6.**	(5)	**7.**	(C)
8.	5	**9.**	(A)	**10.**	(5)	**11.**	(C)	**12.**	(625)	**13.**	(C)	**14.**	(30.00)

PART - II

1.	(1)	**2.**	(1)	**3.**	(4)	**4.**	(2)	**5.**	(2)	**6.**	(3)	**7.**	(1)
8.	(3)	**9.**	(2)	**10.**	(1)	**11.**	(2)						

High Level Problems (HLP)

1. How many positive integers are there such that n is a divisor of one of the numbers 10^{40}, 20^{30}?

2. Six cards are drawn one by one from a set of unlimited number of cards, each card is marked with numbers – 1, 0 or 1. Number of different ways in which they can be drawn if the sum of the numbers shown by them vanishes, is:

3. A five letter word is to be formed such that the letters appearing in the odd numbered positions are taken from the letters which appear without repetition in the word "MATHEMATICS". Further the letters appearing in the even numbered positions are taken from the letters which appear with repetition in the same word "MATHEMATICS". The number of ways in which the five letter word can be formed is:

4. In how many ways 4 square are can be chosen on a chess-board, such that all the squares lie in a diagonal line.

5. Find the number of functions $f : A \to B$ where $n(A) = m$, $n(B) = t$, which are non decreasing,

6. Find the number of ways of selecting 3 vertices from a regular polygon of sides '2n+1' with vertices $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_{2n+1}$ such that centre of polygon lie inside the triangle.

7. A operation * on a set A is said to be binary, if $x * y \in A$, for all $x, y \in A$, and it is said to be commutative ,
if $x * y = y * x$ for all $x, y \in A$. Now if $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$, then find the following -
(i) Total number of binary operations of A
(ii) Total number of binary operation on A such that
$a_i * a_j \neq a_i * a_k$, if $j \neq k$.
(iii) Total number of binary operations on A such that $a_i * a_j < a_i * a_{j+1}$ $\forall$ i, j

8. The integers from 1 to 1000 are written in order around a circle. Starting at 1, every fifteenth number is marked (that is 1, 16, 31, ... etc.). This process in continued untill a number is reached which has already been marked, then find number of unmarked numbers.

9. Find the number of ways in which n '1' and n '2' can be arranged in a row so that upto any point in the row no. of '1' is more than or equal to no. of '2'

10. Find the number of positive integers less than 2310 which are relatively prime with 2310.

11. In maths paper there is a question on "Match the column" in which column A contains 6 entries & each entry of column A corresponds to exactly one of the 6 entries given in column B (and vice versa) written randomly. 2 marks are awarded for each correct matching & 1 mark is deducted from each incorrect matching. A student having no subjective knowledge decides to match all the 6 entries randomly. Find the number of ways in which he can answer, to get atleast 25 % marks in this question.

12. Find the number of positive unequal integral solution of the equation $x + y + z = 20$.

13. If we have 3 identical white flowers and 6m identical red flowers. Find the number of ways in which a garland can be made using all the flowers.

14. Number of times is the digit 5 written when listing all numbers from 1 to 10^5?

15. The number of combinations of n letters together out of 3n letters of which n are a and n are b and the rest unlike.

16. In a row, there are 81 rooms, whose door no. are 1,2,.......,81, initially all the door are closed. A person takes 81 round of the row, numbers as 1^{st} round, 2^{nd} round .... 81^{th} round. In each round, he interchage the position of those door number, whose number is multiple of the round number. Find out after 81^{st} round,How many doors will be open.

17. Mr. Sibbal walk up 16 steps, going up either 1 or 2 steps with each stride there is explosive material on the 8^{th} step so he cannot step there. Then number of ways in which Mr. Sibbal can go up.

18. Number of numbers of the form xxyy which are perfect squares of a natural number.

19. A batsman scores exactly a century by hitting fours and sixes in twenty consecutive balls. In how many different ways can he hit either six or four or play a dot ball?

20. In how many ways can two distinct subsets of the set A of $k(k \geq 2)$ elements be selected so that they have exactly two common elements.

21. How many 5 digit numbers can be made having exactly two identical digit.

22. Find the number of 3-digit numbers. (including all numbers) which have any one digit is the average of the other two digits.

23. In how many ways can$(2n + 1)$ identical balls be placed in 3 distinct boxes so that any two boxes together will contain more balls than the third box.

24. Let f(n) denote the number of different ways in which the positive integer 'n' can be expressed as sum of 1s and 2s.
for example $f(4) = 5$ {2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1}. Now that order of 1s and 2s is important. Then determine $f(f(6))$

25. Prove that $(n!)!$ is divisible by $(n!)^{(n-1)!}$

26. A user of facebook which is two or more days older can send a friend request to some one to join facebook.
If initially there is one user on day one then find a recurrence relation for a_n where a_n is number of users after n days.

27. Let X = {1, 2, 3,.....,10}. Find the the number of pairs {A, B} such $A \subseteq X$. $B \subseteq X$. $A \neq B$ and $A \cap B = \{5,7,8\}$.

28. Consider a 20-sided convex polygon K, with vertices $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ in that order. Find the number of ways in which three sides of K can be chosen so that every pair among them has at least two sides of K between them. (For example $(A_1A_2, A_4A_5, A_{11}A_{12})$ is an admissible triple while $(A_1A_2, A_4A_5, A_{19}A_{20})$ is not).

29. Find the number of 4-digit numbers (in base 10) having non-zero digits and which are divisible by 4 but not by 8.

30. Find the number of all integer-sided isosceles obtuse-angled triangles with perimeter 2008.

31. Let ABC be a triangle. An interior point P of ABC is said to be good if we can find exactly 27 rays emanating from P intersecting the sides of the triangle ABC such that the triangle is divided by these rays into 27 smaller triangles of equal area. Determine the number of good points for a given triangle

32. Let $\sigma = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ be a permutation of (1, 2, 3, ..., n). A pair (a_i, a_j) is said to correspond to an inversion of σ, if $i < j$ but $a_i > a_j$. (Example : In the permutation (2, 4, 5, 3, 1), there are 6 inversions corresponding to the pairs (2, 1), (4, 3), (4, 1), (5, 3) (5, 1), (3, 1) .) How many permutations of (1, 2, 3, ... n), $(n \geq 3)$, have exactly **two** inversions.?

HLP Answers

1.	2301	**2.**	141	**3.**	540	**4.**	364
5.	$(t+m-1)c_m$ ways	**6.**	$\frac{2n+1}{3}({}^{2n}C_2 - 3.{}^{n}C_2)$	**7.**	(i) n^{n^2} (ii) $(n!)^n$ (iii) 1		
8.	800	**9.**	$\frac{{}^{2n}C_n}{n+1}$	**10.**	480	**11.**	56 ways
12.	144	**13.**	$3m^2 + 3m + 1$	**14.**	50000	**15.**	$(n + 2).\ 2^{n-1}$
16.	9	**17.**	441	**18.**	1		
19.	$\frac{20!}{10!\ 10!} + \frac{20!}{7!\ 12!} + \frac{20!}{4!\ 14!\ 2!} + \frac{20!}{16!\,3!}$			**20.**	$\frac{k(k-1)}{4}((3)^{k-2}-1)$		
21.	45360	**22.**	121	**23.**	$\frac{n(n+1)}{2}$		
24.	377	**26.**	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	**27.**	2186		
28.	**520**	**29.**	729	**30.**	86		
31.	$^{26}C_2$	**32.**	$\frac{(n+1)(n-2)}{2}$				

Exercise-1

Marked questions are recommended for Revision.
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A) : Fundamental principle of counting, problem based on selection of given object & arrangement of given object.

खण्ड (A) : गणना के आधारभूत सिद्धान्त, दी गई वस्तुओं के चुनाव, विन्यास पर आधारित समस्याएँ

A-1. There are nine students (5 boys & 4 girls) in the class. In how many ways
(i) One student (either girl or boy) can be selected to represent the class.
(ii) A team of two students (one girl & one boy) can be selected.
(iii) Two medals can be distributed. (no one get both)
(iv) One prize for Maths, two prizes for Physics and three prizes for Chemistry can be distributed. (No student can get more than one prize in same subject & prizes are distinct)

एक कक्षा में नौ विद्यार्थी है। (5 लड़के एवं 4 लड़कियाँ) कितने तरीकों से
(i) एक विद्यार्थी (लड़का या लड़की) चुना जा सकता है जो कक्षा का प्रतिनिधि है।
(ii) दो विद्यार्थीयों का एक दल (एक लड़की और एक लड़का) चुना जा सकता है।
(iii) दो पुरस्कार वितरीत किये जाते है। (किसी भी एक को दोनों न मिले)
(iv) गणित के लिए एक पुरस्कार, भौतिक के लिए दो पुरस्कार और रसायन के लिए तीन पुरस्कार कितने प्रकार से वितरीत किये जाते है। (जबकि किसी भी विद्यार्थी को एक विषय में एक से अधिक पुरूस्कार नहीं मिल सकता तथा पुरूस्कार भिन्न–भिन्न है)

Ans. (i) 9 (ii) 20 (iii) 72 (iv) 326592

Sol. (i) $5 + 4 = 9$
(ii) $5 \times 4 = 20$
(iii) $9 \times 8 = 72$
(iv) $9\ (9 \times 8)\ (9 \times 8 \times 7) = 326592$

A-2. There are 10 buses operating between places A and B. In how many ways a person can go from place A to place B and return to place A, if he returns in a different bus?

दो स्थानों A और B के बीच 10 बसे संचालित होती हैं। एक व्यक्ति स्थान A से स्थान B पर जाकर वापस स्थान A पर कितने तरीकों से आ सकता है यदि वह वापसी में दूसरी बस का उपयोग करें।

Ans. 90

Sol. $10 \times 9 = 90$

A-3. There are 4 boys and 4 girls. In how many ways they can sit in a row
(i) there is no restriction. **Ans.** 40320
(ii) not all girls sit together. **Ans.** 37440
(iii) no two girls sit together. **Ans.** 2880
(iv) all boys sit together and all girls sit together . **Ans.** 1152
(v) boys and girls sit alternatively. **Ans.** 1152

चार लड़के एवं चार लड़कियाँ है। वे एक पंक्ति में कितने तरीके से बैठ सकते है जबकि–
(i) कोई प्रतिबन्ध न हो! **Ans.** 40320
(ii) सभी लड़कियाँ साथ न बैठे। **Ans.** 37440
(iii) कोई भी दो लड़कियाँ साथ न बैठे। **Ans.** 2880
(iv) सभी लड़के साथ–साथ एवं सभी लड़कियाँ साथ–साथ बैठे हो। **Ans.** 1152
(v) लड़के एवं लड़कियाँ एकान्तर क्रम में बैठे हो। **Ans.** 1152

Sol. (i) Boys-4 Girls-4

Total number of ways = 8! = 40320

(ii) Number of ways in which all girls sit together

Girls				

4! 5!

Required number of ways = 8! – 5!4! = 37440

(iii) ${}^5C_4 . 4!$

Required number of ways = 4! ${}^5C_4 . 4!$ = 2880

(iv)

All Boys	All Girls
4!	4!

Ways = 4! 4! 2! = 1152

(v) $\frac{G}{B}\ \frac{B}{G}\ \frac{G}{B}\ \frac{B}{G}\ \frac{G}{B}\ \frac{B}{G}\ \frac{G}{B}\ \frac{B}{G}$ 4! 4! 2! = 1152

Hindi (i) लड़के-4 लड़कियाँ -4

कुल तरीके = 8! = 40320

(ii) सभी लड़कियों के साथ बैठने के तरीके

Girls				

4! 5!

अभीष्ट तरीके = 8! – 5!4! = 37440

(iii) ${}^5C_4 . 4!$

अभीष्ट तरीके = 4! ${}^5C_4 . 4!$ = 2880

(iv)

सभी लड़के	सभी लड़कियाँ
4!	4!

तरीके = 4! 4! 2! = 1152

(v) $\frac{G}{B}\ \frac{B}{G}\ \frac{G}{B}\ \frac{B}{G}\ \frac{G}{B}\ \frac{B}{G}\ \frac{G}{B}\ \frac{B}{G}$ 4! 4! 2! = 1152

A-4. Find the number of words those can be formed by using all letters of the word 'DAUGHTER'. If

(i) Vowels occurs in first and last place. **Ans.** 4320

(ii) Start with letter G and end with letters H. **Ans.** 720

(iii) Letters G, H, T always occurs together. **Ans.** 4320

(iv) No two letters of G, H, T are consecutive **Ans.** 14400

(v) No vowel occurs together **Ans.** 14400

(vi) Vowels always occupy even place. **Ans.** 2880

(vii) Order of vowels remains same. **Ans.** 6720

(viii) Relative order of vowels and consonants remains same. **Ans.** 720

(ix) Number of words are possible by selecting 2 vowels and 3 consonants. **[16JM110180]**

Ans. 3600

'DAUGHTER'. शब्द के सभी अक्षरों से बनने वाले शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि

(i) स्वर प्रथम एवं अन्तिम स्थान पर हो। **Ans.** 4320

(ii) G से आरम्भ एवं H से अन्त हो। **Ans.** 720

(iii) G,H,T सदैव साथ–साथ हो **Ans.** 4320

(iv) G,H,T में से कोई भी दो क्रमागत न हो। **Ans.** 14400

(v) कोई भी स्वर साथ–साथ न हो। **Ans.** 14400

(vi) स्वर सम स्थानों पर आये। **Ans.** 2880

(vii) स्वरों का क्रम अपरिवर्तित हो। **Ans.** 6720

(viii) स्वरों एवं व्यंजनों का सापेक्ष क्रम समान हो **Ans.** 720

(ix) दो स्वर एवं तीन व्यंजनों से बनने वाले शब्दों की संख्या **Ans.** 3600

Sol. (i) Vowels $\downarrow$ 3 Consenents $\downarrow$ 5

$^3C_2 . 2! \, 6! = 6 \times 6! = 4320$

(ii)

G						H

Start with G end with H

$6! = 720$

(iii)

GHT					

$3! \, 6! = 6 \times 6! = 4320$

(iv) $\uparrow - \uparrow - \uparrow - \uparrow - \uparrow - \uparrow$ $\quad 5! . {}^6C_3 . 3!$

6 gap

(v) Same as above

(vi) – – – – – – – – $^4C_3 . 3! . 5!$

(vii) – – – – – – – – $^8C_3 . 1 . 5! = {}^8C_3 . 5! = 6720$

(viii) $3! . 5! = 720$

(ix) $^3C_2 . {}^5C_3 \; . 5! = 3.10 . 5! = 120 \times 30 = 3600$

Hindi (i) स्वर $\downarrow$ 3 व्यंजक $\downarrow$ 5

$^3C_2 . 2! \, 6! = 6 \times 6! = 4320$

(ii)

G						H

G से शूरू एवं H से अन्त होने वाले शब्दों की संख्या

$6! = 720$

(iii)

GHT					

$3! \, 6! = 6 \times 6! = 4320$

(iv) $\uparrow - \uparrow - \uparrow - \uparrow - \uparrow - \uparrow$ $\quad 5! . {}^6C_3 . 3!$

6 gap

(v) उपर की तरह

(vi) – – – – – – – – $^4C_3 . 3! . 5!$

(vii) – – – – – – – – $^8C_3 . 1 . 5! = {}^8C_3 . 5! = 6720$

(viii) $3! . 5! = 720$

(ix) $^3C_2 . {}^5C_3 \; . 5! = 3.10 . 5! = 120 \times 30 = 3600$

A-5. Words are formed by arranging the letters of the word "STRANGE" in all possible manner. Let m be the number of words in which vowels do not come together and 'n' be the number of words in which vowels come together. Then find the ratio of m: n.(where m and n are coprime natural number)
शब्द "STRANGE" के अक्षरों को सभी सम्भव तरीकों से व्यवस्थित कर शब्द बनाये जाते हैं। मानाकि 'm' उन शब्दों की संख्या है जिनमें स्वर एक साथ नहीं आते हैं और 'n' उन शब्दों की संख्या है जिनमें स्वर एक साथ आते है, तो अनुपात m: n का मान ज्ञात कीजिए। (जहाँ m और n सह अभाज्य प्राकृत संख्या है)

Ans. 5: 2

Sol. $\dfrac{5! \; {}^6C_2 \; . \; 2!}{6! \;\; 2!} = \dfrac{5}{2}$

A-6. In a question paper there are two parts part A and part B each consisting of 5 questions. In how many ways a student can answer 6 questions, by selecting atleast two from each part? **[16JM110181]**
एक प्रश्न पत्र में दो भाग है भाग A और भाग B तथा प्रत्येक भाग में 5 प्रश्न हैं। एक छात्र 6 प्रश्नों के उत्तर कितने तरीकों से दे सकता है यदि उसे प्रत्येक भाग में से कम से कम दो प्रश्न अवश्य चयन करने है।

Ans. 200

Sol. Total no. of selected question

Part A	Part B	Number of ways
2	4	${}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10 \times 5 = 50$
3	3	${}^5C_3 \times {}^5C_3 = 10 \times 10 = 100$
4	2	${}^5C_4 \times {}^5C_2 = 5 \times 10 = 50$

Total no. of ways = 200

Hindi. कुल चयनित प्रश्नों की संख्या

भाग A	भाग B	तरीकों की संख्या
2	4	${}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10 \times 5 = 50$
3	3	${}^5C_3 \times {}^5C_3 = 10 \times 10 = 100$
4	2	${}^5C_4 \times {}^5C_2 = 5 \times 10 = 50$

कुल तरीके = 200

A-7. How many 3 digit even numbers can be formed using the digits 1, 2, 3, 4, 5 (repetition allowed)?
अंको 1, 2, 3, 4, 5 की सहायता से 3 अंको की कितनी सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि अंको की पुनरावृत्ति हो सकती है।

Ans. 50

Sol. Total even numbers

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}$ (numbers whose unit digit is 2)

$5 \times 5 = 25$

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{4}$ (numbers whose unit digit is 4)

$5 \times 5 = 25$

on adding = 50

Hindi. कुल सम संख्याएँ

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{2}$ (संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2 है)

$5 \times 5 = 25$

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{4}$ (संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 4 है।)

$5 \times 5 = 25$

जोड़ने पर = 50

A-8. Find the number of 6 digit numbers that ends with 21 (eg. 537621), without repetition of digits.
अंको की बिना पुनरावृत्ति के 6 अंको की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, जो 21 से समाप्त होती है? (उदाहरण 537621)

Ans. $7 \cdot {}^7P_3$

Sol. Total number of 6 digit number that ends with 21
6 अंकों की कुल संख्यायें जो 21 से समाप्त होती है।

i.e.

↓ 7	↓ 7	↓ 6	↓ 5	2	1

Hence total number of ways is
$7 \times 7 \times 6 \times 5 = 7 \times {}^7P_3$

कुल तरीकों की संख्या $= 7 \times 7 \times 6 \times 5 = 7 \times {}^7P_3$

A-9. The digits from 0 to 9 are written on slips of paper and placed in a box. Four of the slips are drawn at random and placed in the order. How many out comes are possible?
कागज की पर्चियों पर 0 से 9 तक अंक लिखकर एक बक्से में डाल दी जाती है। बक्से में से यादृच्छिक रूप से 4 पर्चियाँ निकालकर क्रम से रखी जाती हैं। सम्भावित नतीजों की संख्या कितनी होगी?

Ans. ${}^{10}P_4$

Sol.

10	9	8	7

total ways कुल तरीके $= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \dfrac{10!}{6!} = {}^{10}P_4$

A-10. Find the number of natural numbers from 1 to 1000 having none of their digits repeated.
1 से 1000 तक ऐसी प्राकृत संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें एक भी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती है।

Ans. 738

Sol. Number of one digit numbers = 9
Number of 2 digits numbers $= 9 \times 9 = 81$
Number of 3 digits numbers $= 9 \times 9 \times 8 = 648$
total numbers $= 9 + 81 + 648 = 738$

Hindi. एक अंक की संख्याओं की संख्या = 9
2 अंकों की संख्याओं की संख्या $= 9 \times 9 = 81$
3 अंकों की संख्याओं की संख्या $= 9 \times 9 \times 8 = 648$
कुल संख्याएँ $= 9 + 81 + 648 = 738$

A-11. A number lock has 4 dials, each dial has the digits 0, 1, 2, ...,9. What is the maximum unsuccessful attempts to open the lock?
एक संख्यात्मक ताले के 4 डायल हैं। प्रत्येक डायल में 0, 1, 2, ..., 9 तक अंक हैं। ताले को खोलने के अधिकतम असफल प्रयासों की संख्या कितनी होगी ?

Ans. 9999

Sol. Total unsuccessful attempts to open the lock is
= (total attempt – successful attempt) $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 - 1 = 10000 - 1 = 9999$

Hindi. ताले को खोलने की कुल असफल प्रयास
= (कुल प्रयास – सफल प्रयास) $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 - 1 = 10000 - 1 = 9999$

A-12.✍ In how many ways we can select a committee of 6 persons from 6 boys and 3 girls, if atleast two boys & atleast two girls must be there in the committee? **[16JM110182]**
6 लड़को और 3 लड़कियों में से 6 व्यक्तियों की एक समिति कितने तरीकों से बनाई जा सकती है यदि समिति में कम से कम दो लड़के और कम से कम दो लड़कियों को अवश्य शामिल किया जाये।

Ans. 65

Sol. **case-I** If select 4 boys and 2 girls
$\therefore \quad {}^6C_4 \times {}^3C_2 = 15 \times 3 = 45$
case-II If select 3 boys and 3 girls
$\therefore \quad {}^6C_3 \times {}^3C_3 = 20 \times 1 = 20$
Hence total number of ways
$= 45 + 20 = 65$

Hindi. **स्थिति-I** यदि 4 लड़के व 2 लड़कियां चुनी जाये
$\therefore \quad {}^6C_4 \times {}^3C_2 = 15 \times 3 = 45$
स्थिति-II यदि 3 लड़के व 3 लड़कियां चुनी जाये
$\therefore \quad {}^6C_3 \times {}^3C_3 = 20 \times 1 = 20$
अतः कुल तरीकों की संख्या $= 45 + 20 = 65$

A-13.✍ In how many ways 11 players can be selected from 15 players, if only 6 of these players can bowl and the 11 players must include atleast 4 bowlers?
15 खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों की एक टीम कितने तरीकों से चुनी जा सकती है यदि इन खिलाड़ियों में से केवल 6 खिलाड़ी गेंदबाजी कर सकते हैं और 11 खिलाड़ियों में कम से कम 4 गेंदबाज अवश्य शामिल किये जायें।

Ans. 1170

Sol. Total No. of bowlers = 6
Now, (i) If 4 bowlers are including the no. of ways
selecting 11 players out of 15 players $= {}^6C_4 \times {}^9C_7 = 15 \times 36 = 540$

(ii) If 5 bowlers are selected = ${}^6C_5 \times {}^9C_6 = 6 \times 84 = 504$
(iii) If all 6 bowlers are selected = ${}^6C_6 \times {}^9C_5 = 1 \times 126 = 126$
Hence total no. of ways = 540 + 504 + 126 = 1170

Hindi. कुल गेंदबाज = 6
(i) यदि 4 गेंदबाज शामिल किये जाये तो 15 खिलाड़ियों में से 11 खिलाड़ियों के चयन के तरीके
$= {}^6C_4 \times {}^9C_7 = 15 \times 36 = 540$
(ii) यदि 5 गेंदबाज चयनित किये जाते हैं।
$= {}^6C_5 \times {}^9C_6 = 6 \times 84 = 504$
(iii) यदि सभी 6 गेंदबाज चयनित किये जाते हैं।
$= {}^6C_6 \times {}^9C_5 = 1 \times 126 = 126$
अतः कुल तरीके = 540 + 504 + 126 = 1170

A-14. A committee of 6 is to be chosen from 10 persons with the condition that if a particular person 'A' is chosen, then another particular person B must be chosen.
10 व्यक्तियों में से 6 की एक समिति कितने तरीकों से बनाई जा सकती है यदि एक विशेष व्यक्ति 'A' को चुना जाता है, तो दूसरे विशेष व्यक्ति 'B' को अवश्य चुनना होगा?

Ans. 154

Sol. If 'A' is not chosen, then number of selections = ${}^9C_6$
If 'A' is chosen, then 'B' is also chosen, then number of selection = ${}^8C_4$
$\therefore$ number of ways = ${}^9C_6 + {}^8C_4 = 154$

Hindi. यदि 'A' का चयन न हो, तो चयनों की संख्या = ${}^9C_6$
यदि 'A' का चयन हो, तो 'B' का भी चयन करना है, तो चयनों की संख्या = ${}^8C_4$
$\therefore$ कुल तरीके = ${}^9C_6 + {}^8C_4 = 154$

A-15. In how many ways we can select 5 cards from a deck of 52 cards, if each selection must include atleast one king. **[16JM110183]**
52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्ते कितने तरीकों से चुने जा सकते हैं यदि प्रत्येक चयन में कम से कम एक बादशाह अवश्य आये?

Ans. 886656

Sol. Total number of ways
$= {}^4C_1 \times {}^{48}C_4 + {}^4C_2 \times {}^{48}C_3 + {}^4C_3 \times {}^{48}C_2 + {}^4C_4 \times {}^{48}C_1 = 4 \times 194580 + 6 \times 17276 + 4 \times 1128 + 1 \times 48$
$= 778320 + 103776 + 4512 + 1 \times 48 = 886656$

Hindi. कुल तरीकों की संख्या $= {}^4C_1 \times {}^{48}C_4 + {}^4C_2 \times {}^{48}C_3 + {}^4C_3 \times {}^{48}C_2 + {}^4C_4 \times {}^{48}C_1$
$= 4 \times 194580 + 6 \times 17276 + 4 \times 1128 + 1 \times 48 = 778320 + 103776 + 4512 + 1 \times 48 = 886656$

A-16. How many four digit natural numbers not exceeding the number 4321 can be formed using the digits 1, 2, 3, 4, if repetition is allowed?
अंक 1,2,3,4 की सहायता से चार अंकों की कितनी प्राकृत संख्याएँ बनाई जा सकती है जो 4321 से बड़ी नहीं हो, जबकि अंको की पुनरावृत्ति हो सकती हैं।

Ans. 229

Sol. Total no. of ways

1				= 64
	4	4	4	
2				= 64
	4	4	4	
3				= 64
	4	4	4	
4	1			= 16
		4	4	

4	2			= 16
		4	4	

4	3	1		= 4
			4	

4	3	2	1	= 1

Adding = 229

Hindi. कुल तरीके

1				= 64
	4	4	4	

2				= 64
	4	4	4	

3				= 64
	4	4	4	

4	1			= 16
		4	4	

4	2			= 16
		4	4	

4	3	1		= 4
			4	

4	3	2	1	= 1

जोड़ने पर = 229

A-17. How many different permutations are possible using all the letters of the word MISSISSIPPI, if no two I's are together?

शब्द MISSISSIPPI के सभी अक्षरों का उपयोग करते हुये कुल कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, यदि कोई भी दो I साथ–साथ नहीं आयें ?

Ans. 7350

Sol. Total no. of M are = 1

Total no. of I are = 4

Total no. of P are = 2

Total no. of S are = 4

First we arrange all the words other than I's are

$$\frac{7!}{2!\ \ 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2} = 105$$

Now, there are 8 places which can be fulfilled by I's i.e. the number of ways is ${}^8C_4$

Total required no. = 105 × ${}^8C_4$ = $\frac{105 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ = 105 × 70 = 7350

Hindi. M की कुल संख्या = 1

I की कुल संख्या = 4

P की कुल संख्या = 2

S की कुल संख्या = 4

पहले हम I को छोड़कर सभी अक्षरों को व्यवस्थित करते हैं।

$$\frac{7!}{2!\ \ 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2} = 105$$

अब 8 स्थान बचेंगें जो कि I द्वारा भरे जा सकते हैं इसके तरीकों की संख्या ${}^8C_4$

कुल अभीष्ट शब्दों की संख्या = 105 × ${}^8C_4$ = $\frac{105 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ = 105 × 70 = 7350

A-18. If A = {1, 2, 3, 4 .....n} and $B \subset A$; $C \subset A$, then the find number of ways of selecting

(i) Sets B and C

(ii) Order pair of B and C such that $B \cap C = \phi$

(iii) Unordered pair of B and C such that $B \cap C = \phi$

(iv) Ordered pair of B and C such that $B \cup C = A$ and $B \cap C = \phi$

(v) Unordered pair of B and C such that $B \cup C = A$, $B \cap C = \phi$

(vi) Ordered pair of B and C such that $B \cap C$ is singleton

यदि A = {1, 2, 3, 4 .....n} तथा $B \subset A$; $C \subset A$, तब चुनने के क्रमचयों की संख्या है–

(i) समुच्चय B तथा C

(ii) B तथा C के क्रमित युग्म जबकि $B \cap C = \phi$

(iii) B तथा C के अक्रमित युग्म जबकि $B \cap C = \phi$

(iv) B तथा C के क्रमित युग्म जबकि $B \cup C = A$ तथा $B \cap C = \phi$

(v) B तथा C के अक्रमित युग्म जबकि $B \cup C = A$, $B \cap C = \phi$

(vi) B तथा C के क्रमित युग्म जबकि $B \cap C$ एकल समुच्चय है।

Ans. (i) 4^n (ii) 3^n (iii) $\frac{3^n - 1}{2} + 1$ (iv) 2^n

(v) 2^{n-1} (vi) ${}^nC_1 \cdot 3^{n-1}$

Sol. (i) There are four choices for each element

(a) Present in Set B but not in Set C

(b) Present in Set C but not in Set B

(c) Present in both sets B & C

(d) Not present in any Set

so 4^n

(ii) There are three choices for each element

(a) Present in Set B but not in Set C

(b) Present in Set C but not in Set B

(c) Not present in any Set

so 3^n

(iii) Every pair is being repeated twice except ϕ in last part

Hence $\frac{3^n - 1}{2} + 1$

(iv) There are two choices for each element

(a) Present in Set B but not in Set C

(b) Present in Set C but not in Set B so 2^n

(v) Every pair is being repeated twice in last part so $2^n/2 = 2^{n-1}$

(vi) One element is in both sets and rest (n – 1) elements has 3 choices each.

A	B	
✓	✓	${}^NC_1$
✓	×	3^{N-1}
×	✓	
×	×	

Now required ways ${}^nC_1 \times 3^{n-1} = N3^{n-1}$

Hindi. (i) प्रत्येक अवयव के लिए चार विकल्प

(a) समुच्चय B में उपस्थित परन्तु समुच्चय C में नहीं

(b) समुच्चय C में उपस्थित परन्तु समुच्चय B में नहीं

(c) B तथा C दोनों समुच्चय में उपस्थित

(d) किसी भी समुच्चय में उपस्थित नहीं। अतः 4^n

(ii) प्रत्येक अवयव के लिए तीन विकल्प

(a) समुच्चय B में उपस्थित परन्तु समुच्चय C में नहीं

(b) समुच्चय C में उपस्थित परन्तु समुच्चय B में नहीं

(c) किसी भी समुच्चय में उपस्थित नहीं। अतः 3^n

(iii) प्रत्येक युग्म में दो बार पुनरावृत्ति है (अन्तिम भाग में ϕ को छोड़कर) अतः $\frac{3^n-1}{2}+1$

(iv) प्रत्येक अवयव के लिए दो विकल्प

(a) समुच्चय B में उपस्थित परन्तु समुच्चय C में नहीं

(b) समुच्चय C में उपस्थित परन्तु समुच्चय B में नहीं अतः 2^n

(v) प्रत्येक युग्म की अन्तिम भाग में दो बार पुनरावृत्ति है। अतः $2^n/2 = 2^{n-1}$

(vi) दोनों समुच्चय में एक अवयव है तथा शेष (n – 1) अवयव प्रत्येक में 3 विकल्प रखता है।

A	B	
✓	✓	${}^NC_1$
✓	×	3^{N-1}
×	✓	
×	×	

अभीष्ट क्रमचय ${}^nC_1 \times 3^{n-1} = N3^{n-1}$

A-19. For a set of six true or false statements, no student in a class has written all correct answers and no two students in the class have written the same sequence of answers. What is the maximum number of students in the class, for this to be possible. **[16JM110184]**

छः सत्य या असत्य कथनों के एक समुच्चय के बारे में, एक कक्षा के किसी भी छात्र ने सभी सही उत्तर नही दिये है तथा किन्ही भी दो छात्रों ने उत्तरों का समान क्रम में उत्तर नही दिया है तो ऐसा संभव हो इसके लिए कक्षा में अधिकतम छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. 63

Sol. Each statement can be answered in two ways. Hence all the six statements can be answered in $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$ ways.

So, there are almost 64 sequences of answers are possible. Out of these one is totally correct which no student has attempted. So, there are almost 64 – 1 = 63 students in the class.

Hindi. प्रत्येक कथन का उत्तर दो तरीके से दिया जा सकता है। अतः इन सभी छः कथनों का उत्तर $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$ तरीके से दे सकते है।

इसलिए, उत्तर देने के तरीकों के 64 विभिन्न युग्म संभव है। इन तरीकों में एक तरीके में सभी प्रश्नों केउत्तर सही होगें जिसे किसी भी छात्र नें नही दिया होगा। अतः कक्षा में संभव अधिकतम छात्रों की संख्या = 64 – 1 = 63 छात्र

A-20. How many arithmetic progressions with 10 terms are there, whose first term is in the set {1, 2, 3, 4} and whose common difference is in the set {3, 4, 5, 6, 7} ?

10 पदो वाली कुल कितनी समान्तर श्रेणियाँ बनायी जा सकती है जिनका प्रथम पद समुच्चय {1, 2, 3, 4} का अवयव है तथा सार्व अन्तर समुच्चय {3, 4, 5, 6, 7} का अवयव है।

Ans. **20**

Sol. First term can be chosen in 4 ways and the common difference again in 5 ways.

Hence possible number of arithmetic progressions

$= 4 \times 5 = 20$

Hindi. प्रथम पद 4 तरीको से चुना जा सकता है तथा सार्व अन्तर भी 5 तरीकों से चुना जा सकता है अत :

संभव समान्तर श्रेणियों की कुल संख्या $= 4 \times 5 = 20$

A-21. Find the number of all five digit numbers which have atleast one digit repeated. **[16JM110185]**
पाँच अकों की उन सभी संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिये जिनमें कम से कम एक अंक की पुनरावृति हो रही हो।

Ans. 62784

Sol. The number of all 5-digited number is = $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90000$ and the number of those five digited numbers which have no digit repeated = $9 \times {}^9P_4 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27216$

$\therefore$ Required number = $90000 - 27216 = 62784$

Hindi. 5 अंको की कुल संख्याओं की संख्या = $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90000$ तथा 5 अंको की उन संख्याओ की संख्या जिनमें किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नही हो रही है = $9 \times {}^9P_4 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27216$

$\therefore$ अभीष्ट संख्यायें = $90000 - 27216 = 62784$

A-22. There are 3 white, 4 blue and 1 red flowers. All of them are taken out one by one and arranged in a row in the order. How many different arrangements are possible (flowers of same colurs are similar)?
3 सफेद, 4 नीले और 1 लाल फूल में से एक के बाद एक फूल को निकालकर उन्हें एक पंक्ति में व्यवस्थित किया जाता हैं। ऐसी कितनी विभिन्न व्यवस्थाएँ सम्भव हैं ? (समान रंग के फूल समान हैं।)

Ans. 280

Sol. Total number of possible arrangements are

$$\frac{8!}{3!\ \ 4!} = 280$$

कुल सम्भव विन्यासों की संख्या = $\frac{8!}{3!\ \ 4!} = 280$

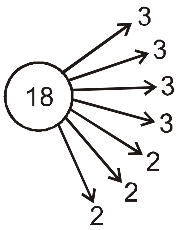
Section (B) : Grouping and Circular Permutation

Section (B) :

B-1. In how many ways 18 different objects can be divided into 7groups such that four groups contains 3 objects each and three groups contains 2 objects each.
18 विभिन्न वस्तुओं को 7 समूहों में कितने प्रकार से विभाजित किया जा सकता है यदि इनमें से 4 समूहों में से प्रत्येक में 3 एवं शेष 3 समूहों में से प्रत्येक में 2 वस्तुएँ हों?

Ans. $\frac{18!}{(3!)^4\ .\ (2!)^3\ \ 4!\ \ 3!}$

Sol.



Total ways कुल तरीके = $\frac{18!}{(3!)^4(2!)^3} \times \frac{1}{4!} \times \frac{1}{3!}$

B-2. In how many ways fifteen different items may be given to A, B, C such that A gets 3, B gets 5 and remaining goes to C.
15 विभिन्न वस्तुओं को A, B तथा C में कितने प्रकार से बाँटा जा सकता है, जबकि A को 3, B को 5 तथा शेष वस्तुऐं C को देते हो।

Ans. 360360

Sol. No. of ways 3 item can be given to A is ${}^{15}C_3$
then no. of ways 5 item can be given to B is ${}^{12}C_5$
Rest are given to C is ${}^7C_7$
Hence total no. of ways if all item is given is
${}^{15}C_3 \times {}^{12}C_5 \times {}^7C_7 \qquad = 455 \times 792 \times 1 = 360360$

Hindi. A को 3 वस्तुएँ देने के कुल तरीके = ${}^{15}C_3$
तब B को 5 वस्तुएँ देने कुल तरीके = ${}^{12}C_5$
अतः शेष बची हुई वस्तुएँ C को ${}^7C_7$ तरीके से दी जा सकती है।
यदि सभी वस्तुएँ दी गयी हो, तो कुल तरीके
${}^{15}C_3 \times {}^{12}C_5 \times {}^7C_7 \qquad = 455 \times 792 \times 1 = 360360$

B-3. Find number of ways of distributing 8 different items equally among two children.
8 विभिन्न वस्तुओं को दो बच्चों में समान रूप से कितने प्रकार से बाँट सकते है।

Ans. 70

Sol. Total no. of ways = First distribute 4 items from 8 to a child, then remaining 4 item to other $= {}^8C_4 \times {}^4C_4 = 70 \times 1 = 70$

Hindi. कुल तरीके = पहले 4 वस्तुओं को 8 में से एक बच्चे को देते हैं, इसके पश्चात् बची हुई 4 वस्तुएँ दूसरे बच्चे को देते हैं। $= {}^8C_4 \times {}^4C_4 = 70 \times 1 = 70$

B-4. (a) In how many ways can five people be divided into three groups? **[16JM110189]**
(b) In how many ways can five people be distributed in three different rooms if no room must be empty?
(c) In how many ways can five people be arranged in three different rooms if no room must be empty and each room has 5 seats in a single row.
(a) 5 व्यक्तियों को 3 समूहों में कितने प्रकार से विभाजित किया जा सकता है?
(b) 5 व्यक्तियों को 3 विभिन्न कमरों में कितने प्रकार से बाँटा जा सकता है यदि कोई भी कमरा खाली न रहे?
(c) 5 व्यक्तियों को 3 कमरों में कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है यदि कोई भी कमरा खाली न रहे तथा प्रत्येक कमरे की एक पंक्ति में पाँच स्थान है।

Ans. (a) 25 (b) 150. (c) 270000

Sol. (a) five people can be divided into three groups in the following way;
1, 1, 3 or 1, 2, 2
Hence, total number of ways

$$= \frac{5!}{3!} \times \frac{1}{2!} + \frac{5!}{(2!)^2} \times \frac{1}{2!} = 10 + 15 = 25$$

(b) The three different rooms can be filled in the following ways;

Room	I	II	III
People	1	1	3

or

Room	I	II	III
People	1	2	2

Number of ways = ways in which such groups can be formed ways in which the groups can be × arranged in the three different rooms

Case - I Number of ways $= \left(\frac{5!}{3!} \times \frac{1}{2!}\right) 3! = 60$

Case - II Number of ways $= \left(\frac{5!}{(2!)^2} \times \frac{1}{2!}\right) 3! = 90$

Hence, required number of ways = 60 + 90 = 150.

(c) In this case, the positioning of the people amongst themselves is also to be taken into account.

Case - I Number of ways $= 60 \times {}^5C_3 \times {}^5C_1 \times {}^5C_1 \times 3! = 90000$

Case - I Number of ways $= 90 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_1 \times 2! \times 2! = 180000$

Hence, required number of ways = 90000 + 180000 = 270000.

Hindi. (a) 5 व्यक्तियों को 3 समूहों में निम्न तरीको से विभाजित किया जा सकता है।
1, 1, 3 या 1, 2, 2

अतः कुल तरीके $= \frac{5!}{3!} \times \frac{1}{2!} + \frac{5!}{(2!)^2} \times \frac{1}{2!} = 10 + 15 = 25$

(b) 3 विभिन्न कमरों को निम्न प्रकार से भरा जा सकता है।

Room	I	II	III
People	1	1	3

or

Room	I	II	III
People	1	2	2

कुल तरीके = समूहों को बनाने के तरीके × समूहों को तीन कमरों में व्यवस्थित करने के तरीके

स्थिति - I कुल तरीके $= \left(\frac{5!}{3!} \times \frac{1}{2!}\right) 3! = 60$

स्थिति - II कुल तरीके = $\left(\dfrac{5!}{(2!)^2} \times \dfrac{1}{2!}\right)$ 3 ! = 90

अतः अभीष्ट तरीके = 60 + 90 = 150.

(c) इस स्थिति में व्यक्तियों को आपस में स्थिति को भी गणना में लेना होगा।

स्थिति - I कुल तरीके = $60 \times {}^5C_3 \times {}^5C_1 \times {}^5C_1 \times 3! = 90000$

स्थिति - I कुल तरीके = $90 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_1 \times 2! \times 2! = 180000$

अतः अभीष्ट तरीके = 90000 + 180000 = 270000.

B-5. Prove that : $\dfrac{200!}{(10!)^{20}\ \ 19!}$ is an integer **[16JM110190]**

सिद्ध कीजिए: $\dfrac{200!}{(10!)^{20}\ \ 19!}$ एक पूर्णांक हैं।

Sol. Number of ways of distributing 200 objects into 20 groups each containing 10 objects

$= \dfrac{200!}{(10!)^{20}\ .20!}$ = an integer say x

then 20x = $\dfrac{200!}{(10!)^{20}\ .19!}$ which must be an integer.

Hindi. 200 वस्तुओं को 20 समूहों में, प्रत्येक में 10 वस्तुएं है, बांटने के कुल तरीके $= \dfrac{200!}{(10!)^{20}\ .20!}$ = एक पूर्णांक होगा, माना यह x है।

तब 20 x = $\dfrac{200!}{(10!)^{20}\ .19!}$ जो कि एक पूर्णांक संख्या हो

B-6. In how many ways 5 persons can sit at a round table, if two of the persons do not sit together?
एक गोल मेज के चारों ओर 5 व्यक्ति कितने तरीकों से बैठ सकते हैं यदि इनमें से दो विशेष व्यक्ति एक साथ नहीं बैठते हैं?

Ans. 12

Sol. First find if all the person are sitting in a round table is 4! = 24 ways
if two of the person are sitting together i.e.
3! × 2! = 12 ways
Hence required number of ways = 24 – 12 = 12 ways

Sol. यदि सभी व्यक्ति गोल मेज के चारों तरफ बैठते हैं, तो तरीकों की कुल संख्या 4! = 24 तरीके
यदि दो विशेष व्यक्ति एक साथ बैठते हैं, तो तरीकों की संख्या = 3! × 2! = 12 तरीके
अतः अभीष्ट तरीकों की संख्या = 24 – 12 = 12 तरीके

B-7. In how many ways four men and three women may sit around a round table if all the women are together?
चार पुरूष तथा तीन महिलाऐं एक गोल मेज के चारों और कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि सभी महिलाऐं साथ में बैठे?

Ans. 144

Sol. Total number of women are sit together then total number of person is 5 hence required ways = 4! × 3!
= 24 × 6 = 144

Hindi. सभी महिलाओं को एक साथ बैठाते हुए व्यक्तियों को गोल मेज की चारो और बैठने के कुल तरीके = 4! × 3!
= 24 × 6 = 144

B-8. Seven persons including A, B, C are seated on a circular table. How many arrangements are possible if B is always between A and C? **[16JM110187]**
A, B, C सहित सात व्यक्ति एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं जबकि B सदैव A तथा C के मध्य बैठे?

Ans. 48

Sol. Here B is always between A and C so i.e. either ABC or CBA
so total required number of ways is $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$ ways

Hindi. यदि B सदैव A व C के साथ बैठता है तो या तो ABC या CBA
अतः कुल अभीष्ट तरीकों की संख्या $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$ तरीके

B-9. In how many ways four '+' and five '–' sign can be arranged in a circles so that no two '+' sign are together.
चार '+' तथा पांच '–' चिन्हों को एक वृत्त के चारों और कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है यदि कोई भी दो '+' चिन्ह् साथ न हों?

Ans. 1

Sol. By simple diagram it is obvious that there is only one way.

Hindi. सरल चित्र की सहायता से यह स्पष्ट है कि ऐसा एक ही तरीका सम्भव है।

Section (C) : Problem based on distinct and identical objects and divisors
खण्ड (C) : दी गई वस्तुओं के समरूप तथा भिन्न–भिन्न होने से सम्बन्धित समस्या

C-1. Let N = 24500, then find **[DRN1101]**

(i) The number of ways by which N can be resolved into two factors.
(ii) The number of ways by which 5N can be resolved into two factors.
(iii) The number of ways by which N can be resolved into two coprime factors.

माना N = 24500 तो ज्ञात करो :

(i) उन तरीकों की संख्या, जिनमें N को दो गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता है
(ii) उन तरीकों की संख्या, जिनमें 5N को दो गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता है
(iii) उन तरीकों की संख्या, जिनमें N को दो सह–अभाज्य गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता है

Ans. (i) 18 (ii) 23 (iii) 4

Sol. (i) $N = 2^2 . 5^3 . 7^2$

$$\frac{3.4.3}{2} = 18$$

(ii) $5N = 2^2 . 5^4 . 7^2$

$$\frac{3.5.3+1}{2} = 23$$

(iii) $N = 2^2 . 5^3 . 7^2$

$2^{3-1} = 4$

C-2. Find number of ways of selection of one or more letters from AAAABBCCCDEF

(i) there is no restriction. **Ans.** 479
(ii) the letters A & B are selected atleast once. **Ans.** 256
(iii) only one letter is selected. **Ans.** 6
(iv) atleast two letters are selected **Ans.** 473

AAAABBCCCDEF से एक या अधिक अक्षरों के चयन के तरीके ज्ञात कीजिए जबकि

(i) कोई प्रतिबन्ध न हो **Ans.** 479
(ii) A एवं B का कम से कम एक बार चयन अवश्य हो। **Ans.** 256
(iii) केवल एक अक्षर चुना गया हो। **Ans.** 6
(iv) कम से कम दो अक्षरों को चुना गया हो। **Ans.** 473

Sol. (i) AAAABBCCCDEF

$A \rightarrow 4$
$B \rightarrow 2$
$C \rightarrow 3$ $(4 + 1)(2 + 1)(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 = 5 . 3 . 4 . 2 . 2 . 2 - 1 = 480 - 1 = 479$
$D \rightarrow 1$

E $\rightarrow$ 1
F $\rightarrow$ 1

(ii) A $\rightarrow$ 3
B $\rightarrow$ 1
C $\rightarrow$ 3 $(3 + 1)(1 + 1)(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16 \times 16 = 256$
D $\rightarrow$ 1
E $\rightarrow$ 1
F $\rightarrow$ 1

(iii) Only one letter selected ${}^6C_1 = 6$ (केवल एक अक्षर चुनने के तरीके ${}^6C_1 = 6$)

(iv) Atleast two letters selected =Total–(no letter is selected)–(One letter selected) = 480–1– 6= 473
कम से कम एक अक्षर चुनने के तरीके = कुल–(एक भी अक्षर नहीं चुनने के तरीके)–(एक अक्षर चुनने के तरीके) = 480– 1 – 6= 473

C-3. Find number of ways of selection of atleast one vowel and atleast one consonant from the word TRIPLE
TRIPLE शब्द के अक्षरों में से कम से कम एक स्वर तथा कम से कम एक व्यंजन का चयन कितने प्रकार से कर सकते है?

Ans. 45

Sol. Total number of ways out of 4 consonant and 2 vowels is
${}^2C_1 \times \{{}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4\} + {}^2C_2 \times \{{}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4\}$
$= 2 \times \{4 + 6 + 4 + 1\} + 1 \times [4 + 6 + 4 + 1] = 2 \times 15 + 15 = 45$

C-4. Find number of divisiors of 1980. **[16JM110186]**
(i) How many of them are multiple of 11? find their sum
(ii) How many of them are divisible by 4 but not by 15.
1980 के भाजकों की संख्या ज्ञात कीजिए।
(i) इनमें से कितने 11 के गुणज है, इनका योग भी ज्ञात कीजिए।
(ii) इनमें से कितने 4 से भाज्य लेकिन 15 से नहीं।

Ans. 36
(i) 18, $11.(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3 + 3^2)(5^0 + 5)$
(ii) $3.2 + 1.1.2 = 8$

Sol. $1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11,$
number of divisiors of 1980 = $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36$
(i) $3.3.2 = 18$
sum = $11.(1 + 2 + 2^2) . (1 + 3 + 3^2) . (1 + 5)$
(ii) $3.2 + 1.1.2 = 8$

HINDI. $1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11,$
1980 के भाजकों की संख्या $= (2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36$
(i) $3.3.2 = 18$
भाजकों का योग $= 11.(1 + 2 + 2^2) . (1 + 3 + 3^2) . (1 + 5)$
(ii) divisible by 4 – divisible by 60
4 से विभाजित – 60 से विभाजित $= 1 \times 3 \times 2 \times 2 - 1 \times (1 + 1) \times 1 \times (1+ 1) = 12 - 4 = 8$

Section (D) : Multinomial theorem & Dearrangement
खण्ड (D) : वृत्तीय क्रमचय तथा बहुपदीय प्रमेय पर आधारित समस्याएँ

D-1. Find number of negative integral solution of equation $x + y + z = -12$ **[16JM110188]**
समीकरण $x + y + z = -12$ के ऋणात्मक पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. 55

Sol. Here $-10 \le x, y, z \le -1$
Using multinomial theorem
Find the coefficient of x^{12} in this expansion of

$$(x + x^2 + ...+ x^{10})^3 = x^3 (1 + x + x^2 + ...+ x^9)^3 = x^3 (1 - x^{10})^3 . (1 - x)^{-3} = {}^{11}C_9 = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

Hindi. यहाँ $-10 \le x, y, z \le -1$

बहुपदीय गुणन प्रमेय के प्रयोग से

$(x + x^2 + ...+ x^{10})^3$ के प्रसार में x^{12} का गुणांक ज्ञात करने पर

$= x^3(1 + x + x^2 + ...+ x^9)^3 = x^3(1 - x^{10})^3 . (1 - x)^{-3} = {}^{11}C_9 = \frac{11 \times 10}{2} = 55$

D-2. In how many ways it is possible to divide six identical green, six identical blue and six identical red among two persons such that each gets equal number of item?

छः एक समान हरी, छः एक समान नीली तथा छः एक समान लाल वस्तुओं को दो व्यक्तियों में कितने प्रकार से बाँट सकते हैं, जबकि प्रत्येक व्यक्ति समान संख्या में वस्तुऐं प्राप्त करता हो।

Ans. 37

Sol. $x_1 + x_2 + x_3 = 9$

Coefficient of x^9 in $(1 + x + ... + x^6)^3$

Coefficient of x^9 in $(1 - x^7)^3 (1 - x)^{-3}$

Coefficient of x^9 in $(1 - 3x^7) (1 - x)^{-3}$

$= {}^{9+3-1}C_2 - 3 . {}^{2+3-1}C_2 = 55 - 18 = 37$

Hindi. $x_1 + x_2 + x_3 = 9$

के प्रसार में x^9 का गुणांक $(1 + x + ... + x^6)^3$

के प्रसार में x^9 का गुणांक $(1 - x^7)^3 (1 - x)^{-3}$

के प्रसार में x^9 का गुणांक $(1 - 3x^7) (1 - x)^{-3} = {}^{9+3-1}C_2 - 3 . {}^{2+3-1}C_2 = 55 - 18 = 37$

D-3. Find the number of solutions of $x + y + z + w = 20$ under the following conditions:

(i) x, y, z, w are whole number

(ii) x, y, z, w are natural number

(iii) $x, y, z, w \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

(iv) x, y, z, w are odd natural number

$x + y + z + w = 20$ के हलों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि :

(i) x, y, z, w पूर्ण संख्यायें हों।

(ii) x, y, z, w प्राकृत संख्यायें हों।

(iii) $x, y, z, w \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

(iv) x, y, z, w विषम प्राकृत संख्यायें हों।

Ans. (i) ${}^{23}C_3$ (ii) ${}^{19}C_3$ (iii) ${}^{19}C_3 - 4.{}^9C_3$ (iv) ${}^{11}C_8$

Sol. (i) If zero value are include i.e. $x, y, z, w \geq 0$

So Required no of solution $= {}^{20+4-1}C_{4-1} = {}^{23}C_3$ **Ans.**

(ii) If zero value are exclude i.e. $x, y, z, w \geq 1$

$x + y + z + w = 20 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ $\{\because y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0\}$

So Required number of solution $= {}^{16+4-1}C_{4-1} = {}^{19}C_3$ **Ans.**

(iii) $x + y + z + w = 10$

$1 \leq x, y, z, w \leq 10$ = coefficient of x^{10} in $(x + x^2 + ...+ x^7)^4$

= coefficient of x^6 in $(1 + x + x^2 + ...+ x^6)^4 = {}^{4+6-1}C_6 = {}^9C_6$

Alter

First find any one is exceed 10

i.e. $10 + x_1 + y + z + w = 20$ Hence $x_1, y, z, w \geq 1$

So $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$

number of solution $= {}^9C_3$

Hence number of solution if all variable may exceed 10, zero values exclude is ${}^{19}C_3 - 4.{}^9C_3$

(iv) Let the number be $x = 2x_1 + 1$

$y = 2x_2 + 1$

$z = 2x_3 + 1$

$w = 2x_4 + 1$

So A/Q $(2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) + (2x_3 + 1) + (2x_4 + 1) = 20$

$\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 16 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

So Required no of solution = ${}^{11}C_3$ **Ans.**

Hindi. (i) यदि शून्य मान को शामिल किया जाये।

$\Rightarrow \quad x, y, z, w \geq 0$

अतः आवश्यक हलों की संख्या $= {}^{20+4-1}C_{4-1} = {}^{23}C_3$ **Ans.**

(ii) यदि शून्य हल शामिल नहीं किया जाये $x, y, z, w \geq 1$

$x + y + z + w = 20$

$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16 \qquad \{\because y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0\}$

इसलिए आवश्यक हलों की संख्या $= {}^{16+4-1}C_{4-1} = {}^{19}C_3$ **Ans.**

(iii) $x + y + z + w = 10$

$1 \leq x, y, z, w \leq 10$

$= (x + x^2 + ...+ x^7)^4$ में x^{10} का गुणांक $= (1 + x + x^2 + ...+ x^6)^4$ में x^6 का गुणांक

$= (1 - x)^{-4}$ में x^6 का गुणांक $= {}^{4+6-1}C_6 = {}^9C_6$

वैकल्पिक हल :

सर्वप्रथम इन चरों में से कोई एक 10 से बड़ा हो, तो

$10 + x_1 + y + z + w = 20$ अतः $x_1, y, z, w \geq 1$

जहाँ $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$

हलों की संख्या $= {}^9C_3$

अतः हलों की संख्या यदि सभी चर 10 से बड़े हो, शून्य सम्मिलित नहीं हो $= {}^{19}C_3 - 4.{}^9C_3$

वैकल्पिक :

(iv) माना संख्याँ
$x = 2x_1 + 1$
$y = 2x_2 + 1$
$z = 2x_3 + 1$
$w = 2x_4 + 1$

अतः प्रश्नानुसार $(2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) + (2x_3 + 1) + (2x_4 + 1) = 20$

$\Rightarrow \quad 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 16 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

इसलिए आवश्यक हलों की संख्या $= {}^{11}C_3$

D-4. A person has 4 distinct regular tetrahedron dice. The number printed on 4 four faces of dice are –3, –1, 1 and 3. The person throws all the 4 dice. Find the total number of ways of getting sum of number appearing on the bottom face of dice equal to 0.

एक व्यक्ति के पास चार भिन्न–भिन्न समचतुष्फलक पासे है। पासों की चार सतहों पर –3, –1, 1, 3 लिखा गया है। व्यक्ति सभी चार पासों को फेकता है तथा पासे की निचली सतह पर आने वाली संख्याओं का योग शून्य होने के कुल तरीके ज्ञात कीजिए।

Ans. ${}^9C_3 - 4 \times {}^5C_3 = 44$

Sol. Required = Coefficient of x^0 in $(x^{-3} + x^{-1} + x + x^3)^4$

= Coefficient of x^{12} in $(x^0 + x^2 + x^4 + x^6)^4$

= Coefficient of x^6 in $(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^4$

= Coefficient of x^6 in $(1 - x^4)^4 (1 - x)^{-4}$

$= {}^9C_3 - 4 \times {}^5C_3 = 44$

Hindi. अभीष्ट मान $= (x^{-3} + x^{-1} + x + x^3)^4$ में x^0 का गुणांक

$= (x^0 + x^2 + x^4 + x^6)^4$ में x^{12} का गुणांक

$= (x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^4$ में x^6 का गुणांक

$= (1 - x^4)^4 (1 - x)^{-4}$ x^6 में का गुणांक

$= {}^9C_3 - 4 \times {}^5C_3 = 44$

D-5. Five balls are to be placed in three boxes in how many diff. ways can be placed the balls so that no box remains empty if
(i) balls and boxes are diff,
(ii) balls identical and boxes diff.
(iii) balls diff. and boxes identical
(iv) balls as well as boxes are identical
पाँच गेंदों को 3 सन्दूकों में इस प्रकार रखा जाता है कि कोई भी संन्दूक खाली न रहे तो तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि
(i) गेंदे एवं सन्दूक भिन्न–भिन्न हो।
(ii) गेंदे समान हो तथा सन्दूक भिन्न–भिन्न हो।
(iii) गैदें भिन्न–भिन्न एवं सन्दूक समान हो।
(iv) गैदें एवं सन्दूक दोनों समान हो

Ans. (i) 150, (ii) 6, (iii) 25, (iv) 2

Sol. Let Boxes contain balls 2, 2, 1 or 3, 1, 1 माना सन्दुकों मे गेंदे 2, 2, 1 या 3, 1, 1 है।

(i) $\dfrac{5!}{2!\ 2!\ 1!\ 2!} \times 3! + \dfrac{5!\ \times 3!}{1!\ 1!\ 3!\ 2!} = 150$
(2, 2, 1) (1, 1, 3)

(ii) $1 \times \dfrac{3!}{2!} + 1 \times \dfrac{3!}{2!} = 6$
(2, 2, 1) (1, 1, 3)

(iii) $\dfrac{5!}{2!\ 2!\ 1!\ 2!} \times 1 + \dfrac{5!}{1!\ 1!\ 3!\ 2!} \times 1 = 25$

(iv) (2, 2, 1) + (1, 1, 3) = 2 ways (तरीके)

D-6. Let D_n represents derangement of 'n' objects. If $D_{n+2} = a\, D_{n+1} + b\, D_n\ \forall\ n \in N$, then find $\dfrac{b}{a}$

माना D_n, 'n' वस्तुओं की पुर्नव्यवस्था को व्याक्त करता है यदि $D_{n+2} = a\, D_{n+1} + b\, D_n\ \forall\ n \in N$, तब $\dfrac{b}{a}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. 1

Sol. $a = b = n - 1$

D-7. A person writes letters to five friends and addresses on the corresponding envelopes. In how many ways can the letters be placed in the envelopes so that
(a) all letters are in the wrong envelopes?
(b) at least three of them are in the wrong envelopes?
एक व्यक्ति अपने 5 मित्रों को पत्र लिखता है और संगत लिफाफो पर पते लिखता है। ये पत्र लिफाफों में कितने प्रकार से रखे जा सकते हैं ताकि
(a) सभी पत्र गलत लिफाफों में हो?
(b) कम से कम तीन पत्र गलत लिफाफों में हों?

Ans. (a) 44 (b) 109

Sol. (a) Required number of ways $= 5!\left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}\right) = 44$

(b) Required number of ways = ${}^5C_2\, D_3 + {}^5C_1\, D_4 + {}^5C_0\, D_5$

$$= 10 \times 3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) + 5 \times 4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)$$

$$+ 1 \times 5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right) = 109$$

Hindi. (a) अभीष्ट तरीकों की संख्या $= 5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right) = 44$

(b) अभीष्ट तरीकों की संख्या = ${}^5C_2\, D_3 + {}^5C_1\, D_4 + {}^5C_0\, D_5$

$$= 10 \times 3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) + 5 \times 4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)$$

$$+ 1 \times 5\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right) = 109$$

Section (E) : Miscellaneous

खण्ड (E) :

E-1. (i) Find exponent of 3 in 20 !

20 ! में 3 का घातांक ज्ञात कीजिए।

(ii) Find number of zeros at the end of 45!.

45! के अन्त में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. (i) 8 (ii) 10

Sol. (i) Exponent of 3 in 20! (20! में 3 का घातांक)

$$\Rightarrow \left[\frac{20}{3}\right]+\left[\frac{20}{3^2}\right]+\left[\frac{20}{3^5}\right]+ \ldots\ldots\ldots$$

$= 6 + 2 + 0 = 8$

(ii) Exponent of 2 in 45! is

$$\left[\frac{45}{2}\right]+\left[\frac{45}{2^2}\right]+\left[\frac{45}{2^3}\right]+\left[\frac{45}{2^4}\right]+\left[\frac{45}{2^5}\right]+\left[\frac{45}{2^6}\right] = 22 + 11 + 5 + 2 + 1 + 0 = 41$$

Exponent of 5 in 45! is

$$\left[\frac{45}{5}\right]+\left[\frac{45}{5^2}\right]+\left[\frac{45}{5^3}\right] = 9 + 1 + 0 = 10$$

So no. of zeros at the end of 45! is 10

Hindi. (ii) 45! में 2 का घातांक

$$\left[\frac{45}{2}\right]+\left[\frac{45}{2^2}\right]+\left[\frac{45}{2^3}\right]+\left[\frac{45}{2^4}\right]+\left[\frac{45}{2^5}\right]+\left[\frac{45}{2^6}\right] = 22 + 11 + 5 + 2 + 1 + 0 = 41$$

45! में 5 का घांताक

$$\left[\frac{45}{5}\right]+\left[\frac{45}{5^2}\right]+\left[\frac{45}{5^3}\right] = 9 + 1 + 0 = 10$$

अतः 45! के अंत में शून्यों की संख्या 10 होगी।

E-2. Find the total number of ways of selecting two number from the set of first 100 natural number such that difference of their square is divisible by 3

प्रथम प्राकृत संख्याओं के समुच्चय से दो संख्याएं 100 जिनके वर्गो का अन्तर 3 से विभाजित है, को चुनने के तरीके होगें।

Ans. ${}^{34}C_2 + {}^{33}C_2 + {}^{33}C_2 + {}^{34}C_1 \,.\, {}^{33}C_1$

Sol. Total number of ways of selecting two number of the type 3λ ($\lambda \in I$) is ${}^{33}C_2$

Total number of ways of selecting two number of the type $3\lambda + 1$ $(\lambda \in I)$ is ${}^{34}C_2$

Total number of ways of selecting two number of the type $3\lambda + 2(\lambda \in I)$ is ${}^{33}C_2$

Total number of ways of selecting one number of the type $3\lambda + 1$ and one number of the type $3\lambda + 2$ $(\lambda \in I)$ is ${}^{33}C_1 . {}^{34}C_1$

Hindi 3λ $(\lambda \in I)$ प्रकार की दो संख्याओं के चुनने के तरीके ${}^{33}C_2$ है।

$3\lambda + 1$ $(\lambda \in I)$ प्रकार की दो संख्याओं के चुनने के तरीके ${}^{34}C_2$ है।

$3\lambda + 2(\lambda \in I)$ प्रकार की दो संख्याओं के चुनने के तरीके ${}^{33}C_2$

$(3\lambda + 1)$ प्रकार की एक संख्या तथा $3\lambda + 2$ $(\lambda \in I)$ प्रकार की एक संख्या को चुनने के तरीके ${}^{33}C_1 . {}^{34}C_1$

E-3. A four digit number plate of car is said to be lucky if sum of first two digit is equal to sum of last two digit. Then find the total number of such lucky plate. (Assume 0000, 0011, 0111, ... all are four digit number)

एक कार की चार अंक की नम्बर प्लेट को लक्की कहा जाएगा यदि इसके प्रथम दो अंको का योगफल, अंतिम दो अंको के योगफल के बराबर है। तब इस प्रकार की कुल लक्की प्लेट की कुल संख्या है–.

(माना कि 0000, 0011, 0111, ... सभी चार अंक संख्या है)

Ans. 670

Sol. Total number of lucky plate having sum of first two digits = 0 is 1^2

Total number of lucky plate having sum of first two digits = 1 is 2^2

Total number of lucky plate having sum of first two digits = 2 is 3^2

⋮ ⋮

Total number of lucky plate having sum of first two digits = 9 is 10^2

Total number of lucky plate having sum of first two digits = 10 is 9^2

⋮ ⋮

Total number of lucky plate having sum of first two digits = 18 is 1^2

$\Rightarrow$ Total number of lucky plate $= 1^2 + 2^2 + ...+9^2 + 10^2 + 9^2 + ...+ 2^2 + 1^2 = 670$

Hindi. लक्की प्लेट की कुल संख्या है जिनके प्रथम दो अंको का योग = 0 है 1^2 है।

लक्की प्लेट की कुल संख्या है जिनके प्रथम दो अंको का योग = 1 है 2^2 है।

लक्की प्लेट की कुल संख्या है जिनके प्रथम दो अंको का योग = 2 है 3^2 है।

⋮ ⋮

लक्की प्लेट की कुल संख्या है जिनके प्रथम दो अंको का योग = 9 है 10^2 है।

लक्की प्लेट की कुल संख्या है जिनके प्रथम दो अंको का योग = 10 है 9^2 है।

⋮ ⋮

लक्की प्लेट की कुल संख्या है जिनके प्रथम दो अंको का योग = 18 है 1^2 है।

$\Rightarrow$ कुल लक्की प्लेट = $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots + 9^2 + 10^2 + 9^2 + \ldots\ldots\ldots + 2^2 + 1^2 = 670$

E-4. Let each side of smallest square of chess board is one unit in length.

(i) Find the total number of squares of side length equal to 3 and whose side parallel to side of chess board.

(ii) Find the sum of area of all possible squares whose side parallel to side of chess board.

(iii) Find the total number of rectangles (including squares) whose side parallel to side of chess board.

शतरंज के बोर्ड पर सबसे छोटे वर्ग की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 1 इकाई है।

(i) 3 लम्बाई की भुजा के वर्गो की संख्या ज्ञात कीजिए, जबकि भुजा, शतरंज बोर्ड के भुजा के समान्तर है।

(ii) सभी सम्भावित वर्गो का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जबकि वर्ग की भुजा, शतरंज बोर्ड के भुजा के समान है।

(iii) आयतों (वर्गो को शामिल करते हुए) की कुल संख्या होगी जबकि आयत की भुजा शतरंज बोर्ड के समान्तर है।

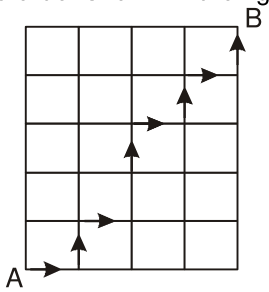
Ans. (i) 36 (ii) 1968 (iii) 1296

Sol. **(i)** Obvious

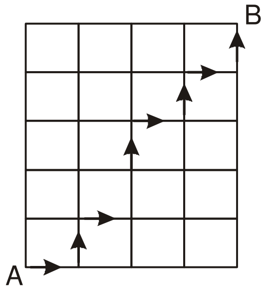
(ii) $(8^2 \times 1^2) + (7^2 \times 2^2) + (6^2 \times 2^2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1^2 \times 8^2) = 1968$

(iii) ${}^9C_2 \times {}^9C_2 = 1296$

E-5. A person is to walk from A to B. However, he is restricted to walk only to the right of A or upwards of A. but not necessarily in the order shown in the figure. Then find the number of paths from A to B.



एक व्यक्ति को A से B तक पहुँचना है जबकि वह बिन्दु A के दांयी तरफ या A के ऊपर की तरफ ही चलेगा यह प्रतिबन्ध दिया गया है परंतु दिये गये चित्र के क्रम में चले आवश्यक नही है तो उस व्यक्ति के A से B तक जाने के विभिन्न पथों की संख्या ज्ञात कीजिये। **[16JM110191]**



Ans. 126

Sol. No matter which path the person choses, he must walk 9 steps in total, 4 in the right direction and 5 in the upwards direction. So we have to arrange 9 steps (or which 4 are of one kind and 5 of the other), which can be done in $\frac{9!}{4!5!}$ ways.

Hence, the required number of ways $= \frac{9!}{4!5!} = \frac{9.8.7.6.5!}{4.3.2.1.5!} = 126$

Hindi. वह व्यक्ति किसी भी पथ से जाये उसे कुल 9 कदम चलना पड़ेगा, 4 दांयी तरफ की दिशा में तथा 5 ऊपर की दिशा में अतः हमें 9 कदमों (4 एक प्रकार के तथा 5 दूसरे प्रकार के) को व्यवस्थित करना है, जो कि $\frac{9!}{4!5!}$ तरीकों से किया जा सकता है

अतः अभीष्ट तरीको की संख्या = $\frac{9!}{4!5!} = \frac{9.8.7.6.5!}{4.3.2.1.5!} = 126$.

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Section (A) : Fundamental principle of counting, problem based on selection of given object & arrangement of given object, rank of word

खण्ड (A) : गणना के आधारभूत सिद्धान्त, दी गई वस्तुओं के चुनाव, विन्यास पर आधारित समस्याएँ, दिये गये शब्द की वरीयता पर आधारित समस्याएँ

A-1. The number of signals that can be made with 3 flags each of different colour by hoisting 1 or 2 or 3 above the other, is:
विभिन्न रंगो के 3 झण्डों का उपयोग करके कुल कितने संकेत बनाए जा सकते हैं जबकि एक झण्डे के ऊपर 1 या 2 या 3 झण्डे फहराये जा सकते हैं–
(A) 3 (B) 7 (C*) 15 (D) 16

Sol. Total number of signals can be made from 3 flags each of different colour by hoisting 1 or 2 or 3 above.
i.e. $^3p_1 + {^3p_2} + {^3p_3} = 3 + 6 + 6 = 15$

Sol. विभिन्न रंगों के 3 झण्डों को उपयोग कर बनाये गये कुल संकेतों की संख्या, जबकि एक झण्डे के ऊपर 1 या 2 या 3 झण्डे फहराये जा सकते हैं।
अर्थात् $^3p_1 + {^3p_2} + {^3p_3} = 3 + 6 + 6 = 15$

A-2. 8 chairs are numbered from 1 to 8. Two women & 3 men wish to occupy one chair each. First the women choose the chairs from amongst the chairs marked 1 to 4, then the men select the chairs from among the remaining. The number of possible arrangements is: **[16JM110192]**
आठ कुर्सियों पर 1 से 8 तक नम्बर लगे हैं। 2 औरतें और 3 आदमी प्रत्येक एक–एक कुर्सी पर बैठना चाहते हैं। पहले औरतें 1 से 4 नम्बर लगी हुई कुर्सियों में से कुर्सियाँ चुनती हैं और इसके बाद आदमी बची हुई कुर्सियों में से कुर्सियाँ चुनते है, तो संभावित व्यस्थापनों की संख्या होगी–
(A) $^6C_3 . {^4C_4}$ (B) $P_2 . {^4P_3}$ (C) $^4C_3 . {^4P_3}$ (D*) $^4P_2 . {^6P_3}$

Sol. Total number of possible arrangements is
$^4p_2 \times {^6p_3}$.

Hindi. कुल संभव विन्याओं की संख्या
$^4p_2 \times {^6p_3}$.

A-3. Number of words that can be made with the letters of the word "GENIUS" if each word neither begins with G nor ends in S, is:
"GENIUS" शब्द के अक्षरों से ऐसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जो न तो G से शुरू होते हैं और न ही S पर समाप्त होते हैं–
(A) 24 (B) 240 (C) 480 (D*) 504

Sol. First we have to find all the arrangements of the word 'GENIUS' is
6 ! = 720
number of arrangement which in either started with G ends with S is
(5! + 5! – 4!) = (120 + 120 – 24)= 216
Hence total number of arrangement which is neither started with G nor ends with S is.
(720 – 216) = 504

Hindi. सर्वप्रथम हम शब्द 'GENIUS' के सभी संभव विन्यासों की संख्या ज्ञात करेगें।
6 ! = 720
उन विन्यासों की संख्या जो या तो G से प्रारम्भ हो तो S पर समाप्त हो
(5! + 5! – 4!) = (120 + 120 – 24)= 216

अतः उन विन्यासों की संख्या जो न तो G से प्रारम्भ होते हैं और न ही S पर सामप्त होते हैं
(720 – 216) = 504.

A-4. The number of words that can be formed by using the letters of the word 'MATHEMATICS' that start as well as end with T, is **[16JM110193]**
'MATHEMATICS' शब्द के अक्षरों से ऐसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जो T से प्रारम्भ होते हैं और T पर ही समाप्त होते है–
(A) 80720 (B*) 90720 (C) 20860 (D) 37528

Sol.

T										T

Total arrangement is $\frac{9!}{2!.2!} = 90720$

Hindi.

T										T

कुल विन्यासों की संख्या $= \frac{9!}{2!.2!} = 90720$

A-5. 5 boys & 3 girls are sitting in a row of 8 seats. Number of ways in which they can be seated so that not all the girls sit side by side, is:
5 लड़के और 3 लड़कियाँ एक पंक्ति में स्थित 8 सीटों पर बैठे हुए हैं। यदि सभी लड़कियाँ एक साथ नहीं बैठे, तो वे सभी कितने तरीकों से बैठ सकते हैं–
(A*) 36000 (B) 9080 (C) 3960 (D) 11600

Sol. Total no. of arrangement if all the girls do not sit side by side is = [all arrangement – girls seat side by side]
$= 8! - (6! \times 3!) = 6!\,(56 - 6) = 6! \times 50 = 720 \times 50 = 36000$

Hindi. यदि सभी लड़कियाँ एक साथ नहीं बेठें तो कुल विन्यासों की संख्या
= [कुल विन्यास – जब सभी लड़कियां साथ–साथ बैठे]
$= 8! - (6! \times 3!) = 6!\,(56 - 6) = 6! \times 50 = 720 \times 50 = 36000.$

A-6. Out of 16 players of a cricket team, 4 are bowlers and 2 are wicket keepers. A team of 11 players is to be chosen so as to contain at least 3 bowlers and at least 1 wicketkeeper. The number of ways in which the team be selected, is
एक क्रिकेट टीम के 16 खिलाड़ियों में 4 गेंदबाज और 2 विकेट कीपर है। 11 खिलाड़ियों की एक टीम कितने तरीको से बनायी जा सकती हैं, जिसमें कम से कम 3 गेंदबाज और कम से कम एक विकेट–कीपर हो ?
(A) 2400 (B*) 2472 (C) 2500 (D) 960

Sol. Number of bowlers = 4
Number of wicketkeeper = 2
Let total number required selection
${}^4C_3 . {}^2C_1 . {}^{10}C_7 + {}^4C_4 . {}^2C_1 . {}^{10}C_6 + {}^4C_3 . {}^2C_2 . {}^{10}C_6 + {}^4C_4 . {}^2C_2 . {}^{10}C_5$
$960 + 420 + 840 + 252 = 2472$

Hindi. गेंदों की सख्या = 4
विकेट कीपरों की संख्या = 2
अभीष्ट चुनावों की संख्या
${}^4C_3 . {}^2C_1 . {}^{10}C_7 + {}^4C_4 . {}^2C_1 . {}^{10}C_6 + {}^4C_3 . {}^2C_2 . {}^{10}C_6 + {}^4C_4 . {}^2C_2 . {}^{10}C_5$
$960 + 420 + 840 + 252 = 2472$

A-7 Passengers are to travel by a double decked bus which can accommodate 13 in the upper deck and 7 in the lower deck. The number of ways that they can be divided if 5 refuse to sit in the upper deck and 8 refuse to sit in the lower deck, is
एक दो मंजिला बस के ऊपरी मंजिल पर 13 तथा निचली मंजिल पर 7 व्यक्ति बैठ सकते हैं। यदि इन 20 व्यक्तियों में से 5 व्यक्ति ऊपर बैठने से मना करते हैं तथा 8 व्यक्ति नीचें बैठने से मना करते हैं, तो इन्हे कितने प्रकार से विभाजित किया जा सकता हैं–
(A) 25 (B*) 21 (C) 18 (D) 15

Sol. upperdeck - 13 seats → 8 in upper deck.
lowerdeck - 7 seats → 5 in lower deck

Remains passengers = 7
Now Remains 5 seats in upper deck and 2 seats in lower deck
for upper deck number of ways = ${}^7C_5$
for lower deck number of ways = ${}^2C_2$

So total number of ways = ${}^7C_5 \times {}^2C_2 = \frac{7.6}{2} = 21$

Hindi. ऊपरी मंजिल - 13 सीटें $\rightarrow$ ऊपरी मंजिल में 8 यात्री
निचली मंजिल - 7 सीटें $\rightarrow$ निचली मंजिल में 5 यात्री
बचे हुए यात्री = 7
अतः 5 सीटे ऊपरी मंजिल में तथा 2 सीटे निचली मंजिल में बचती हैं।
ऊपरी मंजिल के लिये सीटें भरने के तरीके = ${}^7C_5$
नीचे की मंजिल में सीटें भरने के तरीके = ${}^2C_2$

अतः कुल तरीके = ${}^7C_5 \times {}^2C_2 = \frac{7.6}{2} = 21$

A-8. The number of permutations that can be formed by arranging all the letters of the word 'NINETEEN' in which no two E's occur together. is
शब्द 'NINETEEN' के सभी अक्षरों को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता हैं ताकि कोई भी दो 'E' एक साथ नहीं आये–

(A) $\frac{8!}{3!\ 3!}$ (B) $\frac{5!}{3! \times {}^6C_2}$ (C*) $\frac{5!}{3!} \times {}^6C_3$ (D) $\frac{8!}{5!} \times {}^6C_3$.

Sol. NINETEEN
$\Rightarrow$ N $\rightarrow$ 3 : I, T
E $\rightarrow$ 3
First we arrange the word of N, N, N, I and T

then the number of ways = $\frac{5!}{3!}$.

Now total 6 number of place which are arrange E is ${}^6C_3$

Hence total number of ways = $\frac{5!}{3!} \cdot {}^6C_3$

Hindi. NINETEEN
$\Rightarrow$ N $\rightarrow$ 3 : I, T
E $\rightarrow$ 3
सर्वप्रथम हम N, N, N, I और T को व्यवस्थित करेगें।

अतः तरीकों की संख्या = $\frac{5!}{3!}$.

अब 6 स्थानों पर E-3 को रखने के तरीके = ${}^6C_3$

अतः कुल तरीकों की संख्या = $\frac{5!}{3!} \cdot {}^6C_3$

A-9. 10 different letters of an alphabet are given. Words with 5 letters are formed from these given letters, then the number of words which have atleast one letter repeated is:
(A*) 69760 (B) 30240 (C) 99748 (D) none
अंग्रेजी वर्णमाला के 10 अक्षर दिये गये हैं। इन अक्षरों की सहायता से 5 अक्षर वाले शब्द बनाये जाते है, तो ऐसे कितने शब्द होगें जिनमें कम से कम एक अक्षर की पुनरावृत्ति होती है–
(A) 69760 (B) 30240 (C) 99748 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Number of words which have at least one letter repeated = total words – number of words which have no letter repeated = $10^5 - 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 69760$

Hindi. शब्दों की संख्या जिनमें कम से कम एक अक्षर की पुनरावृत्ति हो = कुल शब्द – उन शब्दों की संख्या

जिनमें किसी अक्षर की पुनरावृत्ति ना हो = $10^5 - 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 69760$

A-10. In a conference 10 speakers are present. If S_1 wants to speak before S_2 & S_2 wants to speak after S_3, then the number of ways all the 10 speakers can give their speeches with the above restriction if the remaining seven speakers have no objection to speak at any number is : **[16JM110194]**
एक सम्मेलन में 10 वक्ता उपस्थित हैं। यदि वक्ता S_1 , S_2 से पहले बोलना चाहता है और S_2 , S_3 के बाद बोलना चाहता है और यदि शेष सात वक्ता किसी भी स्थान पर बोल सकते हैं, तो सभी 10 वक्ता अपने भाषण कितने प्रकार से दे सकते हैं ?

(A) ${}^{10}C_3$ (B) ${}^{10}P_8$ (C) ${}^{10}P_3$ (D*) $\dfrac{10\,!}{3}$

Sol. First we select 3 speaker out of 10 speaker and put in any way and rest are no restriction i.e. total number of ways $= {}^{10}C_3 \,.\, 7!.2\,! = \dfrac{10\,!}{3}$

Hindi. सर्वप्रथम हम 10 वक्ताओं में से 3 वक्ताओं का चयन करेगें तथा उन्हें किसी भी तरीके से रख देगें अब बचे हुऐ वक्ताओं के लिए कोई भी प्रतिबंध नहीं होगा।
अतः कुल तरीकों की संख्या $= {}^{10}C_3 \,.\, 7!.2\,! = \dfrac{10\,!}{3}$

A-11. If all the letters of the word "QUEUE" are arranged in all possible manner as they are in a dictionary, then the rank of the word QUEUE is:
यदि शब्द "QUEUE" के अक्षरों से निर्मित सभी शब्दों को शब्दकोष के क्रमानुसार व्यवस्थित किया जाये, तो शब्द QUEUE का क्रम है–
(A) 15th (B) 16th (C*) 17th (D) 18th

Sol. Word QUEUE
$E \to 2,\ Q\ ,U - 2$

E					= 18

$\dfrac{4!}{2!}$

Q	E				= 3

$\dfrac{3!}{2!}$

Q	U	E	E	U	= 1
Q	U	E	U	E	= 1

17th rank

A-12. The sum of all the numbers which can be formed by using the digits 1, 3, 5, 7 all at a time and which have no digit repeated, is
अंको 1, 3, 5, 7 का एक साथ उपयोग करते हुए बनाई जा सकने वाली सभी संख्याओं का योग कितना होगा जबकि अंको की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती हैं–
(A) $16 \times 4!$ (B) $1111 \times 3!$ (C*) $16 \times 1111 \times 3!$ (D) $16 \times 1111 \times 4!$.

Sol. If 1 be unit digit then total no. of number is $3! = 6$
Similarly so on if 3, 5, or 7 be unit digit number
then total no. of no. is $3! = 6$
Hence sum of all unit digit no. is $= 6\times (1+3+5+7) = 6\times 16 = 96$
Hence total sum is $= 96 \times 10^3 + 96 \times 10^2 + 96 \times 10^1 + 96 \times 10^0$
$= 96000 + 9600 + 960 + 96 = 106656 = 16 \times 1111 \times 3!$

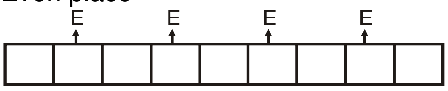
Hindi. यदि इकाई का अंक 1 हो, तो कुल संख्याओं की संख्या $= 3! = 6$
इसी प्रकार यदि 3, 5 या 7 इकाई अंक हो, तो कुल संख्याओं की संख्या $= 3! = 6$
अतः सभी इकाई अंकों की संख्याओं का योग $= 6\times (1+3+5+7) = 6\times 16 = 96$
अतः कुल योग $= 96 \times 10^3 + 96 \times 10^2 + 96 \times 10^1 + 96 \times 10^0$
$= 96000 + 9600 + 960 + 96 = 106656 = 16 \times 1111 \times 3!$

A-13. How many nine digit numbers can be formed using the digits 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8, 8 so that the odd digits occupy even positions? **[16JM110195]**

अंको 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8, 8 की सहायता से 9 अंको की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जबकि विषम अंक सम स्थानों पर आये–

(A) 7560 (B) 180 (C) 16 (D*) 60

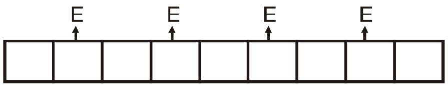
Sol. Even place



There are four even places and four odd digit number so total number of filling is $\frac{4!}{2!.2!}$ rest are also occupy is $\frac{5!}{3!.2!}$ ways

Hence total number of ways = $\frac{4!}{2!.2!} \times \frac{5!}{3!.2!} = 60$

Sol. सम स्थान



यहां चार सम स्थान है व चार विषम अंक है। अतः विषम अंकों को सम स्थानों पर भरने के तरीके $\frac{4!}{2!.2!}$ है तथा अन्य अंकों को $\frac{5!}{3!.2!}$ तरीकों से भरा जा सकता है।

अत : कुल तरीकों की संख्या = $\frac{4!}{2!.2!} \times \frac{5!}{3!.2!} = 60$

A-14. There are 2 identical white balls, 3 identical red balls and 4 green balls of different shades. The number of ways in which they can be arranged in a row so that atleast one ball is separated from the balls of the same colour, is :

(A*) 6 (7 ! – 4!) (B) 7 (6 ! – 4 !) (C) 8 ! – 5 ! (D) none

2 सर्वसम सफेद गेंद, 3 सर्वसम लाल गेंद और 4 विभिन्न हरी गेंद है। इन्हे एक पंक्ति में कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है जबकि कम से कम एक गेंद अपने समान रंग की गेंदों से अलग आये–

(A*) 6 (7 ! – 4!) (B) 7 (6 ! – 4 !) (C) 8 ! – 5 ! (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Total number of ways of arranging 2 identical white balls.

3 identical red balls and 4 green balls of different shades = $\frac{9!}{2!\,3!} = 6.7!$

Number of ways when balls of same colour are together = $3! \times 4! = 6.4!$

Number of ways of arranging the balls when atleast one ball is separated from the balls of the same colour = $6.7! - 6.4! = 6(7! - 4!)$

Hindi 2 सर्वसम सफेद गेंद, 3 सर्वसम लाल गेंद और 4 विभिन्न हरी गेंदों को व्यवस्थित करने के तरीके = $\frac{9!}{2!\,3!} = 6.7!$

समान रंग की गेंदों को एक साथ व्यवस्थित करने के तरीके = $3! \times 4! = 6.4!$

कम से कम एक गेंद के समान रंग की गेंदों से अलग होने की संख्या = $6.7! - 6.4! = 6(7! - 4!)$

A-15. A box contains 2 white balls, 3 black balls & 4 red balls. In how many ways can three balls be drawn from the box if atleast one black ball is to be included in draw (the balls of the same colour are different). **[16JM110196]**

(A) 60 (B*) 64 (C) 56 (D) none

एक सन्दूक में 2 भिन्न सफेद, 3 भिन्न काली और 4 भिन्न लाल गेदें हैं। सन्दूक में से 3 गेंदें कुल कितने तरीकों से निकाली जा सकती है जबकि प्रत्येक चयन में कम से कम एक काली गेंद अवश्य सम्मिलित हो (समान रंग की गेदें विभिन्न है)

(A) 60 (B) 64 (C) 56 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. First we find 3 ball from 9 ball

$^9C_3 = 84$

Now number of ways if any one black ball not selected is $^6C_3 = 20$

Here required no is 84 - 20 = 64

Hindi. सर्वप्रथम 9 गेदों में से 3 गेंदे चुनने के तरीके $= {}^9C_3 = 84$

अतः उन तरीकों की संख्या जिनमें कोई भी काली गेंद नहीं चुनी गई हो $= {}^6C_3 = 20$

अतः अभीष्ट तरीकों की संख्या 84 – 20 = 64.

A-16. Eight cards bearing number 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 are well shuffled. Then in how many cases the top 2 cards will form a pair of twin prime equals

8 पत्तों पर नामांकित संख्या1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 है। कितनी स्थितियों में उनमें से ऊपरी दो पत्ते युगल अभाज्य संख्याओं का युग्म बनाते है।

(A) 720 (B) 1440 (C*) 2880 (D) 2160

Sol. Out of 8 integers 1,.....8 the pairs of twin primes are

(3, 5), (5, 3), (5, 7), and (7, 5). We consider the following 3 cases.

Hence $4 \times 6! = 2880$.

Hindi. 8 पूर्णांको में से 1,.....8 युगल अभाज्य युग्म है।

(3, 5), (5, 3), (5, 7), और (7, 5) माना कि तीन स्थितियां है।

अतः $4 \times 6! = 2880$.

A-17. Number of natural number upto one lakh, which contains 1,2,3, exactly once and remaining digits any time is - **[16JM110197]**

एक लाख तक की उन प्राकृत संख्याओं की संख्या जिनमें अंक 1, 2, 3 ठीक एक बार आये तथा बाकी बचे अंक कितनी भी बार आ सके, होंगी।

(A*) 2940 (B) 2850 (C) 2775 (D) 2680

Sol. First fill 3 places by 1,2,3 in $^5P_3$ ways and then remaining one in 7 x 7 ways so total no. of ways

$= {}^5P_3 \times 7 \times 7 = 2940$

Hindi. सर्वप्रथम 3 स्थानों को अंको 1, 2, 3 द्वारा $^5P_3$ तरह से भरा जा सकता है तथा बाकी बचे स्थानों को 7 x 7 तरीके से भरा जा सकता है अतः कुल तरीके $= {}^5P_3 \times 7 \times 7 = 2940$

A-18. The sum of all the four digit numbers which can be formed using the digits 6,7,8,9 (repetition is allowed)

अंकों 6,7,8,9 की सहायता से बनायी जा सकने वाली सभी चार अंको की संख्याओं का योगफल है (पुनरावृत्ति संभव है)

(A*) 2133120 (B) 2133140 (C) 2133150 (D) 2133122

Sol. $(1 + 10 + 10^2 + 10^3) \times 4^3 \times (6 + 7 + 8 + 9)$

A-19. If the different permutations of the word *'EXAMINATION'* are listed as in a dictionary, then how many words (with or without meaning) are there in this list before the first word starting with M.**[16JM110198]**

शब्द *'EXAMINATION'* के अक्षरों से बनने वाले सभी क्रमचयों को शब्दकोश के अनुसार व्यवस्थित किया जाये तो M से प्रारंभ होने वाले प्रथम शब्द से पहले कुल कितने शब्द (जिनका अर्थ हो या ना हो) इस सूची में होगें।

(A*) 2268000 (B) 870200 (C) 807400 (D) 839440

Sol. Words starting with A

$$\frac{10!}{2!\ 2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.2} = 907200.$$

Words starting with E

$$E : \frac{10!}{2!\ 2!\ 2!} = \frac{907200}{2} = 453600.$$

Words starting with I

$\frac{10!}{2!\ 2!} = 907200.$

Hence Total word starting with M = 907200 + 453600 + 907200 = 2268000.

Hindi. ऐसे शब्द जो A से शूरू होते हैं

$\frac{10!}{2!\ 2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.2} = 907200.$

ऐसे शब्द जो E से शूरू होते हैं

E : $\frac{10!}{2!\ 2!\ 2!} = \frac{907200}{2} = 453600.$

ऐसे शब्द जो I से शूरू होते हैं

$\frac{10!}{2!\ 2!} = 907200.$

अतः M से शुरू होने वाले कुल शब्द = 907200 + 453600 + 907200 = 2268000.

A-20. The number of ways in which a mixed double tennis game can be arranged from amongst 9 married couple if no husband & wife plays in the same game is:

9 विवाहित युगलों को मिश्रित युगल टेनिस कितने प्रकार से खिलाया जा सकता है यदि कोई भी पति और पत्नी एक ही खेल (game) में नहीं खेल सकते हैं ?

(A) 756 (B) 3024 (C*) 1512 (D) 6048

Sol. There are 9 married couple so first we select 2 man out of 9 and then we select 2 women out of rest 7 then, we arranged them, so required no. is $^9C_2 \times {^7C_2} \times 2! = 36 \times 21 \times 2 = 1512$

Hindi. 9 विवाहित युगल है अतः पहले हम 9 में से 2 पुरूषों का चयन करेंगें तथा बाकी 7 महिलाओं में से 2 का चयन करेंगें तथा इन्हें व्यवस्थित करेंगें, अतः अभीष्ट संख्या $^9C_2 \times {^7C_2} \times 2! = 36 \times 21 \times 2 = 1512$

Section (B) : Grouping and circular Permutation

Section (B) :

B-1. Number of ways in which 9 different toys be distributed among 4 children belonging to different age groups in such a way that distribution among the 3 elder children is even and the youngest one is to receive one toy more, is:

(A) $\frac{(5\,!)^2}{8}$ (B) $\frac{9\,!}{2}$ (C*) $\frac{9\,!}{3\,!\,(2\,!)^3}$ (D) none

9 अलग–अलग खिलौने विभिन्न आयु वर्ग के 4 बच्चों में कितने तरीकों से बांटे जा सकते है यदि 3 बड़े बच्चों को सम संख्या में खिलौने मिले और सबसे छोटे बच्चे को एक खिलौना ज्यादा मिले–

(A) $\frac{(5\,!)^2}{8}$ (B) $\frac{9\,!}{2}$ (C) $\frac{9\,!}{3\,!\,(2\,!)^3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Here first three children receive 2 each and younger receives 3 toys then total number of distribution is

$^9C_2 \,.\, {^7C_2} \,.\, {^5C_2} \,.\, {^3C_2} \times \frac{3!}{3!} = \frac{9!}{2!.7!} \cdot \frac{7!}{2!.5!} \cdot \frac{5!}{2!.3!} \cdot \frac{3!}{3!.0!} = \frac{9!}{3!.(2!)^3}$

Hindi. 3 बड़े बच्चों में प्रत्येक को दो खिलोने तथा सबसे छोटे बच्चे को 3 खिलोने देते हैं अतः बांटने के कुल तरीको की संख्या

$^9C_2 \,.\, {^7C_2} \,.\, {^5C_2} \,.\, {^3C_2} \times \frac{3!}{3!} = \frac{9!}{2!.7!} \cdot \frac{7!}{2!.5!} \cdot \frac{5!}{2!.3!} \cdot \frac{3!}{3!.0!} = \frac{9!}{3!.(2!)^3}$

B-2. In an eleven storeyed building (Ground floor + ten floor), 9 people enter a lift cabin from ground floor. It is know that they will leave the lift in groups of 2, 3 and 4 at different residential storeys. Find the number of ways in which they can get down.

Hindi एक ग्याहर मंजिला इमारत (धरातल + 10 माले), में 9 व्यक्ति, धरातल से लिफ्ट में चढ़ते है। यह दिया है कि वे अलग–अलग आवासीय मंजिल पर 2, 3 और 4 के समूह में लिफ्ट से उतरते है। तब उनके द्वारा उतरने के तरीके है।

(A) $\frac{9\times 9!}{4}$ (B) $\frac{8\times 9!}{4}$ (C) $\frac{2\times 10!}{9}$ (D*) $\frac{10!}{4}$

Sol. Note that in an eleven storeyed building there will be 10 floors and one ground floor

9 people can be divided into groups of 2, 3 and 4 in $\frac{9!}{2!3!4!}$ ways

Now each group can be distributed in ($^{10}C_3$. 3!) ways

Thus the required number of ways = $\frac{9!}{2!3!4!}\times\frac{10\times 9\times 8}{3!}\times 3! = \frac{10!}{4}$

Hindi Note that in an eleven storeyed building there will be 10 floors and one ground floor

9 व्यक्ति को 2, 3 और 4 के समूह में वितरित करने के तरीके $\frac{9!}{2!3!4!}$

अब प्रत्येक समूह को ($^{10}C_3$. 3!) तरीकों में वितरीत किया जाता है।

अतः अभीष्टक्रमच्चय = $\frac{9!}{2!3!4!}\times\frac{10\times 9\times 8}{3!}\times 3! = \frac{10!}{4}$

B-3. The number of ways in which 8 different flowers can be strung to form a garland so that 4 particulars flowers are never separated, is:

(A) 4!. 4! (B) $\frac{8!}{4!}$ (C*) 288 (D) none

8 विभिन्न फूलों से एक हार कितने तरीकों से बनाया जा सकता हैं यदि 4 विशेष फूल कभी भी अलग न हों–

(A) 4!. 4! (B) $\frac{8!}{4!}$ (C) 288 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. First be find all 4 particulars flowers are together then the total number of ways is

$\frac{4!\times 4!}{2}$ = ... 288

Hindi. 4 विशेष फूलों को साथ रखते हुए हार बनानेके तरीको की संख्या = $\frac{4!\times 4!}{2}$ = ... 288

B-4. The number of ways in which 6 red roses and 3 white roses (all roses different) can form a garland so that all the white roses come together, is **[16JM110201]**

6 लाल गुलाबों और 3 सफेद गुलाबों (सभी गुलाब अलग–अलग हैं) से एक माला कितने तरीकों से बनाई जा सकती हैं जबकि सभी सफेद गुलाब एक साथ रहें–

(A) 2170 (B) 2165 (C*) 2160 (D) 2155

Sol. Total number of ways is

कुल तरीकों की संख्या

$\frac{6!\times 3!}{2!}$ = 720 × 3 = 2160

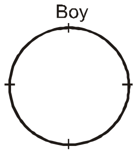
B-5. The number of ways in which 4 boys & 4 girls can stand in a circle so that each boy and each girl is one after the other, is:

4 लड़के और 4 लड़कियाँ एक वृत्त में कितने तरीकों से खड़े रह सकते हैं ताकि प्रत्येक लड़का और लड़की एकान्तर क्रम में रहें–

(A*) 3!. 4! (B) 4!. 4! (C) 8! (D) 7!

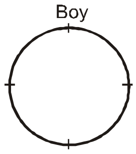
Sol. First we arrange all the boy so no. of ways of all

the boy can stand is 3! now we arrange all the girl
in 4 ! ways so total no. of ways is



= 4! × 3!

Hindi. पहले हम लड़कों को व्यवस्थित करते हैं अतः सभी लड़कों को 3! तरीके से खड़ा किया जा सकता है।
अब लड़कियों को 4 ! तरीके से व्यवस्थित किया जा सकता है अतः कुल तरीके = 4! × 3!



B-6. The number of ways in which 5 beads, chosen from 8 different beads be threaded on to a ring, is:
(A*) 672 (B) 1344 (C) 336 (D) none
8 भिन्न–भिन्न मोतियों में से 5 मोती को चुनकर एक रिंग में लगाने के तरीकों की संख्या है–
(A*) 672 (B) 1344 (C) 336 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. First we select 5 beads from 8 different beads to $^8C_5$
Now total number of arrangement is
$$^8C_5 \times \frac{4!}{2!} = 672$$

Hindi. 8 विभिन्न मोतीयों में से 5 मोती चुनने के तरीके = $^8C_5$
अतः कुल विन्यासों की संख्या
$$^8C_5 \times \frac{4!}{2!} = 672$$

B-7. Number of ways in which 2 Indians, 3 Americans, 3 Italians and 4 Frenchmen can be seated on a circle, if the people of the same nationality sit together, is:
(A) $2.(4!)^2(3!)^2$ (B*) $2.(3!)^3.4!$ (C) $2.(3!)(4!)^3$ (D) $2.(3!)^2(4!)^3$
2 भारतीय, 3 अमेरिकन, 3 इटालियन और 4 फ्रेन्च एक वृत्त में कितने तरीको से बैठ सकते हैं यदि समान राष्ट्रीयता के व्यक्ति एक साथ बैठना चाहते हो?
(A) $2.(4!)^2(3!)^2$ (B) $2.(3!)^3.4!$ (C) $2.(3!)(4!)^3$ (D) $2.(3!)^2(4!)^3$

Sol. Indians - 2
Americans - 3
Italians - 3
Frenchmen - 4
total number arranging in row of same nationality are together
$= 3! \times 2! \times 3! \times 3! \times 4! = 3! \times 2! \times 3! \times 3! \times 4! = 2.(3!)^3.4!$

Hindi. भारतीय - 2
अमेरिकन - 3
इटालियन - 3
फ्रेन्च - 4
समान राष्ट्रीयता के व्यक्ति को एक साथ रखकर बैठाने के तरीके
$= 3! \times 2! \times 3! \times 3! \times 4! = 3! \times 2! \times 3! \times 3! \times 4! = 2.(3!)^3.4!$

Section (C) : Problem based on distinct and identical objects and divisors
खण्ड (C) : दी गई वस्तुओं के समरूप तथा भिन्न–भिन्न होने से सम्बन्धित समस्या

C-1. The number of proper divisors of $a^pb^qc^rd^s$ where a, b, c, d are primes & p, q, r, s $\in$ N, is
संख्या $a^pb^qc^rd^s$ (जहाँ a, b, c, d अभाज्य संख्याएँ हैं और p, q, r, s $\in$ N हैं) के 1 और स्वंय के अलावा भाजकों की संख्या है–

(A) p q r s (B) (p + 1) (q + 1) (r + 1) (s + 1) – 4
(C) p q r s – 2 (D*) (p + 1) (q + 1) (r + 1) (s + 1) – 1

Sol. Total number of proper divisors is
कुल भाजकों की संख्या
(p + 1) (q + 1) (r + 1) (s + 1) – 2

C-2. N is a least natural number having 24 divisors. Then the number of ways N can be resolved into two factors is **[16JM110199]**
(A*) 12 (B) 24 (C) 6 (D) None of these
N एक ऐसी सबसे छोटी प्राकृत संख्या है जिसके 24 भाजक है, तो N को कितने प्रकार से दो गुणनखण्डों के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है–
(A*) 12 (B) 24 (C) 6 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $N = 2^{\alpha}.3^{\beta}5^{\gamma} = 2^3.3^2.5$
$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 4.3.2$
$N = 360 = 2^3 . 3^2.5$
$\dfrac{4.3.2}{2} = 12$

C-3. How many divisors of 21600 are divisible by 10 but not by 15?
(A*) 10 (B) 30 (C) 40 (D) none
21600 के 10 से विभाजित हैं लेकिन 15 से विभाजित नहीं होने वाले भाजकों की संख्या है–
(A) 10 (B) 30 (C) 40 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Here $21600 = 2^5. 3^3. 5^2 \Rightarrow (2 \times 5) \times 2^4 \times 3^3 \times 5^1$
Now numbers which are divisible by 10 = (4 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 40
$(2 \times 3 \times 5) \times (2^4 \times 3^2 \times 5^1)$ now numbers which are divisible by both 10 and 15
= (4 +1)(2 +1)(1+1) = 30
So the numbers which are divisible by only 40 – 30 = 10

Hindi. यहाँ $21600 = 2^5. 3^3. 5^2 = (2 \times 5) \times 2^4 \times 3^3 \times 5^1$
अब वे भाजक जो कि 10 से भाज्य है = (4 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 40
$21600 = (2 \times 3 \times 5) \times (2^4 \times 3^2 \times 5^1)$
अब वे भाजक जो कि 10 व 15 दोनों से भाज्य हैं = (4 +1)(2 +1)(1+1) = 30
अतः वे संख्याये जो कि केवल 10 से भाज्य है 40 – 30 = 10

C-4. The number of ways in which the number 27720 can be split into two factors which are co-primes, is:
संख्या 27720 को दो सहअभाज्य गुणनखण्डों में कितने तरीकों से विभाजित किया जा सकता है– **[16JM110200]**
(A) 15 (B*) 16 (C) 25 (D) 49

Sol.

2	27720
2	13860
5	6930
2	1386
3	693
3	231
7	77
	11

$2^3\, 3^2 . 5. 11$
Hence number of co-prime factor सह अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या
$2^{5-1} = 2^4 = 16$

C-5. The number of words of 5 letters that can be made with the letters of the word **"PROPOSITION"**.
"PROPOSITION" शब्द के अक्षरों से 5 अक्षर के कितने शब्द बनाए जा सकते हैं ?
(A*) 6890 (B) 7000 (C) 6800 (D) 6900

Sol. Word is PROPOSITION
Here P's = 2, O's = 3, I's = 2 and T, R, N, S = 1
We have to made 5 letters words

Case I : When All 5 are different = ${}^7p_5 = \dfrac{7!}{2!}$ = 2520

Case II : When 2 alike ,3 different = ${}^3C_1 \times {}^6C_3 \times \dfrac{5!}{2!}$ = 3600

Case III : When 2 alike , 2 alike, 1 different = ${}^3C_2 \times {}^5C_1 \times \dfrac{5!}{2!2!}$ = 450

Case IV : When 3 alike, 2 different = ${}^1C_1 \times {}^6C_2 \times \dfrac{5!}{3!}$ = 300

Case V : When 3 alike , 2 alike = ${}^1C_1 \times {}^2C_1 \times \dfrac{5!}{3!2!}$ = 20

So total required number = 6890 **Ans.**

Hindi. शब्द PROPOSITION है।

यहाँ P's = 2, O's = 3, I's = 2 तथा T, R, N, S = 1

हमें पाँच अक्षर का शब्द बनाना है।

स्थिति I : जब सभी 5 अक्षर भिन्न भिन्न हो = ${}^7p_5 = \dfrac{7!}{2!}$ = 2520

स्थिति II : जब 2 एक समान, 3 भिन्न–भिन्न अक्षर हो = ${}^3C_1 \times {}^6C_3 \times \dfrac{5!}{2!}$ = 3600

स्थिति III : जब 2 समान, 2 दूसरे प्रकार के समान तथा एक भिन्न अक्षर हो = ${}^3C_2 \times {}^5C_1 \times \dfrac{5!}{2!2!}$ = 450

स्थिति IV : जब 3 समान तथा 2 भिन्न अक्षर हो = ${}^1C_1 \times {}^6C_2 \times \dfrac{5!}{3!}$ = 300

स्थिति V : जब 3 समान तथा 2 अन्य परन्तु समान अक्षर हो = ${}^1C_1 \times {}^2C_1 \times \dfrac{5!}{3!2!}$ = 20

अतः कुल शब्दों की संख्या = 6890

C-6. Let fruits of same kind are identical then how many ways can atleast 2 fruit be selected out of 5 Mangoes, 4 Apples, 3 Bananas and three different fruits.
माना कि समान प्रकार के फल सर्वसम है, तब 5 आम, 4 सेब, 3 केले तथा 3 भिन्न फलों में से कम से कम दो फलों को कितने प्रकार से चुना जा सकता है?

(A) 959 (B*) 953 (C) 960 (D) 954

Sol. We have to select At least one fruit from 5 mangoes, 4 Apples , 3 Bananas and 3 different fruit is .
$(5 + 1)(4 + 1)(3 + 1)\, 2^3 - 1 = 6 \times 5 \times 4 \times 8 - 1 = 960 - 1 = 959$ **Ans.**
exactly one fruit selection from 5 mangoes, 4 Apples , 3 Bananas and 3 different fruit is.
$(1 + 1 + 1 + {}^3C_1) = 6$ ways
So number of selection at least 2 fruit from 5 mangoes, 4 Apples , 3 Bananas and 3 different fruit
$= 959 - 6 = 953$

Hindi. 5 आम, 4 सेब, 3 केले एवं 3 अलग फलों में से कम से कम एक फल चुनने के कुल तरीके
$= (5 + 1)(4 + 1)(3 + 1)\, 2^3 - 1 = 6 \times 5 \times 4 \times 8 - 1 = 960 - 1 = 959$
5 आम, 4 सेब , 3 केलों एवं 3 अलग फलों में से ठीक एक फल के चयन के तरीके
$= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 6$
अतः 5 आम, 4 सेब, 3 केले एवं 3 अलग फलों में से कम से कम 2 फलों के चयन के तरीके $= 959 - 6 = 953$

Section (D) : Multinomial theorem and Dearrangement

खण्ड (D) :

D-1. The number of ways in which 10 identical apples can be distributed among 6 children so that each child receives atleast one apple is : **[16JM110202]**

(A*) 126 (B) 252 (C) 378 (D) none of these

10 सर्वसम सेबों को 6 बच्चों में बाटनें के तरीके यदि प्रत्येक बच्चा कम से कम एक सेब प्राप्त करता हो–

(A*) 126 (B) 252 (C) 378 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Coefficient x^{10} in $(x + x^2 .....x^5)^6$ = coefficient of x^4 in $(x^0 + x^1 ....x^4)^6$ = ${}^{6+4-1}C_4 = {}^9C_4 = 126$

Hindi $(x + x^2 .....x^5)^6$ में x^{10} का गुणांक = $(x^0 + x^1 ....x^4)^6$ में x^4 का गुणांक = ${}^{6+4-1}C_4 = {}^9C_4 = 126$

D-2. Number of ways in which 3 persons throw a normal die to have a total score of 11, is **[16JM110203]**

3 व्यक्तियों द्वारा एक पासे को फेंकनें पर अंकों का योग 11 आने के तरीकों की संख्या है–

(A*) 27 (B) 25 (C) 29 (D) 18

Sol. Using multinomial theorem

Find the co-efficient of x^{11} in the expansion

$(x + x^2 + x^3 + ...+ x^6)^3 = x^3 (1 - x^6)^3.(1-x)^{-3}$ is

$= {}^{10}C_8 - 3 . {}^4C_2 = 45 - 18 = 27$

Hindi. बहुपदीय प्रमेय का प्रयोग करने पर

$(x + x^2 + x^3 + ...+ x^6)^3$ के प्रसार में x^{11} का गुणांक

$= x^3 (1 - x^6)^3.(1-x)^{-3}$ के प्रसार में x^{11} का गुणांक $= {}^{10}C_8 - 3 . {}^4C_2 = 45 - 18 = 27$

D-3. If chocolates of a particular brand are all identical then the number of ways in which we can choose 6 chocolates out of 8 different brands available in the market, is:.

(A*) ${}^{13}C_6$ (B) ${}^{13}C_8$ (C) 8^6 (D) none

यदि किसी विशेष ब्राण्ड की सभी चाकलेट सर्वसम हो, तो बाजार में उपलब्ध 8 विभिन्न ब्राण्डो में से 6 चोकलेट चुनने के तरीकों की संख्या हैं–

(A) ${}^{13}C_6$ (B) ${}^{13}C_8$ (C) 8^6 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Using multinomial theorem

Total no. of ways of choosing 6 chocolates out of 8 different brand is $= {}^{8+6-1}C_6 = {}^{13}C_6$

Hindi. बहुपदीय प्रमेय का प्रयोग करने पर

8 विभिन्न ब्राण्डो में से 6 चाकलेट चुनने के कुल तरीके = ${}^{8+6-1}C_6 = {}^{13}C_6$

D-4. Number of positive integral solutions of $x_1 . x_2 . x_3 = 30$, is **[16JM110204]**

$x_1 . x_2 . x_3 = 30$ के धनात्मक पूर्णांक हलों की संख्या है–

(A) 25 (B) 26 (C*) 27 (D) 28

Sol. Total number of positive integral solution of

धनात्मक पूर्णांक हलों की कुल संख्या

$x_1 . x_2 . x_3 = 30 = 2 \times 3 \times 5$ is

$3 \times 3 \times 3 = 27$

D-5. There are six letters $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ and their corresponding six envelopes $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$. Letters having odd value can be put into odd value envelopes and even value letters can be put into even value envelopes, so that no letter go into the right envelopes, then number of arrangement equals. **[16JM110205]**

(A) 6 (B) 9 (C) 44 (D*) 4

यदि 6 पत्र $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ और उनके संगत 6 लिफाफे $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ है। विषम अंको वाले पत्र पत्र विषम अंक वाले लिफाफे में ही रखे जा सकते हैं तथा सम अंकों वाले पत्र सम अंक वाले लिफाफे में ही जा सकते हैं ताकि कोई भी पत्र सही लिफाफे में न रखा जाये तब विन्यासों की संख्या होगी।

Sol. $L_1\ L_3\ L_5$ $L_2\ L_4\ L_6$

$E_1\ E_3\ E_5$ $E_2\ E_4\ E_6$

Number of ways $= 3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) . 3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) = 4$

Hindi. $L_1\ L_3\ L_5$ $L_2\ L_4\ L_6$

$E_1\ E_3\ E_5$ $E_2\ E_4\ E_6$

कुल तरीके $= 3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) . 3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right) = 4$

D-6. Seven cards and seven envelopes are numbered 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and cards are to be placed in envelopes so that each envelope contains exactly one card and no card is placed in the envelope bearing the same number and moreover the card number 1 is always placed in envelope number 2 and 2 is always placed in envelope numbered 3, then the number of ways it can be done is

सात पत्ते तथा सात लिफाफों पर नामांकित 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 है। पत्तों को लिफाफे में इस प्रकार से रखा जाता है। कि प्रत्येक लिफाफा ठीक एक पत्ता रखे और कोई भी पत्ता समान संख्या के लिफाफे में नही हो जबकि यह दिया है कि पत्ता संख्या 1 सदैव, लिफाफा संख्या 2 में हो और 2 सदैव नामांकित 3, लिफाफे में रखा गया जाए तब यह कितने प्रकार से किया जा सकता है।

(A*) 53 (B) 44 (C) 9 (D) 62

Sol. If 3 goes in 1 then it is dearrangement of 4 things which can be done in 9 ways.
And if 3 does not goes in 1 then it is dearrangement of 5 things which can be done in 44 ways
$\Rightarrow$ total ways = 9 + 44 = 53

Hindi. यदि 3,1 में है तब यह 4 वस्तुओं की पुर्नव्यवस्था है जिसको 9 तरीकों से किया जाता है। तथा यदि 3,1 में नहीं है तब यह 5 वस्तुओं की पुर्नव्यवस्था 44 तरीकों से की जा सकती है। $\Rightarrow$ कुल तरीके = 9 + 44 = 53

Section (E) : Miscellaneous

खण्ड (E) : विविध

E-1. The number of ways of choosing triplets (x, y, z) such that $z \geq \max\{x, y\}$ and $x, y, z \in \{1, 2, 3 \ldots\ldots, n\}$ is

त्रिक (x, y, z) चुनने के तरीकों की संख्या होगी जबकि $z \geq \max\{x, y\}$ तथा $x, y, z \in \{1, 2, 3 \ldots\ldots, n\}$ है।

(A*) $\sum_{t=1}^{n} t^2$ (B) ${}^{n+1}C_3 - {}^{n+2}C_3$ (C) $2\,({}^{n+2}C_3) + {}^{n+1}C_2$ (D) $\left(\frac{n(n+1)^2}{2}\right)$

Sol. When z = 1, then x, y = 1

When z = 2, then x, y = 1, 2 ....

When z = n, then x, y = 1, 2, ...,n

$\Rightarrow$ number of ways of choosing triplets (x, y, z) = $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Hindi. जब z = 1, तब x, y = 1

जब z = 2, ज x, y = 1, 2..........

जब z = n, ज x, y = 1, 2, ..., n

$\Rightarrow$ चुने गए त्रिपलेट (x, y, z) की संख्या = $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

E-2. The streets of a city are arranged like the lines of a chess board. There are m streets running North to South & 'n' streets running East to West. The number of ways in which a man can travel from NW to SE corner going the shortest possible distance is:

एक शहर की गलियों को शतरंज की बिसात की रेखाओं की तरह व्यवस्थित किया गया है। उत्तर से दक्षिण की ओर जाने वाली m गलियाँ है और पूर्व से पश्चिम की ओर जाने वाली n गलियाँ है। एक व्यक्ति उत्तर–पश्चिम कोने से दक्षिण–पूर्व कोने तक कितने तरीकों से जा सकता हैं जबकि वह न्यूनतम सम्भावित दूरी से जाये।

(A) $\sqrt{m^2 + n^2}$ (B) $\sqrt{(m-1)^2 \,.\, (n-1)^2}$ (C) $\frac{(m+n)\,!}{m!\,.\,n!}$ (D*) $\frac{(m+n-2)\,!}{(m-1)\,!\,.\,(n-1)\,!}$

Sol. Here we should go (n –1) steps to east and (m –1)
steps to south so total steps which we have to go are (m + n – 2) ways.

Hence total no. of ways = ${}^{m+n-2}C_{m-1} \cdot {}^{n-1}C_{n-1} = \dfrac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,.\,(n-1)!}$

Hindi. हमें (n –1) गलियां पूर्व की ओर तथा (m –1) गलियां दक्षिण की ओर तय करनी है

अतः कुल चली गयी गलियां = (m + n – 2) अतः कुल तरीके = ${}^{m+n-2}C_{m-1} \cdot {}^{n-1}C_{n-1} = \dfrac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,.\,(n-1)!}$

E-3. Number of ways of selecting pair of black squares in chessboard such that they have exactly one common corner is equal to :

शतरंज के बोर्ड पर दो काले वर्गो के युग्म को चुनने के तरीके होंगे जबकि वे ठीक एक उभयनिष्ठ कोना रखता है।

(A) 64 (B) 56 (C*) 49 (D) 50

Sol. (1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1) + (2 + 4 + 6 + 6 + 4 + 2) = 49

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. **Match the column**

Column – I		**Column – II**	
(A)	The total number of selections of fruits which can be made from, 3 bananas, 4 apples and 2 oranges is, it is given that fruits of one kind are identical	(p)	120
(B)	There are 10 true-false statements in a question paper. How many sequences of answers are possible in which exactly three are correct ?	(q)	286
(C)	The number of ways of selecting 10 balls from unlimited number of red, black, white and green balls is, it is given that balls of same colours are identical	(r)	59
(D)	The number of words which can be made from the letters of the word 'MATHEMATICS' so that consonants occur together ?	(s)	75600

स्तम्भ – I		**स्तम्भ – II**	
(A)	3 केले, 4 सेब और 2 सन्तरों में से फल चुनने के कुल तरीके, जबकि एक प्रकार के सभी फल समान हैं, होंगे–	(p)	120
(B)	प्रश्न प्रत्र में 10 सत्य–असत्य प्रकार के कथन है ठीक तीन उत्तर सही होने के सभी संभावित तरीके होगे?	(q)	286
(C)	असीमित संख्या में उपस्थित लाल, काली, सफेद और हरी गेदों में से 10 गेंदे चुनने के तरीकों की संख्या, जबकि समान रंग की सभी गेदें सर्वसम हैं, होगी–	(r)	59
(D)	शब्द 'MATHEMATICS' के अक्षरों से बनाए जा सकने वाले शब्दों की संख्या होगी जबकि व्यंजन साथ–साथ हो	(s)	75600

Ans. (A) → (r), (B) → (p), (C) → (q), (D) → (s)

Sol.

(A) Required number of ways = (2 + 1) (3 + 1) (4 + 1) – 1 = 59.

(B) ${}^{10}C_3 = 120$

(C) Requied number of ways = Coefficient of x^{10} in $(1 + x + x^2 + ...)^4$
= Coefficient of x^{10} in $(1 – x)^{-4} = {}^{10+4-1}C_{4-1} = {}^{13}C_3 = 286$

(D) The word 'MATHEMATICS' consists of 11 letters of which 7 are consonants namely M,M, T, T,H,C,S and 4 vowels and a group of consonants can be

arranged in $\frac{^5P_5}{2!} = \frac{5!}{2}$ ways. ($\therefore$ A is repeated twice)

In any such arrangement, seven consonants can be reshuffled among themselves in

$\frac{^7P_7}{2!\ \ 2!} = \frac{7!}{2!\ \ 2!}$ ways. ($\because$ Either of M and T is repeated twice)

Hence, the required number of ways $= \frac{5!}{2!} \times \frac{7!}{2!\ \ 2!} = \frac{120 \times 5040}{8} = 75600.$

Hindi (A) कुल अभीष्ट तरीके $= (2 + 1)(3 + 1)(4 + 1) - 1 = 59.$

(B) $^{10}C_3 = 120$

(C) अभीष्ट तरीके

$= (1 + x + x^2 + ...)^4$ में x^{10} का गुणांक $= (1 - x)^{-4}$ में x^{10} का गुणांक $= {}^{10+4-1}C_{4-1} = {}^{13}C_3 = 286$

(D) **Hindi.** शब्द 'MATHEMATICS' में 11 अक्षर है जिनमें 7 व्यंजन है जो कि M,M, T, T,H,C,S तथा 4 स्वर है।

व्यंजनों के समूह को व्यवस्थित करने के तरीके $= \frac{^5P_5}{2!} = \frac{5!}{2}$ तरीके ($\therefore$ A की दो बार पुनरावृत्ति हो रही है)

इन सभी तरीकों में, सात व्यंजनो को परस्पर आपस में

व्यवस्थित करने के तरीके $= \frac{^7P_7}{2!\ \ 2!} = \frac{7!}{2!\ \ 2!}$ तरीके ($\because$ M और T की दोबारा पुनरावृत्ति हो रही है)

अतः अभीष्ट तरीकों की संख्या $= \frac{5!}{2!} \times \frac{7!}{2!\ \ 2!} = \frac{120 \times 5040}{8} = 75600.$

2. Match the column **[16JM110206]**

	Column-I	**Column-II**	
(A)	There are 12 points in a plane of which 5 are collinear. The maximum number of distinct convex quadrilaterals which can be formed with vertices at these points is:	(p)	185
(B)	If 7 points out of 12 are in the same straight line, then the number of triangles formed is	(q)	420
(C)	If AB and AC be two line segemets and there are 5, 4 points on AB and AC (other than A), then the number of quadrilateral, with vertices on these points equals	(r)	126
(D)	The maximum number of points of intersection of 8 unequal circles and 4 straight lines.	(s)	60

स्तम्भ का मिलान कीजिये।

	स्तम्भ - I	**स्तम्भ - II**	
(A)	समतल में 12 बिन्दुओं में से 5 संरेखीय है, विभिन्न अधिकतम उत्तल चतुर्भुजों की संख्या होगी जिसके ये बिन्दु शीर्ष है–	(p)	185
(B)	यदि 12 में से 7 बिन्दु एक सरल रेखा में है– तब बनाए गए त्रिभुजों की संख्या है	(q)	420
(C)	यदि AB तथा AC दो रेखाखण्ड है तथा 5, 4 बिन्दु AB तथा AC पर क्रमश है (A को छोड़कर) तब चतुर्भुजों की संख्या होगी जिसके शीर्ष ये बिन्दु शीर्ष है।	(r)	1260
(D)	8 असमान वृत्तों और 4 सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की अधिकतम संख्या है	(s)	60

Ans. (A) - (q) ; (B) - (p) ; (C) - (s) ; (D) - (r)

Sol. (A) $^8C_4 + {}^8C_3 \times {}^5C_1 + {}^8C_2 \times {}^5C_2$

(B) The number of ways of selecting 3 points out of 12 points is $^{12}C_3$.

Three points out of 7 collinear points can be selected in $^7C_3$ ways.

Hence, the number of triangles formed is $^{12}C_3 - {}^7C_3 = 185$.

(C) $^mC_2 \times {}^nC_2$

(D) Two circles intersect in 2 points.

$\therefore$ Maximum number of points of intersection of two circles = 2 × number of selections of two circles from 8 circles.

$= 2 \times {}^8C_2 = 2 \times 28 = 56$

$\therefore$ Maximum number of points of intersection of two straight line = 1 × number of selections of two straight line from 4 straight line = $^4C_2 = 6$

$\therefore$ Maximum number of points of intersection of one straight line and one circle = 2 × number of selections of one straight line from 4 straight line and number of selections of one circles from 8 circles $= {}^4C_1.{}^8C_1.2 = 64$

Hindi. (A) $^8C_4 + {}^8C_3 \times {}^5C_1 + {}^8C_2 \times {}^5C_2$

(B) 12 बिन्दुओं में से 3 बिन्दुओं को चयन करने के तरीके $^{12}C_3$.

7 संरेख बिन्दुओं में से तीन बिन्दुओं को चुननें के तरीके $^7C_3$ है।

अतः बनायें गये त्रिभुजों की संख्या $= {}^{12}C_3 - {}^7C_3 = 185$.

(C) $^mC_2 \times {}^nC_2$

Exercise-2

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. A train is going from London to Cambridge stops at 12 intermediate stations. 75 persons enter the train after London with 75 different tickets of the same class. Number of different sets of tickets they may be holding is:
लन्दन से कैम्ब्रिज जाने वाली एक ट्रेन 12 माध्यमिक स्टेशनों पर रूकती हैं। लन्दन के बाद समान श्रेणी के 75 भिन्न टिकट लेकर 75 यात्री ट्रेन में प्रवेश करते हैं, इन टिकटो के लिए अलग–अलग समूह बनाये जा सकते है–
(A*) $^{78}C_3$ (B) $^{91}C_{75}$ (C) $^{84}C_{75}$ (D) $^{78}C_{74}$

Sol. Total no. of different tickets is $13 + 12 + 11 + 10 + ...+ 1 = 91$
Hence required no. $= {}^{91}C_{75} = {}^{91}C_{88}$

Hindi. कुल भिन्न टिकटों की संख्या $13 + 12 + 11 + 10 + ...+ 1 = 91$
अतः अभीष्ट संख्या $= {}^{91}C_{75} = {}^{91}C_{88}$

2.✍ A family consists of a grandfather, m sons and daughters and 2n grand children. They are to be seated in a row for dinner. The grand children wish to occupy the n seats at each end and the grandfather refuses to have a grand children on either side of him. In how many ways can the family be made to sit.
एक परिवार में एक दादाजी, m बेटे–बेटियाँ और 2n पोते–पोतियाँ है। वे डिनर के लिए एक पंक्ति में बैठते हैं। पोते–पोतियाँ प्रत्येक सिरे की n सीटों पर बैठना चाहते हैं और दादाजी नहीं चाहते कि उनके किसी भी तरफ कोई पोता या पोती बैठे। कितने तरीकों से यह परिवार डिनर के लिए बैठ सकता हैं? **[16JM110207]**
(A*) (2n)! m! (m – 1) (B) (2n)! m! m (C) (2n)! (m –1)! (m – 1) (D) (2n – 1)! m! (m–1)

Sol. First we select n grand children from 2n grand children is $^{2n}C_n$
Now arrangement of both group is $n! \times n!$
Now Rest all (m + 1) place where we occupy the grandfather and m sons but grandfather refuse the sit to either side of grand children so the out of m – 1 seat one seat can be selected
Now required number of sitting in $^{2n}C_n \times n\,! \times n\,! \times {}^{(m-1)}C_1 \,.\, m\,!$

$$= \frac{12n}{n!\times n!} \times n\,! \times n\,! \times {}^{(m-1)}C_1 \,.\, m\,! = 2n\,!\,.\,m\,!\,.\,(m-1)$$

Hindi. 2n पोते–पोतियों में n पोते पोती चुनने के तरीके $= {}^{2n}C_n$
अब दोनो समूहों को व्यवस्थित करने के तरीक $= n! \times n!$
अब बचे हुए (m + 1) स्थानों पर m बेटे–बेटियां तथा दादाजी बेठेगें परन्तु दादाजी के दोनों तरफ कोई भी पोते–पोती नहीं बैठाना है अतः बची हुई (m – 1) में से एक सीट चुननी है।
अतः बैठाने के अभीष्ट तरीकों की संख्या $^{2n}C_n \times n\,! \times n\,! \times {}^{(m-1)}C_1 \,.\, m\,!$

$$= \frac{12n}{n!\times n!} \times n\,! \times n\,! \times {}^{(m-1)}C_1 \,.\, m\,! = 2n\,!\,.\,m\,!\,.\,(m-1)$$

3. A bouquet from 11 different flowers is to be made so that it contains not less than three flowers. Then then number of different ways of selecting flowers to form the bouquet.
11 विभिन्न फूलों की सहायता से एक गुलदस्ता बनाया जाता है जबकि इसमें तीन से कम फूल नहीं हो। गुलदस्तों को बनाने के लिए फूलों को चुनने के तरीकों की संख्या है–
(A) 1972 (B) 1952 (C*) 1981 (D) 1947

Sol. $^{11}C_3 + {}^{11}C_4 + ... + {}^{11}C_{11} = 2^{11} - {}^{11}C_0 - {}^{11}C_1 - {}^{11}C_2 = 1981$

4. If $\alpha = x_1\, x_2\, x_3$ and $\beta = y_1\, y_2\, y_3$ be two three digit numbers, then the number of pairs of α and β that can be formed so that α can be subtracted from β without borrowing. **[16JM110208]**

यदि $\alpha = x_1\, x_2\, x_3$ तथा $\beta = y_1\, y_2\, y_3$ तीन अंकों की दो संख्याएँ हो, तो α व β के कुल युग्मों की संख्या होगी, जिसमें α को β में से बिना हासिल लिये घटाया जा सके।

(A) $55 . (45)^2$ (B*) $45 . (55)^2$ (C) $36 . (45)^2$ (D) 55^3

Sol. $\beta - \alpha$

$= y_1\, y_2\, y_3$

$- x_1\, x_2\, x_3$

Number of pairs युग्मों की संख्या $= (10 + 9 + 8 + + 1)^2 . (9 + 8 + + 1) = (55)^2 .45$

5. 'n' digits positive integers formed such that each digit is 1, 2, or 3. How many of these contain all three of the digits 1, 2 and 3 atleast once ?

n अंको के धनात्मक पूर्णांक बनाए जाते हैं जिनका प्रत्येक अंक 1, 2 या 3 हो ? इनमें से ऐसी कितनी संख्याएँ होगी जिनमें सभी तीनों अंक 1, 2, 3 कम से कम एक बार आये?

(A) $3(n-1)$ (B) $3^n - 2.2^n + 3$ (C) $3^n - 3.2^n - 3$ (D*) $3^n - 3.2^n + 3$

Sol. Total n-digit numbers using 1, 2 or 3 = 3^n

total n-digit numbers using any two digits out of 1, 2 or 3 = ${}^3C_2 \times 2^n - 6 = 3 \times 2^n - 6$

total n-digit numbers using only one digit of 1, 2 or 3 = 3

$\therefore$ the numbers containing all three of the digits 1, 2 and 3 at least once = $3^n - (3 \times 2^n - 6) - 3 = 3^n - 3 . 2^n + 3$

Hindi. 1, 2 या 3 का प्रयोग करके कुल n अंक वाली संख्याएँ = 3^n

1, 2 या 3 में से किन्ही दो अंकों का प्रयोग करके कुल n अंक वाली संख्याएँ = ${}^3C_2 \times 2^n - 6 = 3 \times 2^n - 6$

1, 2 या 3 में से केवल एक अंक का प्रयोग करके बनी संख्याएँ = 3

$\therefore$ 1, 2 और 3 में से प्रत्येक अंक का कम से कम एक बार प्रयोग करके बनी संख्याएँ $= 3^n - (3 \times 2^n - 6) - 3$

$= 3^n - 3 . 2^n + 3$

6. There are 'n' straight line in a plane, no two of which are parallel and no three pass through the same point. Their points of intersection are joined. Then the maximum number of fresh lines thus introduced is **[16JM110209]**

एक समतल में 'n' सरल रेखाएँ है जिनमें से कोई भी दो समान्तर नहीं है और कोई भी तीन रेखाएँ समान बिन्दु से नहीं गुजरती हैं। उनके प्रतिच्छेद बिन्दुओं को मिलाया जाता हैं। इस प्रकार बनने वाली नयी अधिकतम सरल रेखाओं की संख्या हैं–

(A) $\frac{1}{12}\, n\, (n-1)^2\, (n-3)$ (B) $\frac{1}{8}\, n\, (n-1)\, (n+2)\, (n-3)$

(C*) $\frac{1}{8}\, n\, (n-1)\, (n-2)\, (n-3)$ (D) $\frac{1}{8}\, n\, (n+1)\, (n+2)\, (n-3)$

Sol. If 'n' straight line intersect each other then total number of intersection point is ${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

Now, from these ${}^nC_2$ points we can make ${}^{\frac{n(n-1)}{2}}C_2$ lines. (total old + new lines) and number of old lines are ${}^{n-1}C_2 \times n$

So fresh lines are ${}^{\frac{n(n-1)}{2}}C_2 - {}^{n-1}C_2 \times n = \frac{1}{8}\, n\, (n-1)\, (n-2)\, (n-3)$

Hindi. यदि 'n' सरल रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती है, तो कुल प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या ${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

अब ${}^nC_2$ बिन्दुओं से हम ${}^{\frac{n(n-1)}{2}}C_2$ रेखाएँ बना सकते है (कुल पुरानी + नयी रेखाये)

तथा पुरानी रेखाओं की संख्या ${}^{n-1}C_2 \times n$ होगी।

अतः नयी बनी रेखाओं की संख्या $^{\frac{n(n-1)}{2}}C_2 - {}^{n-1}C_2 \times n = \frac{1}{8}$ n (n – 1) (n – 2) (n – 3)

7. X = {1, 2, 3, 4, ... 2017} and $A \subset X$; $B \subset X$; $A \cup B \subset X$ here $P \subset Q$ denotes that P is subset of Q($P \neq Q$). Then number of ways of selecting unordered pair of sets A and B such that $A \cup B \subset X$.

X = {1, 2, 3, 4, ... 2017} तथा $A \subset X$; $B \subset X$; $A \cup B \subset X$ जहाँ $P \subset Q$, Q को P का उपसमुच्चय को व्यक्त करता है। Q($P \neq Q$) समुच्चय A तथा B के अक्रमित युग्मों के चुनने के क्रमचयों की संख्या जबकि $A \cup B \subset X$.

(A*) $\frac{(4^{2017}-3^{2017})+(2^{2017}-1)}{2}$ (B) $\frac{(4^{2017}-3^{2017})}{2}$

(C) $\frac{4^{2017}-3^{2017}+2^{2017}}{2}$ (D) None of these इनमें से कोई नहीं

Sol. Ordered pair = total – ($A \cup B = X$) = $4^n - 3^n$
Subsets of X = 2^n will not repeat in both but here the whole set X has not been taken
So subsets of x which are not repeated ($2^n - 1$)

Hence unordered pair = $\frac{(4^n-3^n)-(2^n-1)}{2}$ + (2^n – 1)

Hindi क्रमित युग्म = कुल – ($A \cup B = X$) = $4^n - 3^n$
X का उपसमुच्चय = 2^n का दोनों में पुनरावृत्ति नहीं होगा।
परन्तु यहाँ सम्पूर्ण समुच्चय x नहीं लिया गया है। इसलिए x का उपसमुच्चय जो कि (2^n – 1) बार पुनरावृत्ति नहीं है।

अतः अक्रमित युग्म = $\frac{(4^n-3^n)-(2^n-1)}{2}$ + (2^n – 1)

8. The number of ways in which 15 identical apples & 10 identical oranges can be distributed among three persons, each receiving none, one or more is:
(A) 5670 (B) 7200 (C*) 8976 (D) 7296
15 समरूप सेब और 10 समरूप संतरो को तीन व्यक्तियों में कितने तरीकों से बांटा जा सकता है यदि प्रत्येक व्यक्ति को शून्य, एक या अधिक मिले।
(A) 5670 (B) 7200 (C*) 8976 (D) 7296

Sol. Using multinomial theorem

Total no. of ways = $^{15+3-1}C_{15} \times {}^{10+3-1}C_{10} = {}^{17}C_{15} \times {}^{12}C_{10} = \frac{17\times16}{2}\times\frac{12\times11}{2}$ = 8976

Hindi. बहुपदीय प्रमेय का प्रयोग करने पर

कुल तरीके = $^{15+3-1}C_{15} \times {}^{10+3-1}C_{10} = {}^{17}C_{15} \times {}^{12}C_{10} = \frac{17\times16}{2}\times\frac{12\times11}{2}$ = 8976

9. Two variants of a test paper are distributed among 12 students. Number of ways of seating of the students in two rows so that the students sitting side by side do not have identical papers & those sitting in the same column have the same paper is: **[16JM110210]**
एक प्रश्न पत्र के दो कोड 12 विद्यार्थियों में बाँटे जाते हैं, तो इन विद्यार्थियों को दो पंक्तियों में कितने प्रकार से बिठाया जा सकता है कि प्रत्येक पंक्ति में पास–पास बैठे विद्यार्थियों को समान प्रश्न–पत्र नहीं मिले तथा प्रत्येक स्तम्भ के सभी विद्यार्थियों को समान प्रश्न पत्र मिले।

(A) $\frac{12!}{6!\,6!}$ (B) $\frac{(12)!}{2^5 .\, 6!}$ (C) $(6!)^2$. 2 (D*) 12! × 2

Sol.

A	B	A	B	A	B

= total number of required possible is अभिष्ट संख्या

B	A	B	A	B	A

$^{12}C_6 \times 6! \times 6! \times 2! = \frac{12!}{6!\times6!} \times 6! \times 6! \times 2! = 2 \times 12!$

10. How many ways are there to invite one of three friends for dinner on 6 successive nights such that no friend is invited more than three times ?

6 क्रमागत रात्री पर भोजन के लिए तीन मित्रो में से एक को कितने तरीके से आमंत्रित कर सकता है जबकि वह किसी भी मित्र को तीन से अधिक बार नही बुलाता है।

(A*) $\frac{6\times 6!}{1!2!3!} + 3\times\frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!2!2!}$ (B) $\frac{6\times 6!}{1!2!3!} + 6\times\frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!2!2!}$

(C) $\frac{6\times 6!}{1!2!3!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!2!2!}$ (D) $\frac{3\times 6!}{1!2!3!} + 3\times\frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!2!2!}$

Sol. Let friend 1 invites 'a' times, friend 2 invites 'b' times, friend 3 invites 'c' times

then unordered (a, b, c) can be (1, 2, 3), (0, 3, 3), (2, 2, 2)

$\Rightarrow$ total number of ways equal to $\frac{6\times 6!}{1!2!3!} + 3\times\frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!2!2!}$

Hindi. माना मित्र 1 'a' बार आता है मित्र 2 'b' बार आता है।

मित्र 3, c बार आता है। अक्रमित (a, b, c), (1, 2, 3), (0, 3, 3), (2, 2, 2)

$\Rightarrow$ कुल तरीके $\frac{6\times 6!}{1!2!3!} + 3\times\frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!2!2!}$

11. If n identical dice are rolled, then number of possible out comes are.

(A) 6^n (B) $\frac{6^n}{n!}$ (C*) ${}^{(n+5)}C_5$ (D) None of these

यदि n सर्वसम पासों (dice) को फेंका जाता है, तो संभावित परिणामों की संख्या है–

(A) 6^n (B) $\frac{6^n}{n!}$ (C) ${}^{(n+5)}C_5$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Let i appears on a_i dice i = 1, 2, 3, 4, 5, 6

so no. of out comes is equal to no. of solution of $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = n = {}^{(n+5)}C_5$

Hindi. मानाकि a_i पासे पर i परिणाम आता है जबकि i = 1, 2, 3, 4, 5, 6

अतः परिणामों की संख्या समीकरण $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = n$ के हलों की संख्या के बराबर होगी।

अतः सम्भावित परिणाम $= {}^{(n+5)}C_5$

12. Number of ways in which a pack of 52 playing cards be distributed equally among four players so that each have the Ace, King, Queen and Jack of the same suit, is **[16JM110211]**

ताश के 52 पत्तों को 4 व्यक्तियों में समान रूप से बाटनें के कितने तरीकें होंगें जबकि प्रत्येक व्यक्ति को समान प्रकार (same suit) के इक्का, बादशाह, बेगम और गुलाम मिलते हो–

(A*) $\frac{36!\,.\,4!}{(9!)^4}$ (B) $\frac{36!}{(9!)^4}$ (C) $\frac{52!\,.\,4!}{(13!)^4}$ (D) $\frac{52!}{(13!)^4}$

Sol. Required number of ways ${}^{36}C_9\,.\,{}^{27}C_9\,.\,{}^{18}C_9\,.\,{}^{9}C_9\,.\,4! = \frac{36!}{(9!)^4}\times 4!$

Hindi अभीष्ट तरीकों की संख्या ${}^{36}C_9\,.\,{}^{27}C_9\,.\,{}^{18}C_9\,.\,{}^{9}C_9\,.\,4! = \frac{36!}{(9!)^4}\times 4!$

13. Find total number of positive integral solutions of $15 < x_1 + x_2 + x_3 \le 20$.

$15 < x_1 + x_2 + x_3 \le 20$ के कुल धनात्मक पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(A*) 685 (B) 1140 (C) 455 (D) 1595

Sol. $x_1 + x_2 + x_3 = 20 - t$

$t = 0, 1, 2, 3, 4$

Required value = $\sum_{t=0}^{4} {}^{19-t}C_2 = {}^{20}C_3 - {}^{15}C_3 = 1140 - 455 = 685$

Hindi. $x_1 + x_2 + x_3 = 20 - t$

$t = 0, 1, 2, 3, 4$

अभीष्ट मान $= \sum_{t=0}^{4} {}^{19-t}C_2 = {}^{20}C_3 - {}^{15}C_3 = 1140 - 455 = 685$

14. Seven person $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_7$ initially seated at chairs $C_1, C_2 \ldots\ldots, C_7$ respectively. They all left their chairs symultaneously for hand wash. Now in how many ways they can again take seats such that no one sits on his own seat and P_1 sits on C_2 and P_2 sits on C_3 ?

सात व्यक्ति $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_7$ प्रारम्भ में क्रमशः $C_1, C_2 \ldots\ldots, C_7$ कुर्सिया पर बैठे है वो सभी एक साथ हाथ धोने अपनी कुर्सियों से उठकर जाते है और पुनः कुर्सियों पर बैठते है तो ऐसे तरीकों की संख्या जिनमें कोई भी व्यक्ति स्वंय की कुर्सी पर न बैठे एवं P_1, कुर्सी C_2 पर एवं P_2, कुर्सी C_3 पर बैठे, होगी –

(A) 52 (B*) 53 (C) 54 (D) 55

Sol. If P_3 sits on C_1

यदि P_3 कुर्सी C_1 पर बैठता है।

$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)$$

$= 4.3 - 4 + 1 = 9$

If P_3 does not sit on C_1

यदि P_3 कुर्सी C_1 पर बैठता है।

$$= 5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right) = 44$$

total number of ways = 44 + 9 = 53

$$\begin{cases} P_1 & C_1 & \\ P_2 & C_2 & \to P_1 \\ P_3 & C_3 & \to P_2 \\ P_4 & C_4 & \\ P_5 & C_5 & \\ P_6 & C_6 & \\ P_7 & C_7 & \end{cases}$$

15. Given six line segments of length 2, 3, 4, 5, 6, 7 units, the number of triangles that can be formed by these segments is **[16JM110212]**

छः रेखाखण्ड दिये गये है जिनकी लम्बाईयाँ 2, 3, 4, 5, 6, 7 इकाई हैं। इन रेखाखण्डों की सहायता से बनाए जा सकने वाले त्रिभुजों की संख्या हैं–

(A*) ${}^6C_3 - 7$ (B) ${}^6C_3 - 6$ (C) ${}^6C_3 - 5$ (D) ${}^6C_3 - 4$

Sol. First we select 3 length from the given 6 length so the no. of ways = ${}^6c_3$

But these some pair i.e. (2, 3, 7), (2, 3, 6), (2, 3, 5) (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 4, 7) are not form a triangle so that total no. of ways is

${}^6C_3 - 7$ ways

Hindi. दी गई 6 लम्बाइयों में से 3 लम्बाईयों के चयन के तरीके = ${}^6c_3$

परन्तु (2, 3, 7), (2, 3, 6), (2, 3, 5) (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 4, 7) समूहों में शामिल लम्बाईयाँ त्रिभुज का निर्माण नहीं करती है अतः कुल त्रिभुजों की संख्या = ${}^6C_3 - 7$

16. There are m apples and n oranges to be placed in a line such that the two extreme fruits being both oranges. Let P denotes the number of arrangements if the fruits of the same species are different and Q the corresponding figure when the fruits of the same species are alike, then the ratio P/Q has the value equal to :

(A*) ${}^{n}P_2 . {}^{m}P_m . (n-2)!$ (B) ${}^{m}P_2 . {}^{n}P_n . (n-2)!$ (C) ${}^{n}P_2 . {}^{n}P_n . (m-2)!$ (D) none

m सेबों और n सन्तरों को एक पंक्ति में इस प्रकार रखा गया हैं कि दोनों किनारों पर रखे हुए फल सन्तरे हैं। मानाकि P उन कुल विन्यासों की संख्या को प्रदर्शित करता है जबकि समान प्रजाति के फल अलग–अलग हैं और Q उन कुल विन्यासों की संख्या को प्रदर्शित करता है जबकि समान प्रजाति के फल एक समान हैं, तो अनुपात P/Q का मान होगा –

(A*) ${}^{n}P_2 . {}^{m}P_m . (n-2)!$ (B) ${}^{m}P_2 . {}^{n}P_n . (n-2)!$ (C) ${}^{n}P_2 . {}^{n}P_n . (m-2)!$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. **For P →** If same species are different

Total number of arragements is ${}^{n}P_2 . (m + n - 2)!$

For Q → If same species are alike then number of arrangement is $\dfrac{(m+n-2)!}{m! \; .(n-2)!}$

Hence $\dfrac{P}{Q} = {}^{n}P_2 . m! . (n-2)! = {}^{n}P_2 . {}^{m}P_m . (n-2)!$

Hindi. **P के लिए →** यदि समान प्रजातियों के फल भिन्न–भिन्न हो, तो

कुल व्यवस्थाऐं $= np_2 . (m + n - 2)!$

Q के लिए → यदि समान प्रजातियों के सभी फल एक समान हो, तो कुल व्यवस्थाऐं $= \dfrac{(m+n-2)!}{m! \; .(n-2)!}$

अतः $\dfrac{P}{Q} = np_2 . m! . (n-2)! = np_2 . mp_m . (n-2)!$

17. The number of intersection points of diagonals of 2009 sides regular polygon, which lie inside the polygon. **[16JM110213]**

2009 भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णो के प्रतिच्छेद बिन्दुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो कि बहुभुज के अन्दर स्थित है।

(A*) ${}^{2009}C_4$ (B) ${}^{2009}C_2$ (C) ${}^{2008}C_4$ (D) ${}^{2008}C_2$

Sol. We know that in odd sides polygon no two or more then two diagonals are parallel, so if we take any 4 vertices, we get one point of intersection of diagonals,

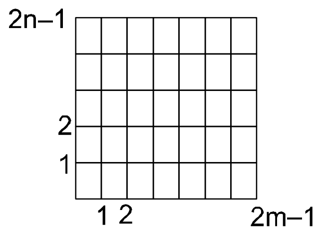
Hence required no of points will be ${}^{2009}C_4$.

Hindi. हम जानते है कि विषम भुजा वाले बहुभुज में कोई भी दो या दो से ज्यादा विकर्ण समान्तर नही होते है, अतः यदि हम कोई 4 शीर्ष ले तों हमें एक प्रतिच्छेद बिन्दु विकर्ण पर मिलेगा

अतः अभीष्ट बिन्दुओं की संख्या $= {}^{2009}C_4$.

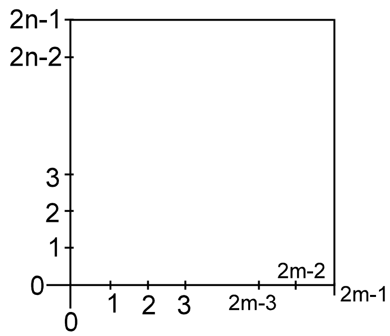
18. A rectangle with sides 2m – 1 and 2n – 1 is divided into squares of unit length by drawing parallel lines as shown in the diagram, then the number of rectangles possible with odd side lengths is **[DRN1173]**

एक आयत जिसकी भुजाएँ 2m – 1 एवं 2n – 1 इकाई है को समान्तर रेखाओं द्वारा चित्र में दिखाए अनुसार इकाई लम्बाई के वर्गों में बांटा जाता है, तो उन सम्भव आयतों की संख्या जिनकी भुजाओं की लम्बाई विषम हैं, होगी–



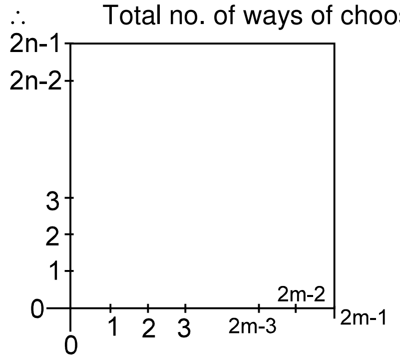
(A) $(m + n - 1)^2$ (B) 4^{m+n-1} (C*) $m^2 n^2$ (D) $m(m + 1)n(n + 1)$

Sol.



No. of ways of choosing horizontal side of rectangle of one unit length = 2m – 1
No. of ways of choosing horizontal side of rectangle of 3 unit length = 2m – 3
$\therefore$ Total no. of ways of choosing horizontal side of rectangle of odd length= (2m–1)+ (2m–3)+... +1 = m^2
similarly no. of ways of choosing the vertical side of rectangle of odd length = n^2.
$\therefore$ Total no. of ways of choosing the rectangle = $n^2\ m^2$

Hindi



एक इकाई लम्बाई के आयत की क्षैतिज भुजा को चुनने के तरीके = 2m – 1
3 इकाई लम्बाई के आयत की क्षैतिज भुजा को चुनने के तरीके = 2m – 3
$\therefore$ विषम लम्बाई के आयत की क्षैतिज भुजा को चुनने के तरीके = (2m – 1) + (2m – 3) + ... + 1 = m^2
इसी प्रकार विषम लम्बाई के आयत की उर्ध्वाधर भुजा को चुनने के तरीके = n^2.
$\therefore$ आयत चुनने के सभी तरीके = $n^2\ m^2$

19. Find the number of all rational number $\frac{m}{n}$ such that

(i) $0 < \frac{m}{n} < 1$, (ii) m and n are relatively prime (iii) m n = 25!

Hindi सभी परिमेय संख्या $\frac{m}{n}$ की संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि–

(i) $0 < \frac{m}{n} < 1$, (ii) m और n सह अभाज्य है। (iii) m n = 25!

(A*) 256 (B) 128 (C) 512 (D) None of these

Sol. m, n both product of element of one of the subset of $\{2^{22}, 3^{10}, 5^6, 7^3, 11^2, 13, 17, 19, 23\}$ such that

mn = 25! $\Rightarrow$ number of ways of selecting 'm' is 2^9 ways (here n is automatically fixed according to m)

$\Rightarrow$ Total number of required ways = $\frac{2^9}{2} = 256$

{because in half of the ways $\frac{m}{n} > 1$ and in half of the ways $0 < \frac{m}{n} < 1$ }

Hindi. m, n के उपसमुच्च्य में से एक $\{2^{22}, 3^{10}, 5^6, 7^3, 11^2, 13, 17, 19, 23\}$ दोनों अवयवों का गुणन इस प्रकार है कि

mn = 25! $\Rightarrow$ m को चुनने के तरीके 2^9 तरीके। (n, m कके अनुसार है।)

$\Rightarrow$ कुल तरीके $= \dfrac{2^9}{2} = 256$

{क्योकि तरीकों में आधे $\dfrac{m}{n} > 1$ तथा तरीकों में आधे $0 < \dfrac{m}{n} < 1$ }

PART-II: NUMERICAL VALUE QUESTIONS

भाग-II : संख्यात्मक प्रश्न (NUMERICAL VALUE QUESTIONS)

INSTRUCTION :

- The answer to each question is **NUMERICAL VALUE** with two digit integer and decimal upto two digit.
- If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.

निर्देश :

- इस खण्ड में प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **संख्यात्मक मान** के रूप में है जिसमें दो पूर्णांक अंक तथा दो अंक दशमलव के बाद में है।
- यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के **दो** स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।

1. Number of five digits numbers divisible by 3 and divisible by 4 that can be formed using the digits 0, 1, 2, 3, 4, 7 and 8 if, each digit is to be used atmost one is M and N are respectively then value of $\dfrac{M}{N}$ is

अंको 0, 1, 2, 3, 4, 7 और 8 का उपयोग करते हुए 3 से विभाजित तथा 4 से विभाजित होने वाली 5 अंको की N संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जबकि प्रत्येक अंक का उपयोग अधिकतम 1 बार हुआ हो, M तथा N हो तो $\dfrac{M}{N}$ का मान होगा–

Ans. 01.16 or 01.17

Sol. Number divisible by 3 if sum of digits divisible

case-I	If $1 + 2 + 3 + 4 + 8 = 18$	Number of ways = 120
case-II	If $1 + 2 + 3 + 7 + 8 = 21$	Number of ways = 120
case-III	If $2 + 3 + 4 + 7 + 8 = 24$	Number of ways = 120
case-IV	If $1 + 2 + 0 + 4 + 8 = 15$	Number of ways = 96
case-V	If $1 + 2 + 0 + 7 + 8 = 18$	Number of ways = 96
case-VI	If $2 + 0 + 4 + 7 + 8 = 21$	Number of ways = 96
case-VII	If $0 + 1 + 3 + 4 + 7 = 15$	Number of ways = 96
total number		744

Number will be divisible by 4 if last two digit will be divisible by 4

Hence last two digit can be 04, 08, 12, 20, 24, 28, 32, 40,48, 72, 80, 84

Case-I : if last two digit will be 04, 08, 20, 40, 80,

Then number divisible by 4 will be $= 5 \times 4 \times 3 \times 5 = 300$

Case-II : if last two digit will be 12, 24, 28, 32, 48, 72, 84

Then number divisible by 4 will be $= 4 \times 4 \times 3 \times 7 = 336$

Hence total = 300 + 336 = 636

Hence $\frac{M}{N} = \frac{744}{636} = 1.16$

Hindi. कोई भी संख्या 3 से विभाजित होगी यदि अंकों का योग 3 से भाज्य हो।

स्थिति-I	If $1 + 2 + 3 + 4 + 8 = 18$	तरीकों की संख्या = 120
स्थिति-II	If $1 + 2 + 3 + 7 + 8 = 21$	तरीकों की संख्या = 120
स्थिति-III	If $2 + 3 + 4 + 7 + 8 = 24$	तरीकों की संख्या = 120
स्थिति-IV	If $1 + 2 + 0 + 4 + 8 = 15$	तरीकों की संख्या = 96
स्थिति-V	If $1 + 2 + 0 + 7 + 8 = 18$	तरीकों की संख्या = 96
स्थिति-VI	If $2 + 0 + 4 + 7 + 8 = 21$	तरीकों की संख्या = 96
स्थिति-VII	If $0 + 1 + 3 + 4 + 7 = 15$	तरीकों की संख्या = 96
कुल संख्या		744

Number will be divisible by 4 if last two digit will be divisible by 4
Hence last two digit can be 04, 08, 12, 20, 24, 28, 32, 40,48, 72, 80, 84
Case-I : if last two digit will be 04, 08, 20, 40, 80,
Then number divisible by 4 will be $= 5 \times 4 \times 3 \times 5 = 300$
Case-II : if last two digit will be 12, 24, 28, 32, 48, 72, 84
Then number divisible by 4 will be $= 4 \times 4 \times 3 \times 7 = 336$
Hence total = 300 + 336 = 636

Hence $\frac{M}{N} = \frac{744}{636} = 1.16$

2. The sides AB, BC & CA of a triangle ABC have 3, 4 & 5 interior points respectively on them. If the number of triangles that can be constructed using these interior points as vertices is k and number of lines segments including sides of triangle is p then $\frac{k}{p}$ is **[16JM110214]**

त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA पर क्रमशः 3, 4 और 5 अभ्यान्तर बिन्दु (interior points) स्थित हैं। इन अभ्यान्तर (interior) बिन्दुओं को शीर्ष मानकर बनाए गए त्रिभुजों की संख्या k है तथा रेखाखण्डों की संख्या p हो तो $\frac{k}{p}$ का मान होगा–

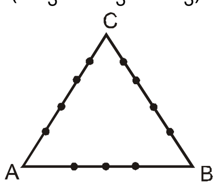
Ans. 04.02

Sol. Total number of triangle = Two points taken from AB and one point either BC or CA + similarly BC + similarly $\angle$A + one point each sides.

$= {}^3C_2\,[{}^4C_1 + {}^5C_1] + {}^4C_2\,[{}^5C_1 + {}^3C_1] + {}^5C_2\,[{}^3C_1 + {}^4C_1] + {}^3C_1{}^4C_1{}^5C_1 = 205$

Total – (collinear points used)

$= {}^{12}C_3 - ({}^3C_3 + {}^4C_3 + {}^5C_3) = 220 - 15 = 205$



Alternate

Total – Collinear points used $= {}^{12}C_3 - ({}^3C_3 + {}^4C_3 + {}^5C_3) = 220 - 15 = 205$

number of line segment $= 1+1+1 + {}^3c_1\,{}^4c_1 + {}^3c_1\,{}^5c_1 + {}^4c_1\,{}^5c_1 = 50$

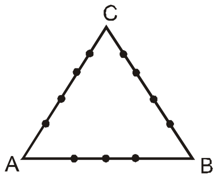
Hence $\frac{k}{p} = \frac{201}{50}$

Hindi. त्रिभुजों की कुल संख्या = दो बिन्दु AB पर से तथा एक बिन्दु BC या CA से लेगें + इसी प्रकार BC + इसी प्रकार CA + एक बिन्दु प्रत्येक भुजा पर से

$= {}^3C_2\,[{}^4C_1 + {}^5C_1] + {}^4C_2\,[{}^5C_1 + {}^3C_1] + {}^5C_2\,[{}^3C_1 + {}^4C_1] + {}^3C_1{}^4C_1{}^5C_1 = 205$

कुल – (संरेखीय बिन्दु लेकर बनाये गये त्रिभुज)

$= {}^{12}C_3 - ({}^3C_3 + {}^4C_3 + {}^5C_3)$
$= 220 - 15 = 205$



वैकल्पकि

कुल – संरेखीय लेकर बनाये गये त्रिभुज $= {}^{12}C_3 - ({}^3C_3 + {}^4C_3 + {}^5C_3) = 220 - 15 = 205$

रेखाखण्डों की संख्या $= 1+1+1 + {}^3C_1\,{}^4C_1 + {}^3C_1\,{}^5C_1 + {}^4C_1\,{}^5C_1 = 50$

अतः $\frac{k}{p} = \frac{201}{50}$

3. Shubham has to make a telephone call to his friend Nisheeth, Unfortunately he does not remember the 7 digit phone number. But he remembers that the first three digits are 635 or 674, the number is odd and there is exactly one 9 in the number. The maximum number of trials that Shubham has to make to be successful is N then $\left(\frac{N}{100}\right)$ is equal to

शुभम अपने मित्र निशिथ को टेलीफोन करना चाहता है। दुर्भाग्यवश उसको 7 अंकों का फोन नम्बर पता नहीं है। परन्तु उसको यह पता है कि प्रथम तीन अंक 635 या 674 हैं, नम्बर विषम है और ठीक एक '9' रखता है, तो शुभम द्वारा उसके मित्र को टेलीफोन लगाने के अधिकतम प्रयासों की संख्या, N है तब $\left(\frac{N}{100}\right)$ बराबर है।

Ans. 34.02

Sol. Let the number starts with 635 then two cases arise

Case-1 If 9 occurs at units place then the number of numbers $= 9 \times 9 \times 9 = 729$

Case-2 If 9 does not come at units place then number of ways for 9 to occur at either of the rest three places $= {}^3C_1 = 3$

the number of numbers $= 3 \times 9 \times 9 \times 4 = 972$

total numbers starting with 635 $= 729 + 972 = 1701$

Similarly total number starting with 674 $= 1701$

Maximum number of trials $= 1701 \times 2 = 3402$

Hindi माना नम्बर 635 से शुरू हो तब दो स्थितियां है

स्थिति -1 यदि इकाई स्थान पर 9 आता है। तब संख्याएं के क्रमचय $= 9 \times 9 \times 9 = 729$

स्थिति -2 यदि इकाई स्थान पर 9 नहीं आता है। तो शेष तीन स्थानों पर 9 आ सकता है तब क्रमचय $= {}^3C_1 = 3$

संख्याओं के क्रमचय $= 3 \times 9 \times 9 \times 4 = 972$

कुल संख्याएं जो 635 से शुरू हो $= 729 + 972 = 1701$

इसी प्रकार कुल संख्याएं जो 674 से शुरू हो $= 1701$

अधिकतम प्रयास $= 1701 \times 2 = 3402$

4. Seven different coins are to be divided amongst three persons. If no two of the persons receive the same number of coins but each receives atleast one coin & none is left over, then the number of ways in which the division may be made is k, then number of ways in which k can be resolve as a product of two coprime number is **[16JM110215]**

7 विभिन्न सिक्के तीन व्यक्तियों में बांटे जाते हैं। यदि किन्ही भी दो व्यक्तियों को समान संख्या में सिक्के नहीं मिलते हैं लेकिन प्रत्येक को कम से कम एक सिक्का मिलता है और कोई सिक्का शेष नहीं रहता है, तो इस प्रकार के विभाजन के तरीके k हो तो, k को दो सहअभाज्य संख्याओं के गुणनखण्ड़ के रूप में लिखने के तरीके होगें।

Ans. 08.00

Sol. Coin dividing in any are possible i.e.

1, 2, 4

so the number of ways is

$k = {}^7C_1 \,.\, {}^6C_2 \,.\, {}^4C_4 \,.\, 3! = 7 \times 15 \times 6 = 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

hence number of ways = $2^{4-1} = 8$

Hindi. सिक्के निम्न तरीको से बांटे जा सकते हैं अर्थात् 1, 2, 4

अतः कुल तरीकों की संख्या

$k = {}^7C_1 \,.\, {}^6C_2 \,.\, {}^4C_4 \,.\, 3! = 7 \times 15 \times 6 = 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

अतः तरीकें = $2^{4-1} = 8$

5. Number of ways in which five vowels of English alphabets and ten decimal digits can be placed in a row such that between any two vowels odd number of digits are placed and both end places are occupied by vowels is 20(b!)(5!) then b equals to

अंग्रेजी वर्णमाला के पाँच स्वरों तथा दस दशमलव अंकों को एक पंक्ति में इस तरह व्यवस्थित किया जाए कि दो स्वरों के मध्य विषम संख्या में अंक आयें तथा दोनों सिरों पर स्वर आयें तो तरीकों की संख्या 20(b!)(5!) है तब b बराबर है–

Ans. 10.00

Sol. Ten digits can be partitioned into four parts as

1 + 1 + 3 + 5 ; 1 + 1 + 1 + 7 ; 1 + 3 + 3 + 3 (each partitioning has odd number of digits)

The number of ways in which these can be placed in the four spaces =

$\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} = 20$ ways

also numbers of arrangements of vowels = 5 !

Number of arrangements of digits = 10 !

total ways = 20 (10 !) (5 !)

Hindi. दस अंकों को इस प्रकार विभाजित किया जा सकता है

1 + 1 + 3 + 5 ; 1 + 1 + 1 + 7 ; 1 + 3 + 3 + 3 (प्रत्येक भाग में विषम संख्या में अंक है)

उन तरीकों की संख्या जिनमें इनको चार स्थानों पर रखा जा सकता है

$= \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} = 20$

साथ ही स्वरों को व्यवस्थित करने के तरीके = 5 !

अंकों को व्यवस्थित करने के तरीके = 10 !

कुल तरीके = 20 (10 !) (5 !)

6. The number of integers which lie between 1 and 10^6 have the sum of the digits equal to 12 is A and number of such 6 digit integer which have the sum of the digits equal to 12 is B then $\frac{A}{B} =$

[16JM110216]

1 और 10^6 के बीच पूर्णांक की संख्या जिनके अंको का योग 12 हो A है तथा इसी तरह की 6 अंकों की संख्याऐं जिनके अंकों का योग 12 हो, B है तब $\frac{A}{B} =$

Ans. 01.40

Sol. Let number be $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$

But Here $x_1 + x_2 + \ldots . x_6 = 12$

so coefficient of x^{12} in expansion $(1 + x + x^2 + \ldots . + x^9)^6 = (1 - x^{10})^6 \,.\, (1 - x)^{-6}$

$\Rightarrow \quad {}^{17}C_{12} - {}^6C_1 \cdot {}^7C_2 = 6188 - 126 = 6062$

If number is 6 digit then a_1, will be 1 to 9

so coefficient of x^{12} in expansion $(x + x^2 + ... + x^9)(1 + x + x^2 + ... + x^9)^6 = 4317$

Hence $\frac{A}{B} = \frac{6062}{4317}$

Hindi. माना संख्या $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ है।

परन्तु यहां $x_1 + x_2 + ... x_6 = 12$

अतः $(1 + x + x^2 + ... + x^9)^6$ के प्रसार में x^{12} का गुणांक $= (1 - x^{10})^6 . (1 - x)^{-6}$

$\Rightarrow \quad {}^{17}C_{12} - {}^6C_1 \cdot {}^7C_2 = 6188 - 126 = 6062$

If number is 6 digit then a_1, will be 1 to 9

so coefficient of x^{12} in expansion $(x + x^2 + ... + x^9)(1 + x + x^2 + ... + x^9)^6 = 4317$

Hence $\frac{A}{B} = \frac{6062}{4317}$

7. The number of ways in which 8 non-identical apples can be distributed among 3 boys such that every boy should get atleast 1 apple & atmost 4 apples is N then $\left(\frac{N}{100}\right)$ is equal to

8 विभिन्न सेब को 3 लड़को में बांटने के तरीकों की संख्या N है, जबकि प्रत्येक लड़के को कम से कम एक और अधिक से अधिक 4 सेब मिलते हैं तब $\left(\frac{N}{100}\right)$ बराबर है

Ans. 46.20

Sol. 8 - non identical

number of ways =

B_1	B_2	B_3
1	3	4
2	3	3
2	2	4

Here required number of ways $= 3!\,\{{}^8C_1 . {}^7C_3 . {}^4C_4 + \frac{{}^8C_2 . {}^6C_3 . {}^3C_3}{2\,!} + \frac{{}^8C_2 . {}^6C_2 . {}^4C_4}{2\,!}\}$

$$= 6\left[\frac{8!}{3!.4!} + \frac{8!}{2!.6!} \times \frac{6!}{3!.2!.2!} + \frac{8!}{2!.6!} \times \frac{6!}{2!.4!.2!}\right] = 6[280 + 280 + 210] = 6 \times 770 = 4620$$

Hindi. 8 विभिन्न सेब

कुल तरीकों की संख्या =

B_1	B_2	B_3
1	3	4
2	3	3
2	2	4

यहाँ अभीष्ट तरीकों की संख्या $= 3!\,\{{}^8C_1 . {}^7C_3 . {}^4C_4 + \frac{{}^8C_2 . {}^6C_3 . {}^3C_3}{2\,!} + \frac{{}^8C_2 . {}^6C_2 . {}^4C_4}{2\,!}\}$

$$= 6\left[\frac{8!}{3!.4!} + \frac{8!}{2!.6!} \times \frac{6!}{3!.2!.2!} + \frac{8!}{2!.6!} \times \frac{6!}{2!.4!.2!}\right] = 6[280 + 280 + 210] = 6 \times 770 = 4620$$

8. In a hockey series between team X and Y, they decide to play till a team wins '10' match. If N is number of ways in which team X wins and if M is number of ways in which team X win while first match is win by team X then $\frac{N}{M} =$

टीम X और Y के मध्य एक हॉकी श्रृंखला खेली जाती है। वे जब तक खेलते है जब तक की एक टीम '10' मैच न जीत लेती है। यदि N टीम X द्वारा श्रृंखला जीतने के तरीके तथा M टीम X द्वारा श्रृंखला जीतने के तरीके जबकि पहला मैच टीम X जीती हो, हो तो $\frac{N}{M} =$

Ans. 01.90

Sol. Let team X wins 'm' matches, if it wins (m + r)th match and wins m – 1 match from the first m + r – 1 matchs ,

so total no. of ways = $\sum_{r=0}^{m} {}^{m+r-1}C_{m-1} = \frac{{}^{20}C_m}{2}$ hence m = 10 = ${}^{19}C_9$

If first match is win by team X then number of ways = ${}^{9}C_9 + {}^{9}C_8 + {}^{10}C_8 + {}^{11}C_8 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{17}C_8$ (last match will be win by team X) = ${}^{18}C_9$

Hence $\frac{N}{M} = \frac{{}^{19}C_9}{{}^{18}C_9} = \frac{19}{10}$

Hindi. टीम X श्रृंखला जीतेगी यदि वह (m + r)वां मैच जीतती हो तथा प्रथम (m + r – 1) मैचो में से m – 1 मैच जीतती हो।

अतः कुल तरीके = $\sum_{r=0}^{m} {}^{m+r-1}C_{m-1} = \frac{{}^{20}C_m}{2}$ अतः hence m = 10 = ${}^{19}C_9$

यदि प्रथम मैच टीम X द्वारा जीता गया हो, तो तरीकें = ${}^{9}C_9 + {}^{9}C_8 + {}^{10}C_8 + {}^{11}C_8 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{17}C_8$ (अंतिम मैच टीम X द्वारा जीता जायेगा) = ${}^{18}C_9$

अतः $\frac{N}{M} = \frac{{}^{19}C_9}{{}^{18}C_9} = \frac{19}{10}$

9. Three ladies have brought one chlid each for admission to a school. The principal wants to interview the six persons one by one subject to the condition that no mother is interviewed before her chlid. Then find the number of ways in which interviews can be arranged

तीन महिलाएँ प्रत्येक अपने एक बच्चे को विद्यालय में प्रवेश दिलाने आती है। प्रधानाध्यापक छः व्यक्तियों का एक के बाद एक साक्षात्कार लेना चाहता है जबकि किसी भी मां का उसके बच्चे से पहले साक्षात्कार नहीं लिया जाता है, तो साक्षात्कार लेने के कुल तरीके होगें।

Ans. 90.00

Sol. Each lady and her child can be arranged in a fixed order only.

∴ The total no. of ways in which interview can be held = $\frac{6\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!} = 90$

Hindi. प्रत्येक महिला तथा उसका बच्चा एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित किये जा सकते हैं।

∴ अतः साक्षात्कार लेने के कुल तरीकों की संख्या = $\frac{6\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!} = 90$

10. In a shooting competition a man can score 0, 2 or 4 points for each shot. Then the number of different ways in which he can score 14 points in 5 shots is

एक निशानेबाजी प्रतियोगिता में एक व्यक्ति प्रत्येक निशाने के लिए 0, 2 या 4 अंक प्राप्त कर सकता हैं। वह 5 निशानों में 14 अंक प्राप्त करने के विभिन्न तरीकों की संख्या बराबर है

Ans. 30.00

Sol. Find the coefficient of x^{14} in the expansion of

$$(x^0 + x^2 + x^4)^5 = (1 + x^2 + x^4)^5 = \left(\frac{1-x^6}{1-x^2}\right)^5 = (1 - x^6)^5 (1 - x^2)^{-5}$$

$$= (1 - 5x^6 + 10x^{12}\ldots\ldots\ldots\ldots)\left(1+ {}^{5}C_1x^2 + {}^{6}C_2x^4 + {}^{7}C_3x^6 + \ldots\ldots\right) = {}^{11}C_7 - 5\,.\,{}^{8}C_4 + 10.5$$

$$= \frac{11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4} - 5.\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4} + 50 = 330 - 350 + 50 = 30$$

Hindi. $(x^0 + x^2 + x^4)^5 = (1 + x^2 + x^4)^5$ के प्रसार में x^{14} का गुणांक ज्ञात करने पर

$$= \left(\frac{1-x^6}{1-x^2}\right)^5 = (1 - x^6)^5 (1 - x^2)^{-5}$$

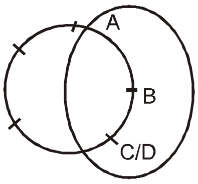
$= (1 - 5x^6 + 10x^{12}\ldots\ldots\ldots\ldots)\left(1+ {}^{5}C_1x^2 + {}^{6}C_2x^4 + {}^{7}C_3x^6 + \ldots\ldots\right)$ के प्रसार में x^{14} का गुणांक

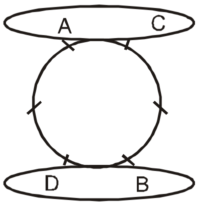
$= {}^{11}C_7 - 5\,.\,{}^{8}C_4 + 10.5 \;=\; \dfrac{11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4} - 5.\dfrac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4} \;+ 50 \;=\; 330 - 350 + 50 = 30$

11. Six persons A, B, C, D, E and F are to be seated at a circular table. The number of ways this can be done if A must have either B or C on his right and B must have either C or D on his right is
छः व्यक्तियों A, B, C, D, E और F को एक गोल मेज के चारों ओर कितने तरीकों से बैठाया जा सकता हैं यदि A के दांयी ओर सदैव B या C बैठते हैं और B के दांयी ओर सदैव C या D बैठते हैं। **[16JM110218]**

Ans. 18.00

Sol. Case-I If B is right on A Subcase -I C is right on B
then no. of ways = (4 –1)! = 6 Subcase- II If D is right on B then no. of ways = (4 –1)! = 6
Case-II If C is right on A $\Rightarrow$ D must be right on B = (4 – 1)! = 3! = 6
Hence total no. of ways is 6 + 6 + 6 = 18



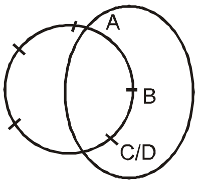


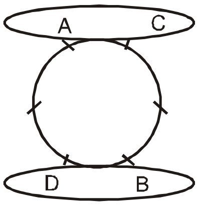
Hindi. स्थिति-I यदि B, A के दांयी ओर है

(a) C, B के दांयी ओर हो, तो
कुल तरीके = (4 –1)! = 6

(b) यदि D, B के दांयी ओर हो, तो
कुल तरीके = (4 –1)! = 6

स्थिति-II, यदि C, A के दांयी ओर हो
$\Rightarrow$ D, B के दांयी ओर होना चाहिए
= (4 – 1)! = 3! = 6
अतः कुल तरीके 6 + 6 + 6 = 18





12. The number of permutations and combination which can be formed out of the letters of the word "SERIES" taking three letters together is a & b respectively then find $\dfrac{a}{b}$

SERIES शब्द के अक्षरों में से 3 अक्षरों को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले क्रमचयों तथा संचयों की संख्या क्रमशः a और b हो, तो $\dfrac{a}{b}$ का मान ज्ञात कीजिये।

Ans. 04.20

Sol. SERIES
S - 2, E - 2 , R, I
case-I when all letter distinct is
$^{4}C_3 \times 3! = 4 \times 6 = 24$
case-II when 2 letters are same the
$^{2}C_1\,.\,^{3}C_1 \times \dfrac{3!}{2!} = 2\,.\,3\,.\,3 = 18$
total number is 24 + 18 = 42
Number of ways in which 3 letters can be select

Case I : All different letter = ${}^4C_3 = 4$
Case I : Two same and one different letter = ${}^2C_1 \times {}^3C_1 = 6$
Hence total number of ways of selecting three letter = 4 + 6 = 10

Hence $\frac{a}{b} = \frac{42}{10} = 4.2$

Hindi. SERIES
S - 2, E - 2 , R, I
स्थिति-I जब सभी अक्षर भिन्न हैं।
$${}^4C_3 \times 3! = 4 \times 6 = 24$$
स्थिति-II जब 2 अक्षर समान हैं।
$${}^2C_1 \cdot {}^3C_1 \times \frac{3!}{2!} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$
कुल संख्याएँ 24 + 18 = 42
तीन अक्षरों के चयन के तरीकें
Case I : सभी अक्षर भिन्न = ${}^4C_3 = 4$
Case I : दो अक्षर समान एवं एक अक्षर भिन्न = ${}^2C_1 \times {}^3C_1 = 6$
अतः तीन अक्षरों के संचयों की संख्या = 4 + 6 = 10

अतः $\frac{a}{b} = \frac{42}{10} = 4.2$

13. A box contains 6 balls which may be all of different colours or three each of two colours or two each of three different colours. The number of ways of selecting 3 balls from the box (if ball of same colour are identical) is **[16JM110219]**
एक बक्से में 6 गेंदे जिनमें से सभी अलग–अलग रंग की हो सकती हैं या दो रंग की तीन–तीन गेंदे हो सकती है या तीन विभिन्न रंग की दो–दो गेंदे हो सकती हैं। (यदि समान रंग की गेंदे सर्वसम हो), तो बक्से में से 3 गेंदे चुनने के तरीके है–

Ans. 31.00
Sol. Case -I If all are different then no. of ways is = ${}^6C_3 = 20$
Case-II If three each of two colours, then combination is
3 0 $\rightarrow$ 2!
2 1 $\rightarrow$ 2! = 2! + 2! = 4 ways

Case-III If two each of three colours, then combination is
2 1 0 $\rightarrow$ 3!
1 1 1 $\rightarrow$ 1! = 3! + 1! = 7ways

Hence required no.is = 20 + 7 + 4 = 31
Hindi. स्थिति -I यदि सभी भिन्न हो, तो कुल तरीके = ${}^6C_3 = 20$
स्थिति-II यदि दो रंग की तीन–तीन गेंदे हो, तो चुनने के तरीके
3 0 $\rightarrow$ 2!
2 1 $\rightarrow$ 2! = 2! + 2! = 4 तरीके
स्थिति-III यदि तीन रंगों की दो–दो गेंदें हो, तो चुनने के तरीके
2 1 0 $\rightarrow$ 3!
1 1 1 $\rightarrow$ 1! = 3! + 1! = 7 तरीके
अतः अभीष्ट संख्या = 20 + 7 + 4 = 31

14. Five friends F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 book five seats C_1, C_2 , C_3 ,C_4 , C_5 respectively of movie KABIL independently (i.e. F_1 books C_1, F_2 books C_2 and so on). In how many different ways can they sit on these seats if no one wants to sit on his booked seat, more over F_1 and F_2 want to sit adjacent to each other.

पाँच मित्र F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 फिल्म 'काबिल' देखने के लिये सिनेमा हाल में पाँच सीटें क्रमशः C_1, C_2 , C_3 ,C_4 , C_5 स्वतंत्र रूप से आरक्षित करवाते है तो इन सीटों पर बैठने का ऐसा तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिये जिनमें कोई भी स्वंय द्वारा आरक्षित सीट पर नहीं बैठे तथा F_1 और F_2 साथ–साथ बैठे।

Ans. 21.00

Sol. $\begin{cases} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{cases}$

$$\begin{cases} - \;\; F_1 \;\; F_2 \;\; - \;\; - \rightarrow \; 1+3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=1+2=3 \\ F_2 \;\; F_1 \;\; - \;\; - \;\; - \rightarrow \; 3!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=2 \end{cases}$$

$$\{- \;\; - \;\; F_1 \;\; F_2 \;\; - \;\; \rightarrow \; 2.2! = 4$$

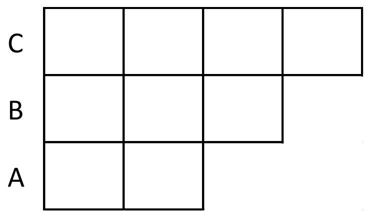
$$\begin{cases} - \;\; - \;\; - \;\; F_1 \;\; F_2 \;\; \rightarrow \; 2.2! = 4 \\ - \;\; - \;\; F_2 \;\; F_1 \;\; - \;\; \rightarrow \; 2.2! = 4 \end{cases}$$

$$\{- \;\; - \;\; - \;\; F_2 \;\; F_1 \;\; \rightarrow \; 2.2! = 4$$

Total number of ways कुल तरीके $= 3 + 2 + 4 \times 4 = 16 + 5 = 21$

15. The number of ways in which 5 X's can be placed in the squares of the figure so that no row remains empty is:

दिये गये चित्र के वर्गों में पाँच X कितने प्रकार से रखे जा सकते हैं ताकि कोई भी पंक्ति खाली न रहे ?



Ans. 98.00

Sol.

A	B	C	
1	1	3	${}^2C_1 \cdot {}^3C_1 \cdot {}^4C_3 = 24$
1	2	2	${}^2C_1 \cdot {}^3C_2 \cdot {}^4C_2 = 26$
1	3	1	${}^2C_1 \cdot {}^3C_3 \cdot {}^4C_1 = 8$
2	1	2	${}^2C_2 \cdot {}^3C_1 \cdot {}^4C_2 = 18$
2	2	1	${}^2C_2 \cdot {}^3C_2 \cdot {}^4C_1 = 12$
			98

16. Sum of all the numbers that can be formed using all the digits 2, 3, 3, 4, 4, 4, is N then $\left(\frac{N}{1111110}\right)$ is equal to **[16JM110220]**

अंको 2, 3, 3, 4, 4, 4 को एक साथ प्रयुक्त करते हुए निर्मित सभी संख्याओं का योग N होगा तब संख्या $\left(\frac{N}{1111110}\right)$ बराबर है

Ans. 20.00

Sol. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{3} = \frac{5!}{3!} = 20$

$\square\square\square\square\square\boxed{4} = \frac{5!}{2!2!} = 30$

Hence sum of unit places is
$2 \times 10 + 3 \times 20 + 4 \times 30 = 200$
Hence required sum is
$= 200 \times (10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = 200 \times (111111) = 22222200$

Hindi. $\square\square\square\square\square\boxed{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

$\square\square\square\square\square\boxed{3} = \frac{5!}{3!} = 20$

$\square\square\square\square\square\boxed{4} = \frac{5!}{2!2!} = 30$

अतः इकाई के स्थान पर स्थित अंको का योग
$2 \times 10 + 3 \times 20 + 4 \times 30 = 200$
अतः अभीष्ट योग
$= 200 \times (10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = 200 \times (111111) = 22222200$

17. Six married couple are sitting in a room. Number of ways in which 4 people can be selected so that there is exactly one married couple among the four is N then (N–225) is equal to
एक कमरे में छः विवाहित युगल बैठे हुए हैं। इनमें से चार व्यक्ति को चुनने के तरीके N है जबकि इन चारों में ठीक एक विवाहित युगल आए तब (N – 225) बराबर है–

Ans. 15.00

Sol. First we select one married couple out of 6 married couple i.e. ${}^6C_1$ ways
total number of required case ${}^6C_1 \times {}^5C_1 \times {}^4C_1 \times 2 = 6 \times 5 \times 4 \times 2 = 240$
N = 240

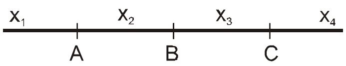
Hindi. सर्वप्रथम हम 6 विवाहित युगल में से एक विवाहित एक युगल का चयन करेगें ${}^6C_1$
अतः कुल अभीष्ट तरीकों की संख्या ${}^6C_1 \times {}^5C_1 \times {}^4C_1 \times 2 = 6 \times 5 \times 4 \times 2 = 240$

18. Let P_n denotes the number of ways of selecting 3 people out of 'n' sitting in a row, if no two of them are consecutive and Q_n is the corresponding figure when they are in a circle. If $P_n - Q_n = 6$, then find $\frac{P_n}{Q_n}$

[16JM110221]

माना कि P_n एक पंक्ति में बैठे हुए 'n' व्यक्तियों में से 3 व्यक्तियों के चयन करने के कुल तरीकों को प्रदर्शित करता है जबकि उनमें से कोई भी दो क्रमागत नहीं है और Q_n उन संगत तरीकों को प्रदर्शित करता है जबकि वे एक वृत्त में बैठे हो। यदि $P_n - Q_n = 6$ हो, तो $\frac{P_n}{Q_n}$ का मान ज्ञात कीजिये–

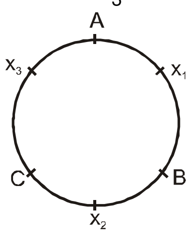
Ans. 01.12

Sol. Here यहाँ $P_n =$ 

$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n - 3 \qquad \therefore \quad x_1, x_4 \geq 0$

$\therefore \quad x_1 + y_2 + y_3 + x_4 \geq n - 5 \qquad x_2, x_3 \geq 1$

$p_n = {}^{n-5+4-1}c_3 = {}^{n-2}c_3 \qquad y_2, y_3 \geq 0$

$Q_n =$ 

$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 = n - 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 = n - 6$

Now अब $P_n - Q_n = 6$

$$\frac{(n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{1.2.3} - \frac{n(n-4)\ (n-5)}{1.2.3} = 6 \quad \Rightarrow \qquad n = 10$$

$P_n = 56$, $Q_n = 50$

19. The number of ways selecting 8 books from a library which has 10 books each of Mathematics, Physics, Chemistry and English, if books of the same subject are alike, is N then find $\frac{N}{10}$

एक पुस्तकालय में गणित, भौतिकी, रसायन शास्त्र और अंग्रेजी प्रत्येक विषय की 10 पुस्तकें हैं। यदि एक विषय की सभी पुस्तके एक समान हो, तो पुस्तकालय में से 8 पुस्तकें चयन करने के कुल तरीकें N है तब $\frac{N}{10}$ का मान है–

Ans. 16.50

Sol. Using multinomial theorem total number of required selection is ${}^{8+3}C_8 = {}^{11}C_8 = {}^{11}C_3 = 165$

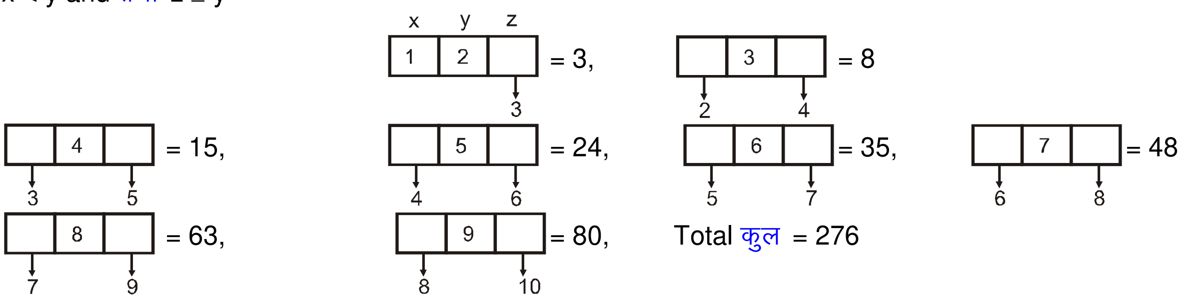
Hindi. बहुपदिय प्रमेय के उपयोग से कुल अभीष्ट चयन के तरीकों की संख्या ${}^{8+3}C_8 = {}^{11}C_8 = {}^{11}C_3 = 165$

20. The number of three digit numbers of the form xyz such that $x < y$ and $z \le y$ is N then $\frac{N}{100}$ is equal to **[16JM110222]**

xyz रूप की तीन अंको की संख्याओं की संख्या N होगी जबकि $x < y$ और $z \le y$ होगी तब $\frac{N}{100}$ बराबर है–

Ans. 02.76

Sol. $x < y$ and तथा $z \le y$



PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE
भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. In an examination, a candidate is required to pass in all the four subjects he is studying. The number of ways in which he can fail is

एक परीक्षा में, एक परीक्षार्थी को उन सभी चार विषयों में पास होना आवश्यक हैं जिन्हे वह पढ़ रहा हैं। वह कितने तरीकों से फेल हो सकता हैं–

(A) ${}^4P_1 + {}^4P_2 + {}^4P_3 + {}^4P_4$ (B) $4^4 - 1$

(C*) $2^4 - 1$ (D*) ${}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4$

Sol. Number of ways he can fail is either one or two, three or four subject then total of ways.

${}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4 = 2^4 - 1$

Sol. उसके असफल होने के तरीकों में वह या तो एक विषय में या दो विषय में या तीन विषय में या चार विषयों में असफल हो सकता हो, अतः कुल तरीकों की संख्या $= {}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4 = 2^4 - 1$

2. The kindergarten teacher has 25 kids in her class. She takes 5 of them at a time, to zoological garden as often as she can, without taking the same 5 kids more than once. Then the number of visits, the teacher makes to the garden exceeds that of a kid by: **[16JM110223]**

एक नर्सरी कक्षा की शिक्षिका अपनी कक्षा के 25 बच्चों को 5–5 के समुहों में चिड़ियाघर दिखाने ले जाती है जबकि उन्ही समान 5 बच्चों के समूह को दूबारा नहीं ले जाया जाता है, तो शिक्षिका किसी एक बच्चे के भ्रमणों की संख्या से कितनी ज्यादा बार भ्रमण करेगी–

(A*) ${}^{25}C_5 - {}^{24}C_4$ (B*) ${}^{24}C_5$ (C) ${}^{25}C_5 - {}^{24}C_5$ (D) ${}^{24}C_4$

Sol. Total no. of visits that a teacher goes is = ${}^{25}C_5$
(selection of 5 different kids each time & teacher goes every time)
Number of visits of a boy = select one particular boy & 4 from rest 24 = ${}^{24}C_4$
So extra visits of a teacher from a boy is = ${}^{25}C_5 - {}^{24}C_4 = {}^{24}C_5$

HINDI. शिक्षिका के भ्रमणों की संख्या = ${}^{25}C_5$
(प्रत्येक बार 5 भिन्न बच्चे तथा शिक्षिका प्रत्येक बार में जाती है)
एक बच्चे के भ्रमणों की संख्या = एक विशिष्ठ बच्चे का चयन तथा बाकि 24 में से 4 = ${}^{24}C_4$
अतः शिक्षिका का बच्चे से अतिरिक्त भ्रमण = ${}^{25}C_5 - {}^{24}C_4 = {}^{24}C_5$

3. A student has to answer 10 out of 13 questions in an examination. The number of ways in which he can answer if he must answer atleast 3 of the first five questions is:
एक विद्यार्थी को एक परीक्षा में 13 प्रश्नों में से 10 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। वह कितने तरीकों से उत्तर दे सकता है यदि उसे प्रथम 5 प्रश्नों में से कम से कम 3 के उत्तर देना आवश्यक हो ?

(A*) 276 (B) 267
(C*) ${}^{13}C_{10} - {}^{5}C_3$ (D*) ${}^{5}C_3 \cdot {}^{8}C_7 + {}^{5}C_4 \cdot {}^{8}C_6 + {}^{8}C_5$

Sol. Total number of required possibilities
${}^{5}C_3 \cdot {}^{8}C_7 + {}^{5}C_4 \cdot {}^{8}C_6 + {}^{5}C_5 \cdot {}^{8}C_5 = {}^{5}C_3 \cdot {}^{8}C_7 + {}^{5}C_4 \cdot {}^{8}C_6 + {}^{8}C_5 = {}^{13}C_{10} - {}^{5}C_3 = 276$

4. Number of ways in which 3 different numbers in A.P. can be selected from 1, 2, 3,...... n is:

(A) $\dfrac{(n-2)(n-4)}{4}$ if n is even (B) $\dfrac{n^2-4n+5}{2}$ if n is odd **[16JM110224]**

(C*) $\dfrac{(n-1)^2}{4}$ if n is odd (D*) $\dfrac{n(n-2)}{4}$ if n is even

संख्याओं 1, 2, 3,...... n में से समान्तर श्रेढ़ी में 3 भिन्न–भिन्न संख्याएँ कितने प्रकार से चुनी जा सकती हैं ?

(A) $\dfrac{(n-2)(n-4)}{4}$ यदि n सम हैं (B) $\dfrac{n^2-4n+5}{2}$ यदि n विषम हैं

(C) $\dfrac{(n-1)^2}{4}$ यदि n विषम हैं (D) $\dfrac{n(n-2)}{4}$ यदि n सम हैं

Sol. Here given no. be 1,2,3,.........n
Let common difference = r
Total way of selection = (1, 1 + r, 1+2r),(2, 2 + r, 2 + 2r), ..(n – 2r, n – r, n)
Total numbers are = (n – 2r)
Here $r_{min.} = 1$ and $r_{max.} = (n-1)/2$
Case- I When n is odd

$$\therefore\ r_{max} = \frac{(n-1)}{2} \text{ \& total no. of selection is } = \sum_{r=1}^{(n-1)/2}(n-2r) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

Case - II when n is even = $r_{max} = \dfrac{n-2}{2}$ so total no. selection is

$$= \sum_{r=1}^{(n-2)/2}(n-2r) = \frac{n(n-2)}{2} - \frac{2\left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{n}{2}}{2} = \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(n-\frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{4}$$

Hindi. दी गयी संख्याएँ 1,2,3,.........n
माना कि सार्वअन्तर = r

चुनने के कुल तरीके = (1, 1 + r, 1+2r),(2, 2 + r, 2 + 2r), ..(n – 2r, n – r, n)

कुल संख्याएँ = (n – 2r)

यहाँ $r_{min.} = 1$ तथा $r_{max.} = (n-1)/2$

स्थिति- I जब n विषम हो

$$r_{max} = \frac{(n-1)}{2} \text{ तथा चुनने के कुल तरीके } = \sum_{r=1}^{(n-1)/2}(n-2r) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

स्थिति - II जब n सम हो = $r_{max} = \dfrac{n-2}{2}$

अतः चुनने के कुल तरीके

$$= \sum_{r=1}^{(n-2)/2}(n-2r) = \frac{n(n-2)}{2} - \frac{2\left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{n}{2}}{2} = \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(n-\frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{4}$$

5. 2m white identical coins and 2n red identical coins are arranged in a straight line with (m + n) identical coins on each side of a central mark. The number of ways of arranging the identical coins , so that the arrangements are symmetrical with respect to the central mark.

(A*) ${}^{m+n}C_m$ (B*) ${}^{m+n}C_n$ (C) ${}^{m+n}C_{|m-n|}$ (D) ${}^{m+n}C_{|n-m|}$

2m सर्वसम सफेद सिक्कों तथा 2n सर्वसम लाल सिक्को को एक केन्द्रीय चिन्ह के दोनों तरफ एक सरल रेखा में इस तरह व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक तरफ (m + n) सर्वसम सिक्के आयें, तो सर्वसम सिक्कों के व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या होगी जबकि व्यवस्थापन केन्द्रीय चिन्ह के दोनों तरफ सममित हो।

(A*) ${}^{m+n}C_m$ (B*) ${}^{m+n}C_n$ (C) ${}^{m+n}C_{|m-n|}$ (D) ${}^{m+n}C_{|n-m|}$

Sol. S_2 : mW + nR ——+—— mW + nR Arrangements will be one side

(mW + nR ——+—— mW + nR एक तरफ व्यवस्थित होगें। अतः तरीकों की संख्या = ${}^{m+n}C_m$)

$\therefore$ ${}^{m+n}C_m$

6. The number of ways in which 10 students can be divided into three teams, one containing 4 and others 3 each, is

10 विद्यार्थियों को 3 टीमों में कितने प्रकार से विभाजित किया जा सकता हैं यदि एक टीम में 4 विद्यार्थी हैं और शेष दो में प्रत्येक में 3 विद्यार्थी हो ?

(A) $\dfrac{10\,!}{4\,!\,3\,!\,3\,!}$ (B*) 2100 (C*) ${}^{10}C_4 \,.\, {}^5C_3$ (D) $\dfrac{10\,!}{6\,!\,3\,!\,3\,!}\cdot\dfrac{1}{2}$

Sol. Total required number of teams is

$= {}^{10}C_4 . {}^6C_3 . {}^3C_3 . \frac{1}{2!}$ 2100 = ${}^{10}C_4 . {}^5C_2$ = 2100

Hindi. कुल अभीष्ट टीमों की संख्या

$= {}^{10}C_4 . {}^6C_3 . {}^3C_3 . \frac{1}{2!} = 2100 = {}^{10}C_4 . {}^5C_2 = 2100$

7. If all the letters of the word 'AGAIN' are arranged in all possible ways & put in dictionary order, then

(A*) The 50th word is NAAIG (B*) The 49th word is NAAGI

(C*) The 51st word is NAGAI (D*) The 47th word is INAGA

यदि 'AGAIN' शब्द के सभी अक्षरों को सभी सम्भव तरीकों से व्यवस्थित कर शब्दकोष के क्रम में रखा जाये, तब

(A*) 50वाँ शब्द NAAIG है (B*) 49वाँ शब्द NAAGI है

(C*) 51वाँ शब्द NAGAI है (D*) 47वाँ शब्द INAGA है

Sol.

A			

= 24 ways तरीके

4!

G				

= 12 ways तरीके

4!/2!

I				

$\frac{4!}{2!}$ = 12 ways तरीके

N	A	A	G	I

and

N	A	A	I	G

here यहां 50^{th} NAAIG

8. You are given 8 balls of different colour (black, white,...). The number of ways in which these balls can be arranged in a row so that the two balls of particular colour (say red & white) may never come together is: **[16JM110225]**

(A*) $8! - 2.7!$ (B*) $6.7!$ (C*) $2.6!.{}^7C_2$ (D) none

विभिन्न रंगो (काली, सफेद, लाल...) की 8 गेंदो को एक पंक्ति में कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है यदि विशेष रंग की दो गेंदे (मानाकि लाल और सफेद) कभी भी एक साथ न आयें ?

(A*) $8! - 2.7!$ (B*) $6.7!$ (C*) $2.6!.{}^7C_2$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Required number of possible is

कुल अभीष्ट संभावनाओं की संख्या

$8! - 2.7! = 7!(8-2) = 6.7! \Rightarrow 2.6!.{}^7C_2$

9. Consider the word 'MULTIPLE' then in how many other ways can the letters of the word 'MULTIPLE' be arranged ;

(A*) without changing the order of the vowels equals 3359

(B*) keeping the position of each vowel fixed equals 59

(C*) without changing the relative order/position of vowels & consonants is 359

(D*) using all the letters equals $4 \cdot 7! - 1$

MULTIPLE शब्द के अक्षरों को कितने अन्य तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता हैं। जबकि

(A) स्वरों का क्रम अपरिवर्तित रहे, तब क्रमचय 3359 के बराबर है।

(B) प्रत्येक स्वर का स्थान निश्चित रहे, तब क्रमचय 59 के बराबर है।

(C) स्वरों और व्यंजनों का सापेक्ष क्रम/स्थान अपरिवर्तित रहे, तब क्रमचय 359 है

(D*) सभी अक्षरों की सहायता से बनने वाले शब्दों की कुल संख्या $4 \cdot 7! - 1$ है।

Sol. (A)Without changing the order of the vowels of MULTIPLE

So we choose the first three place in ${}^8C_3$ ways and the rest are arranged is

$$\frac{8!}{3!\,5!} \times \frac{5!}{2!} = \frac{8!}{3!\,2!} = 3360$$

Hence required no. is 3360 – 1 = 3359

(B) Keeping the position of each vowel fixed M_LT_PL_

Number of ways = $\frac{5!}{2}$ = 60 other ways = 60–1 = 59

(C) without changing the relative order/position of vowels & consonants

so number of ways is $= \frac{5!}{2!} \times 3! = 60 \times 6 = 360$

Hence required number is = 360–1 = 359

(D) Total 8!

Hindi. (i) MULTIPLE में स्वरो का क्रम अपरिवर्तित रहे

अतः पहले तीन स्वरों को ${}^8C_3$ तरीके से व्यवस्थित करेगें तथा बाकी अक्षरों को व्यवस्थित करेगें

अतः कुल तरीके $= \frac{8!}{3!\,5!} \times \frac{5!}{2!} = \frac{8!}{3!\,2!} = 3360$ अतः अन्य तरीको की संख्या = 3360 – 1 = 3359

(ii) प्रत्येक स्वर का स्थान M_LT_PL_ निश्चित रखने पर कुल तरीके = $\frac{5!}{2} = 60$

दूसरे तरीके = 60–1 = 59

(iii) स्वरों व व्यंजनो का सापेक्ष क्रम/स्थान अपरिवर्तित रखने पर तरीकों की संख्या = $\frac{5!}{2!} \times 3! = 60 \times 6 = 360$

अतः अन्य तरीकों की संख्या = 360 – 1 = 359

10. The number of ways of arranging the letters AAAAA, BBB, CCC, D, EE & F in a row if the letter C are separated from one another is: **[16JM110226]**

अक्षरों AAAAA, BBB, CCC, D, EE और F को एक पंक्ति में कितने प्रकार से व्यवस्थित कर सकते है जबकि अक्षर C एक दूसरे से अलग रहे–

(A*) $^{13}C_3 . \frac{12!}{5!\ 3!\ 2!}$ (B) $\frac{13!}{5!\ 3!\ 3!\ 2!}$ (C) $\frac{14!}{3!\ 3!\ 2!}$ (D*) $11 . \frac{13!}{6!}$

Sol. We have arrange all the letter except 'CCC' is

$\frac{12!}{5!.3!.2!}$ now there are 13 place where 'C' can be placed $^{13}C_3$

Hence required number of ways is = $\frac{12!}{5!\ 3!\ 2!}\ {}^{13}C_3 = 11 . \frac{13!}{6!}$

Hindi. 'CCC' को छोडकर सभी अक्षरों को व्यवस्थित करने के तरीके = $\frac{12!}{5!.3!.2!}$

नये 13 स्थान जहाँ 'C' को व्यवस्थित किया जाता है, के तरीके = $^{13}C_3$

अतः अभीष्ट तरीके = $\frac{12!}{5!\ 3!\ 2!}\ {}^{13}C_3 = 11 . \frac{13!}{6!}$

11. The number of non-negative integral solutions of $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le n$ (where n is a positive integer) is

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le n$ (जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक हैं) के अऋणात्मक पूर्णांक हलों की संख्या हैं –

(A) $^{n+3}C_3$ (B*) $^{n+4}C_4$ (C) $^{n+5}C_5$ (D*) $^{n+4}C_n$

Sol. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le n \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = n$ (where y is known as pseudo variable)

Total no. of required solution is $= {}^{n+5-1}C_n = {}^{n+4}C_n$ or ${}^{n+4}C_4$

Hindi. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le n \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = n$ (यहाँ y एक छद्म चर है)

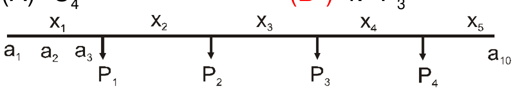
कुल अभीष्ट हलों की संख्या $= {}^{n+5-1}C_n = {}^{n+4}C_n = {}^{n+4}C_4$

12. There are 10 seats in the first row of a theatre of which 4 are to be occupied. The number of ways of arranging 4 persons so that no two persons sit side by side is:

एक सिनेमाघर की प्रथम पंक्ति में 10 सीटों पर चार व्यक्तियों को कितने तरीकों से बैठाया जा सकता है, जबकि कोई भी दो व्यक्ति पास–पास न बैठें ?

(A) $^7C_4$ (B*) $4 . {}^7P_3$ (C*) $^7C_3 . 4!$ (D*) 840

Sol.



$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \Rightarrow \quad x_1 + y_1 + y_2 + y_3 + x_5 = 3$

but परन्तु $x_1, x_5 \ge 0$

$x_2, x_3, x_4 \ge 1 \quad \Rightarrow \quad y_1, y_2, y_3 \ge 0$

अतः अभीष्ट तरीकों की संख्या

$^{3+5-1}C_3 . 4! = {}^7C_3 . 4! = {}^7p_3 . 4 = 840$

13. $^{50}C_{36}$ is divisible by

$^{50}C_{36}$ किससे विभाजित है–

(A*) 19 (B*) 5^2 (C) 19^2 (D) 5^3

Sol. $\frac{50!}{14!\ 36!}$ exp of 19 in 50 ! = $\left[\frac{50}{19}\right] + \left[\frac{50}{19^2}\right] = 2$

Exp. of 19 in 36 ! = $\left[\frac{36}{19}\right] + \left[\frac{36}{19^2}\right] = 1 \Rightarrow {}^{50}C_{36}$ is divisible by 19 but not by 19^2

Exp. of 5 in 50 ! = $\left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{25}\right]$ = 12; Exp. of 5 in 14! = $\left[\frac{14}{5}\right] = 2$

Exp. of 5 in 36 ! = $\left[\frac{36}{5}\right] + \left[\frac{36}{25}\right] = 8$ **Ans.** A & B

Hindi. 50! में 19 का घांताक $\frac{50!}{14!\ 36!} = \left[\frac{50}{19}\right] + \left[\frac{50}{19^2}\right] = 2$

$\Rightarrow$ 36! में 19 का घांताक $= \left[\frac{36}{19}\right] + \left[\frac{36}{19^2}\right] = 1$

$\Rightarrow$ ${}^{50}C_{36}$, 19 से भाज्य हैं परन्तु 19^2 से नहीं; 50! में 5 का घांताक $= \left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{25}\right] = 12$

14! में 5 का घांताक $= \left[\frac{14}{5}\right] = 2$; 36! में 5 का घांताक $= \left[\frac{36}{5}\right] + \left[\frac{36}{25}\right] = 8$ Ans. A & B

14. ${}^{2n}P_n$ is equal to

${}^{2n}P_n$ का मान हैं –

(A*) (n + 1) (n + 2) ..... (2n)

(B*) 2^n [1 . 3 . 5 .....(2n – 1)]

(C*) (2) . (6) . (10) .... (4n – 2)

(D*) n! (${}^{2n}C_n$)

Sol. Value of ${}^{2n}p_n$ is $\frac{2n!}{n!}$

(i) (n + 1) (n + 2) ----- (2n) and n ! . ${}^{2n}C_n$

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.....(2n-2)\ \ (2n-1)\ \ .\ \ 2n}{1.2.3........n} = \frac{(1.3.5.7....(2n-1))\ \ .\ \ (2.4.6.8.......2n)}{1.2.3........n}$$

$$= \frac{(1.3.5.7....(2n-1)).2^n(1.2.3.4.......n)}{(1.2.3.4......n)} = 2^n\,(1.3.5.7.\ .....(2n-1)) = (2.\ 6.\ 10.\ 14\ .....\ (4n-2))$$

Hindi. ${}^{2n}p_n$ का मान $\frac{2n!}{n!}$ है

(i) (n + 1) (n + 2) ----- (2n) और n ! . ${}^{2n}C_n$

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.....(2n-2)\ \ (2n-1)\ \ .\ \ 2n}{1.2.3........n} = \frac{(1.3.5.7....(2n-1))\ \ .\ \ (2.4.6.8.......2n)}{1.2.3........n}$$

$$= \frac{(1.3.5.7....(2n-1)).2^n(1.2.3.4.......n)}{(1.2.3.4......n)} = 2^n\,(1.3.5.7.\ .....(2n-1)) = (2.\ 6.\ 10.\ 14\ .....\ (4n-2))$$

15. The number of ways in which 200 different things can be divided into groups of 100 pairs, is:

200 भिन्न–भिन्न वस्तुओं को 100 युग्मों में कितने तरीकों से विभाजित किया जा सकता हैं–

(A) $\frac{200\,!}{2^{100}}$

(B*) $\left(\frac{101}{2}\right)\left(\frac{102}{2}\right)\left(\frac{103}{2}\right)....\left(\frac{200}{2}\right)$

(C*) $\frac{200\,!}{2^{100}\ (100)\,!}$

(D*) (1. 3. 5...... 199)

Sol. $\frac{{}^{200}C_2.\ {}^{198}C_2\ .\ {}^{196}C_2......{}^{2}C_2}{100\ !} = \frac{200\ !}{2^{100}\ .\ 100\ !}$

$$= \frac{101.102.\ \ 103\ \ .....200}{2^{100}} = \left(\frac{100}{2}\right).\left(\frac{102}{2}\right).\left(\frac{103}{2}\right).....\left(\frac{200}{2}\right)$$

And और $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.....200}{2^{100}\ .\ 100\ !} = \frac{(1.3.5.7.....199)\ \ (2.\ \ 4.\ \ 6.\ \ 8......200)}{2^{100}\ \ .\ \ 100\ \ !}$

$$= \frac{(1.3.5......199)\ \ .\ \ 2^{100}\ \ .\ \ 100\ \ !}{2^{100}\ \ .\ \ 100\ \ !} = 1.3.5\ .199$$

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehension # 1

There are 8 official and 4 non-official members, out of these 12 members a committee of 5 members is to be formed, then answer the following questions.

1. Number of committees consisting of at least two non-official members, are

(A*) 456 (B) 546 (C) 654 (D) 466

Sol. Two non-officials and 3 officials i.e.

$^4C_2 \times {}^8C_3 = 6 \times 56 = 336.$

Three non-official and 2 officials

$^4C_3 \times {}^8C_2 = 4 \times 28 = 112.$

Four non-officials and 1 official

$^4C_4 \times {}^8C_1 = 1 \times 8 = 8$

Total 336 + 112 + 8 = 456.

2. Number of committees in which a particular official member is never included, are

(A) 264 (B) 642 (C) 266 (D*) 462

Sol. Required no. of ways

$= {}^{12-1}C_5 = {}^{11}C_5 = 462$

अनुच्छेद # 1

8 सरकारी और 4 गैर–सरकारी सदस्य है, इन 12 सदस्यों में से 5 सदस्यों की एक समिति बनाई जाती है। तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. कम से कम दो गैर–सरकारी सदस्यों को लेकर बनाई जाने वाली समितियों की संख्या है –

(A) 456 (B) 546 (C) 654 (D) 466

Sol. दो गैर–सरकारी तथा 3 सरकारी सदस्यों वाली समितियाँ= $^4C_2 \times {}^8C_3 = 6 \times 56 = 336.$

तीन गैर–सरकारी तथा 2 सरकारी सदस्यों वाली समितियाँ= $^4C_3 \times {}^8C_2 = 4 \times 28 = 112.$

चार गैर–सरकारी तथा 1 सरकारी सदस्यों वाली समितियाँ = $^4C_4 \times {}^8C_1 = 1 \times 8 = 8$

अतः कुल समितियाँ = 336 + 112 + 8 = 456.

2. एक विशेष सरकारी सदस्य को कभी सम्मिलित नहीं करते हुए बनाई जाने वाली समितियों की संख्या है –

(A) 264 (B) 642 (C) 266 (D) 462

Sol. अभीष्ट तरीके $= {}^{12-1}C_5 = {}^{11}C_5 = 462$

Comprehenssion # 2

Let n be the number of ways in which the letters of the word "RESONANCE" can be arranged so that vowels appear at the even places and m be the number of ways in which "RESONANCE" can be arrange so that letters R, S, O, A, appear in the order same as in the word RESONANCE, then answer the following questions.

3. The value of n is

(A) 360 (B*) 720 (C) 240 (D) 840

Sol. In the word RESONANCE there are 9 letters.

Consonants (5), 1R, 1S, 1C and 2N

Vowels (4), 2E, 1O, 1A
total even places 4 ;

No. of ways arranging vowels in even places is $\frac{4!}{2!} = 12$

No. of ways arranging consonants in remaining odd places is $\frac{5!}{2!} = 60$

required number of arrangement = $12 \times 60 = 720 = n$

4. The value of m is

(A*) 3780 (B) 3870 (C) 3670 (D) 3760

Sol. Required number of arrangements are $\frac{9!}{2!2!4!} = 3780$

अनुच्छेद # 2

माना कि शब्द "RESONANCE" के अक्षरों को व्यवस्थित करने के उन तरीकों की संख्या है जिनमें स्वर सम स्थानों पर आते है, n हैं और शब्द "RESONANCE" के अक्षरों को व्यवस्थित करने के उन तरीकों की संख्या है जिनमें अक्षर R, S, O, A, इसी क्रम में आते हैं, m है तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

3. n का मान है –

(A) 360 (B) 720 (C) 240 (D) 840

Sol. शब्द RESONANCE में कुल 9 अक्षर है।

व्यंजन (5), 1R, 1S, 1C और 2N

स्वर (4), 2E, 1O, 1A

कुल सम स्थानों की संख्या = 4

स्वरों को सम स्थानों पर व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या $= \frac{4!}{2!} = 12$

शेष विषम स्थानों पर व्यंजनों को व्यवस्थित करने के तरीको की संख्या $= \frac{5!}{2!} = 60$

अतः अभीष्ट तरीको की संख्या $= n = 12 \times 60 = 720$

4. m का मान है –

(A*) 3780 (B) 3870 (C) 3670 (D) 3760

Sol. अभीष्ट तरीको की संख्या $= m = \frac{9!}{2!2!4!} = 3780$

Comprehension # 3

A mega pizza is to be sliced n times, and S_n denotes maximum possible number of pieces.

5. Relation between S_n & S_{n-1} **[16JM110227]**

(A) $S_n = S_{n-1} + n + 3$ (B) $S_n = S_{n-1} + n + 2$ (C) $S_n = S_{n-1} + n + 2$ (D*) $S_n = S_{n-1} + n$

6. If the mega pizza is to be distributed among 60 person, each one of them get atleast one piece then minimum number of ways of slicing the mega pizza is : **[16JM110228]**

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D*) 11

Sol. Let n lines divides the pizza into S_n pieces. Let us add new $(n + 1)^{th}$ line, L which cuts the previous n lines by assumption. Now line L will cut the original pieces into 2 pieces further & we are passing trough (n + 1) such pieces, hence

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

when $S_n \geq 60$ where $n \in N$

$n(n + 1) + 2 \geq 60$

$n^2 + n - 11 \geq 0$

n = 10, is not satisfy

n = 11 is satisfying

$\Rightarrow$ n = 11

अनुच्छेद # 3 (Q. no. 5 to 6)

एक बड़े पीजा के n टुकड़े किए जाते है और टुकड़ों की अधिकतम संभावित संख्या S_n है।

5. S_n और S_{n-1} में सम्बन्ध है–

(A) $S_n = S_{n-1} + n + 3$ (B) $S_n = S_{n-1} + n + 2$ (C) $S_n = S_{n-1} + n + 2$ (D*) $S_n = S_{n-1} + n$

6. यदि एक बड़े पीजा को 60 व्यक्तियों में बाटा जाता है तब उनमें से प्रत्येक कम से कम एक टुकड़ा प्राप्त करता है तब बड़े पीजा के किए गए टुकड़ो के न्यूनतम क्रमचयों की संख्या है–

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D*) 11

Sol. माना पीजा को, n रेखाओं में विभाजित करके S_n टुकड़े बनाए जाते है। माना कि अब नयी $(n + 1)^{th}$ रेखाएं से, मानाकि रेखा L पूर्व की x रेखाओं को काटती है। अब रेखा L, मूल टुकड़े को दो टुकड़ों में काटेगी पुनः (n + 1) टुकड़ों से जाने पर अतः

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

जब $S_n \geq 60$ जहाँ $n \in N$

$n(n + 1) + 2 \geq 60$

$n^2 + n - 11 \geq 0$

n = 10, सन्तुष्ट नहीं होता है

n = 11 सन्तुष्ट होता है।

$\Rightarrow$ n = 11

Exercise-3

✍ Marked questions are recommended for Revision.
✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

* Marked Questions may have more than one correct option.
* चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षों) के प्रश्न

1. Let S = {1, 2, 3, 4}. The total number of unordered pairs of disjoint subsets of S is equal to
मानाकि S = {1, 2, 3, 4} , तो S के असंयुक्त उपसमुच्चयों के अक्रमित युग्मों की कुल संख्या निम्न है
(A) 25 (B) 34 (C) 42 (D*) 41
[IIT-JEE-2010, Paper-2, (5, –2), 79]

Sol. S = {1, 2, 3, 4}
Each element can be put in 3 ways either in subsets or we don't put in any subset.
So total number of unordered pairs = $\dfrac{3\times3\times3\times3-1}{2}+1=41$. [Both subsets can be empty also]

Hindi S = {1, 2, 3, 4}
किसी उपसमुच्चय में प्रत्येक अवयव को 3 तरीके से रखा जा सकता है या किसी उपसमुच्चय में नहीं रखा जा सकता है।
इसलिए अक्रमित युग्मों की कुल संख्या = $\dfrac{3\times3\times3\times3-1}{2}+1=41$. [दोनों उपसमुच्चय खाली भी हो सकते है]

2. The total number of ways in which 5 balls of different colours can be distributed among 3 persons so that each person gets at least one ball is **[IIT-JEE 2012, Paper-1, (3, –1), 70][P & C]**
विभिन्न रंगों की पांच गेंदों को तीन लोगों में इस प्रकार बाँटने के कुल तरीकों की संख्या जिसमें प्रत्येक व्यक्ति को कम से कम एक गेंद अवश्य मिले, निम्न है
(A) 75 (B*) 150 (C) 210 (D) 243

Sol. **Ans (B)**

	B_1	B_2	B_3
Case-1:	1	1	3
Case-2:	2	2	1

Ways of distribution $=\dfrac{5!}{1!1!3!2!}\cdot 3!+\dfrac{5!}{2!2!1!2!}.3!=150$

Hindi **Ans (B)**

	B_1	B_2	B_3
Case-1:	1	1	3
Case-2:	2	2	1

बाँटने के तरीके $=\dfrac{5!}{1!1!3!2!}\cdot 3!+\dfrac{5!}{2!2!1!2!}.3!=150$

Paragraph for Question Nos. 3 to 4
प्रश्न 3 से 4 के लिए अनुच्छेद

Let a_n denote the number of all n-digit positive integers formed by the digits 0,1 or both such that no consecutive digits in them are 0. Let b_n = the number of such n-digit integers ending with digit 1 and c_n = the number of such n-digit integers ending with digit 0.
मानाकि a_n उन सभी n- अंकों वाले धनात्मक पूर्णांकों (n-digit positive integers) की संख्या है जो 0, 1 अथवा दोनों अंकों से बनते है और जिनमें अंक 0 क्रमिक (consecutive) नहीं है। मान लें कि b_n = उपरोक्त उन सभी n- अंकों वाले धनात्मक पूर्णांकों की संख्या जिनके अंत में अंक 1 है, और c_n= उपरोक्त उन सभी n- अंकों वाले धनात्मक पूर्णांकों की संख्या जिनके अंत में अंक 0 है।

3. Which of the following is correct ? **[IIT-JEE 2012, Paper-2, (3, –1), 66]**

निम्न में से कौन सा कथन सही है ?

(A*) $a_{17} = a_{16} + a_{15}$ (B) $c_{17} \neq c_{16} + c_{15}$ (C) $b_{17} \neq b_{16} + c_{16}$ (D) $a_{17} = c_{17} + b_{16}$

Sol. **Ans. (A)**

1----------------- 1 # a_{n-1}

----------------- 1 0 # a_{n-2}

So $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

So A choice is correct

consider B choice $c_{17} \neq c_{16} + c_{15}$

$c_{15} \neq c_{14} + c_{13}$ is not true

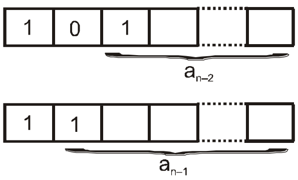
consider C choice $b_{17} \neq b_{16} + c_{16}$

$a_{16} \neq a_{15} + a_{14}$ is not true

consider D choice $a_{17} = c_{17} + b_{16}$

$a_{17} = a_{15} + a_{15}$ which is not true

Aliter



using the Recursion formula

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Similarly $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ and $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ $\forall$ $n \geq 3$

and $a_n = b_n + c_n$ $\forall\ n \geq 1$

so $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$..........

$b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 3$, $b_5 = 5$, $b_6 = 8$ ....

$c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 2$, $c_5 = 3$, $c_6 = 5$ ....

using this $b_{n-1} = c_n$ $\forall\ n \geq 2$

Hindi. 1----------------- 1 # a_{n-1}

----------------- 1 0 # a_{n-2}

इसलिए विकल्प A सही है।

विकल्प B पर विचार कीजिए $c_{17} \neq c_{16} + c_{15}$

$c_{15} \neq c_{14} + c_{13}$ असत्य है

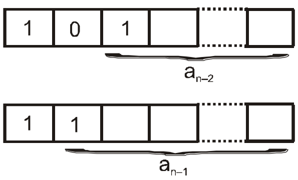
विकल्प C पर विचार कीजिए $b_{17} \neq b_{16} + c_{16}$

$a_{16} \neq a_{15} + a_{14}$ असत्य है

विकल्प D पर विचार कीजिए $a_{17} = c_{17} + b_{16}$

$a_{17} = a_{15} + a_{15}$ जो कि असत्य है

वैकल्पिक



Recursion सूत्र का उपयोग करने पर

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

इसी तरह $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ and $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ $\forall$ $n \geq 3$

तथा $a_n = b_n + c_n$ $\forall$ $n \geq 1$

अतः $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$..........

$b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 3$, $b_5 = 5$, $b_6 = 8$ ....

$c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 2$, $c_5 = 3$, $c_6 = 5$ ....

उपयोग करने पर $b_{n-1} = c_n \quad \forall \; n \geq 2$

4. The value of b_6 is

b_6 का मान क्या है ?

(A) 7 (B*) 8 (C) 9 (D) 11

Sol. **Ans. (B)**

$b_6 = a_5$

$a_5 = \underline{1} - - - \underline{1} \qquad \underline{1} - - - \underline{0}$

${}^3C_0 + {}^3C_1 + 1 + {}^2C_1 + 1$

$1 + 3 + 1 + 2 + 1$

$4 + 4 = 8$

Hindi $b_6 = a_5$

$a_5 = \underline{1} - - - \underline{1} \qquad \underline{1} - - - \underline{0}$

${}^3C_0 + {}^3C_1 + 1 + {}^2C_1 + 1$

$1 + 3 + 1 + 2 + 1$

$4 + 4 = 8$

5. Let $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$ be positive integers such that $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 20$. Then the number of such distinct arrangements $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ is

यदि $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$ इस प्रकार के धनात्मक पूर्णांक है जिनके लिए $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 20$ है। तब ऐसे विभिन्न विन्यासों (distinct arrangements) $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ की कुल संख्या है।

[JEE (Advanced) 2014, Paper-1, (3, 0)/60]

Ans. (7)

Sol. $n_2 = n_1 + t_1 + 1$

$n_3 = n_2 + t_2 + 1$

$n_4 = n_3 + t_3 + 1$

$n_5 = n_4 + t_4 + 1$

The given equation becomes

$5n_1 + 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 = 10$ where $n_1 \geq 1$; $t_1 \geq 0$

$n_1 = t_0 + 1 \Rightarrow 5t_0 + 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 = 5$

$t_0 = 1$ will yield only 1 solution.

so $t_0 = 0$,

$4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 = 5$.

$t_1 = 0 = t_2$. there will be 3 solution

$t_1 = 0$, $t_2 = 1$ will yield 2 solution.

$t_1 = 1$, t_2 must be zero 1 solution.

Hence in total there will be 7 solution.

Alternative :

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	2	3	4	10
1	2	3	5	9
1	2	3	6	8
1	2	4	5	7
1	2	4	6	8
1	3	4	6	7
2	3	4	5	6

Hindi. $n_2 = n_1 + t_1 + 1$

$n_3 = n_2 + t_2 + 1$

$n_4 = n_3 + t_3 + 1$

$n_5 = n_4 + t_4 + 1$

दी गई समीकरण से

$5n_1 + 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 = 10$ जहाँ $n_1 \geq 1$; $t_1 \geq 0$

$n_1 = t_0 + 1 \Rightarrow 5t_0 + 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 = 5$

$t_0 = 1$ केवल 1 हल होगा।

इसलिए $t_0 = 0$,

$4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 = 5$.

$t_1 = 0 = t_2$. के लिए 3 हल

$t_1 = 0, t_2 = 1$ के लिए 2 हल

$t_1 = 1$, t_2 अवश्य शून्य होगा के लिए 1 हल

अतः कुल 7 हल

Alternative : वैकल्पिक हल :

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	2	3	4	10
1	2	3	5	9
1	2	3	6	8
1	2	4	5	7
1	2	4	6	8
1	3	4	6	7
2	3	4	5	6

6. Let $n \geq 2$ be an integer. Take n distinct points on a circle and join each pair of points by a line segment. Colour the line segment joining every pair of adjacent points by blue and the rest by red. If the number of red and blue line segments are equal, then the value of n is

माना कि $n \geq 2$ एक पूर्णांक है। एक वृत्त पर n विभिन्न बिन्दु लेकर उन बिन्दुओं के प्रत्येक युग्म को रेखाखण्ड से जोडे। इन रेखाखण्डों में से आसन्न बिन्दुओं (adjacent points) को जोड़ने वाले प्रत्येक रेखाखण्ड को नीला तथा अन्य रेखाखण्डों को लाल रंग दें। यदि लाल व नीले रेखाखण्डों की संख्या समान है तो n का मान है :

[JEE (Advanced) 2014, Paper-1, (3, 0)/60]

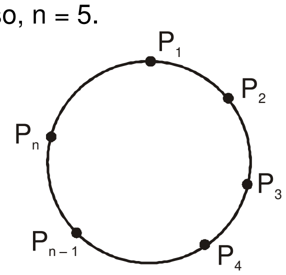
Ans. (5)

Sol. Number of adjacent lines = n

Number of line segment joining non-adjacent points is ${}^nC_2 - n$.

Now, $n = ({}^nC_2 - n) \Rightarrow 2n = \dfrac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n = 0, 5$

But $n \geq 2$. so, n = 5.

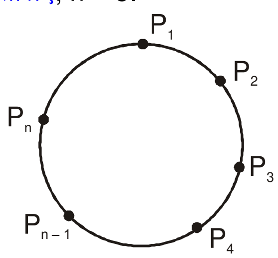


Hindi. आसन्न रेखाओं की संख्या = n

जो आसन्न बिन्दु नहीं है उनको मिलाने वाली रेखाखण्डो की संख्या ${}^nC_2 - n$.

अब, $n = ({}^nC_2 - n) \Rightarrow 2n = \dfrac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n = 0, 5$

परन्तु $n \geq 2$. इसलिए, n = 5.



7. Six cards and six envelopes are numbered 1, 2, 3, 4, 5, 6 and cards are to be placed in envelopes so that each envelope contains exactly one card and no card is placed in the envelope bearing the same number and moreover the card numbered 1 is always placed in envelope numbered 2. Then the number of ways it can be done is **[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) 264 (B) 265 (C) 53 (D) 67

छः कार्ड और छः लिफाफे 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकों से सूचीबद्ध है। कार्डो को लिफाफों में इस तरह डालना है कि हर लिफाफे में केवल एक ही कार्ड हो, कार्ड व लिफाफे पर अंकित संख्या समान न हो तथा कार्ड संख्या 1 हमेशा लिफाफा संख्या 2 में ही हो, तो इसको करने के कुल तरीकों की संख्या है– **[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) 264 (B) 265 (C*) 53 (D) 67

Ans. **(C)**

Sol.

Cards	Envelopes
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

If '2' goes in '1' then it is dearrangement of 4 things which can be done in $4!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right) = 9$ ways.

If '2' doen't go in 1, it is dearrangement of 5 things which can be done in 44 ways. Hence total 53 ways.

Hindi

Cards	Envelopes
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

यदि '2', '1' में जाता है तब यह 4 वस्तुओं की पुर्नव्यवस्था है जो $4!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right) = 9$ तरीकों से की जाती है।

यदि '2' , 1, में नही जाता है तब 5 वस्तुओं की पुर्नव्यस्था 44 तरीकों से की जाती है अतः कुल 53 तरीके

8. Let n be the number of ways in which 5 boys and 5 girls can stand in a queue in such a way that all the girls stand consecutively in the queue. Let m be the number of ways in which 5 boys and 5 girls can stand in a queue in such a way that exactly four girls stand consecutively in the queue. Then the value of $\frac{m}{n}$ is

माना कि n तरीकों से 5 लड़के और 5 लड़कियाँ एक पंक्ति में इस प्रकार खड़े हो सकते हैं कि सभी लड़कियाँ पंक्ति में क्रमागत (consecutively) खड़ी हों। माना कि m तरीकों से 5 लड़के और 5 लड़कियाँ एक पंक्ति में इस प्रकार खड़े हो सकते है कि ठीक (exactly) 4 लड़कियाँ ही पंक्ति में क्रमागत लड़की हों। तब $\frac{m}{n}$ का मान है।

[JEE (Advanced) 2015, P-1 (4, 0) /88]

Ans. **5**

Sol.

$n = 5! \times 6!$

$m = 5! \times {}^6C_2 \times {}^5C_4 .2! .4!$

$\frac{m}{n} = \frac{5! \times 15 \times 2 \times 5!}{6!} = 5.$

9. A debate club consists of 6 girls and 4 boys. A team of 4 members is to be selected from this club including the selection of a captain (from among these 4 members) for the team. If the team has to include at most one boy. Then the number of ways of selecting the team is

[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (3, –1)/62]

एक वाद–विवाद समूह (club) में 6 लड़कियाँ और 4 लड़के हैं। इस समूह में से एक चार सदस्यीय दल चुनना है जिसमें दल के एक कप्तान (captain) (उन्हीं चार सदस्यों से) का चुनाव भी सम्मिलित है। यदि दल में अधिकतम एक लड़का सम्मिलित हो तब दल को चुनें जाने के तरीकों की संख्या है

(A*) 380 (B) 320 (C) 260 (D) 95

Ans. **(A)**

Sol. 1 Boy + 0 Boy

$\left({}^4C_1.{}^6C_3 + {}^6C_4\right) \times 4 = (4 \times 20 + 15) \times 4 = 95 \times 4 = 380$

Hindi. 1 लड़का + 0 लड़का

$\left({}^4C_1.{}^6C_3 + {}^6C_4\right) \times 4 = (4 \times 20 + 15) \times 4 = 95 \times 4 = 380$

10. Words of length 10 are formed using the letters A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Let x be the number of such words where no letter is repeated; and let y be the number of such words where exactly one letter is repeated twice and no other letter is repeated. Then, $\frac{y}{9x}$ = **[JEE(Advanced) 2017, Paper-1,(3, 0)/61]**

अक्षरों A, B, C, D, E, F, G, H, I, J से 10 लम्बाई के शब्द बनाये जाते हैं। माना कि x इस तरह के उन शब्दों की संख्या है जिनमें किसी भी अक्षर की पुनरावृति नही होती है, तथा y इस तरह के उन शब्दों की संख्या है जिन में केवल एक अक्षर की पुनरावृति दो बार होती है व किसी अन्य अक्षर की पुनरावृति नही होती है। तब $\frac{y}{9x}$ =

Ans. **(5)**

Sol. A, B, C, D, E, F, G, H, I, J

$x = 10!$

$y = {}^{10}C_1 . {}^{10}C_2 . 8! \, {}^9C_8$

$$\frac{y}{9x} = \frac{{}^{10}C_1 . {}^{10}C_2 . 8! \times 9}{9 \times 10!} = \frac{10! \times 45}{9 \times 10!} = 5$$

11. Let S = {1, 2, 3, ..., 9}. For k = 1, 2,......,5, let N_k be the number of subsets of S, each containing five elements out of which exactly k are odd. Then $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ =

[JEE(Advanced) 2017, Paper-2,(3, –1)/61]

माना कि S = {1, 2, 3, ..., 9} है। k = 1, 2,......,5 के लिये, माना कि N_k, समुच्चय S के उन उपसमुच्चयों की सँख्या है जिनमें प्रत्येक उपसमुच्चय में 5 अवयव है एवम् इन अवयवों में विषम अवयवों की सँख्या k है। तब

$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ =

(A) 210 (B) 252 (C) 126 (D) 125

Ans. **(C)**

Sol. $N_1 = {}^5C_1.{}^4C_4 = 5$

$N_2 = {}^5C_2.{}^4C_3 = 40$

$N_3 = {}^5C_3.{}^4C_2 = 60$

$N_4 = {}^5C_4.{}^4C_1 = 20$

$N_5 = {}^5C_5.{}^4C_0 = 1$

$\therefore$ Total कुल = 126

12. The number of 5 digit numbers which are divisible by 4, with digits from the set {1, 2, 3, 4, 5} and the repetition of digits is allowed, is _______. **[JEE(Advanced) 2018, Paper-1,(3, 0)/60]**

उन 5 अंकीय (digits) संख्याओं (numbers), जो 4 से विभाज्य (divisible) है , जिनके अंक समुच्चय (set) {1, 2, 3, 4, 5} में से है, और अंकों की पुनरावृत्ति (repetition) की अनुमति है, की संख्या है _______.

Ans. **(625)**

Sol. Last two digits are अन्तिम दो अंक 12, 32, 24, 52, 44

Number of numbers संख्याओं की संख्या $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

13. In a high school, a committee has to be formed from a group of 6 boys M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 and 5 girls G_1, G_2, G_3, G_4, G_5. **[JEE(Advanced) 2018, Paper-2,(3, –1)/60]**

(i) Let α_1 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 5 members, having exactly 3 boys and 2 girls.

(ii) Let α_2 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has at least 2 members, and having an equal number of boys and girls.

(iii) Let α_3 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 5 members, at least 2 of them being girls.

(iv) Let α_4 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 4 members, having at least 2 girls and such that both M_1 and G_1 are **NOT** in the committee together.

LIST-I	**LIST-II**
(P) The value of α_1 is	(1) 136
(Q) The value of α_2 is	(2) 189

(R) The value of α_3 is | (3) 192

(S) The value of α_4 is | (4) 200

(5) 381

(6) 461

The correct option is

(A) $P \to 4; Q \to 6; R \to 2; S \to 1$

(B) $P \to 1; Q \to 4; R \to 2; S \to 3$

(C) $P \to 4; Q \to 6; R \to 5; S \to 2$

(D) $P \to 4; Q \to 2; R \to 3; S \to 1$

एक हाई स्कूल (high school) में, 6 बालको boys $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ और 5 बालिकाओं G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 के समूह (group) में से एक समिति (committee) बनाई जानी है।

(i) माना कि α_1 समिति को इस प्रकार से बनाने के तरीकों (ways) की कुल संख्या है कि समिति में 5 सदस्य है, जिनमें से ठीक (exactly) 3 बालक और 2 बालिकाएं है।

(ii) माना कि α_2 समिति को इस प्रकार से बनाने के तरीको की कुल संख्या है कि समिति में कम से कम (at least) 2 सदस्य है, और बालकों और बालिकाओं की संख्या बराबर (equal) है।

(iii) माना कि α_3 समिति को इस प्रकार से बनानें के तरीकों की कुल संख्या है कि समिति में 5 सदस्य है, जिनमें से कम से कम 2 बालिकाएं है।

(iv) माना कि α_4 समिति को इस प्रकार से बनानें के तरीकों की कुल संख्या है कि समिति में 4 सदस्य है, जिनमें से कम से कम 2 बालिकाएं है और M_1 व G_1 समिति में एक साथ नहीं है।

सूची -I	**सूची -II**
(P) α_1 का मान है	(1) 136
(Q) α_2 का मान है	(2) 189
(R) α_3 का मान है	(3) 192
(S) α_4 का मान है	(4) 200
	(5) 381
	(6) 461

दिए हुए विकल्पों में से सही विकल्प है।

(A) $P \to 4; Q \to 6; R \to 2; S \to 1$

(B) $P \to 1; Q \to 4; R \to 2; S \to 3$

(C) $P \to 4; Q \to 6; R \to 5; S \to 2$

(D) $P \to 4; Q \to 2; R \to 3; S \to 1$

Ans. **(C)**

Sol. 6 Boys & 5 girls

6 लडके और 5 लडकियाँ

$\alpha_1 \to$ number of ways of selecting exactly 3 boys & 2 girls ${}^6C_3 \times {}^5C_2 = 200$

$\alpha_1 \to$ ठीक (exactly) 3 लडके और 2 लडकियो को चुनने के तरीके है। ${}^6C_3 \times {}^5C_2 = 200$

$\alpha_2 \to$ Boys & girls are equal & members ≥ 2

$\alpha_2 \to$ लडके तथा लडकियां बराबर संख्या ≥ 2

${}^6C_1 . {}^5C_1 + {}^6C_2 . {}^5C_2 + {}^6C_3 . {}^5C_3 + {}^6C_4 . {}^5C_4 + {}^6C_5 . {}^5C_5 = {}^{11}C_5 - 1 = 461$

$\alpha_3 \to$ number of ways of selecting 5 having at least 2 girls ${}^{11}C_5 - {}^6C_5 - {}^6C_4 . {}^5C_1 = {}^{11}C_5 - 81 = 381$

$\alpha_3 \to$ 5 सदस्यों को चुनने के तरीके जिनमें कम से कम दो लडकियां है ${}^{11}C_5 - {}^6C_5 - {}^6C_4 . {}^5C_1 = {}^{11}C_5 - 81 = 381$

$\alpha_4 \to G_1$ is included $\to {}^4C_1 . {}^5C_2 + {}^4C_2 . {}^5C_1 + {}^4C_3 = 40 + 30 + 4 = 74$

$\alpha_4 \to G_1$ शामिल हो $\to {}^4C_1 . {}^5C_2 + {}^4C_2 . {}^5C_1 + {}^4C_3 = 40 + 30 + 4 = 74$

M_1 is included $\to {}^4C_2 . {}^5C_1 + {}^4C_3 = 34$

M_1 शामिल हो $\to {}^4C_2 . {}^5C_1 + {}^4C_3 = 34$

G_1 & M_1 both are excluded $\to {}^4C_4 + {}^4C_3 . {}^5C_1 + {}^4C_2 . {}^5C_2 = 81$

G_1 और M_1 दोनों शामिल नहीं हो $\to {}^4C_4 + {}^4C_3 . {}^5C_1 + {}^4C_2 . {}^5C_2 = 81$

Total कुल $= 74 + 34 + 81 = 189$

14. Five persons A,B,C,D and E are seated in a circular arrangement. If each of them is given a hat of one of the three colours red, blue and green, then the numbers of ways of distributing the hats such that the person seated in adjacent seats get different coloured hats is **{[PC-AD]-T-305}**

पाँच व्यक्तियों A,B,C,D तथा E को वृत्तीय क्रम मे बैठाया जाता है। यदि प्रत्येक व्यक्ति को तीन रंगो (लाल, नीला तथा हरा) में से एक रंग की टोपी दी जाती है, तो टोपियों को कितने तरीकों से बाँटा जा सकता है जबकि पास–पास बैठे व्यक्तियों के पास भिन्न–भिन्न रंग की टोपियाँ हो– **[JEE(Advanced) 2019, Paper-2 ,(4, –1)/62]**
[Permutation & Combination_T]

Ans. **(30.00)**

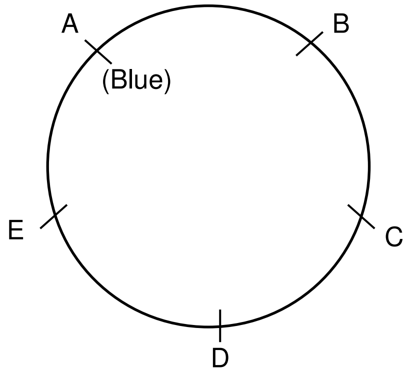
Sol. Maximum number of hats used of same colour are 2. They can not be 3 otherwise atleast 2 hats of same colour are consecutive.

Now, Let hats used are R, R, G, G, B

(Which can be selected in 3 ways. It can be RGGBB or RRGBB also)

Now, numbers of ways of distributing blue hat (single one) in 5 person equal to 5

Let blue hat goes to person A.



Now either position B & D are filled by green hats and C & E are filled by Reds hats

Or B & D are filled by Red hats and C & E are filled by Green hats

$\Rightarrow$ 2 ways are possible

Hence total number of ways = $3 \times 5 \times 2 = 30$ ways

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. **Statement-1 :** The number of ways of distributing 10 identical balls in 4 distinct boxes such that no box is empty is ${}^9C_3$. **[AIEEE 2011, I, (4, –1), 120]**

Statement-2 : The number of ways of choosing any 3 places from 9 different places is ${}^9C_3$.

(1*) Statement-1 is true, Statement-2 is true; Statement-2 is a correct explanation for Statement-1.
(2) Statement-1 is true, Statement-2 is true; Statement-2 is **not** a correct explanation for Statement-1.
(3) Statement-1 is true, Statement-2 is false.
(4) Statement-1 is false, Statement-2 is true.

कथन-1 : 10 एक जैसी गेंदों का 4 विभिन्न बक्सों में बांटने के तरीकों की संख्या ताकि कोई बक्सा खाली न हो, ${}^9C_3$ है।

कथन-2 : 9 विभिन्न स्थानों में से 3 स्थान चुने जाने के तरीकों की संख्या ${}^9C_3$ है। **[AIEEE 2011, I, (4, –1), 120]**

(1) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है। कथन-2, कथन-1 की सही व्याख्या है।
(2) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है। कथन-2, कथन-1 की सही व्याख्या **नही** है।
(3) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
(4) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

Sol. **(1)**
Statement - 1 :
$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 10$ = coefficient of x^{10} in $(x^1 + x^2 + ...+ x^7)^4$
= coefficient of x^6 in $(1 - x^7)^4 (1 - x)^{-4}$ = ${}^{4+6-1}C_6 = {}^9C_3$

Statement - 2 : Obviously $^9C_3$

Hindi **कथन - 1 :**

$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 10 = (x^1 + x^2 + ...+ x^7)^4$ में x^{10} का गुणांक

$= (1 - x^7)^4 (1 - x)^{-4}$ में x^6 का गुणांक $= {}^{4+6-1}C_6 = {}^9C_3$

कथन - 2 : स्पष्टतया: $^9C_3$

2. There are 10 points in a plane, out of these 6 are collinear. If N is the number of triangles formed by joining these points. then : **[AIEEE 2011, II, (4, –1), 120]**

एक समतल में 10 बिन्दु हैं, जिनमें से 6 संरेख हैं। यदि इन बिन्दुओं से बनने वाली त्रिभुजों की संख्या N है, तो : **[AIEEE 2011, II, (4, –1), 120]**

(1*) $N \le 100$ (2) $100 < N \le 140$ (3) $140 < N \le 190$ (4) $N > 190$

Sol. **(1)**

$$^{10}C_3 - {}^6C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} - \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 120 - 20 = 100$$

3. Assuming the balls to be identical except for difference in colours, the number of ways in which one or more balls can be selected from 10 white, 9 green and 7 black balls is : **[AIEEE-2012, (4, –1)/120]**

यह मानते हुए कि सभी गेंदे समरूप हैं तथा उनके रंग भिन्न–भिन्न हैं, तो 10 सफेद, 9 हरी तथा 7 काली गेंदों में से एक या एक से अधिक गेंद निकालने के तरीकों की संख्या है : **[AIEEE-2012, (4, –1)/120]**

(1) 880 (2) 629 (3) 630 (4*) 879

Sol. **Ans (4)**

$(10 + 1)(9 + 1)(7 + 1) - 1 = 11.10.8 - 1 = 879$

4. Let T_n be the number of all possible triangles formed by joining vertices of an n-sided regular polygon. If $T_{n+1} - T_n = 10$, then the value of n is : **[AIEEE - 2013, (4, –1),360]**

माना एक n-भुजाओं वाली समबहुभुज के शीर्षों को मिलाकर बनने वाले सभी संभव त्रिभुजों की संख्या T_n है। यदि $T_{n+1} - T_n = 10$ है, तो n का मान है : **[AIEEE - 2013, (4, –1),360]**

(1) 7 (2*) 5 (3) 10 (4) 8

Sol. **(2)**

$T_n = {}^nC_3$

$T_{n+1} = {}^{n+1}C_3$

$T_{n+1} - T_n = {}^{n+1}C_3 - {}^nC_3 \Rightarrow {}^nC_2 = 10 \Rightarrow n = 5.$

5. The number of integers greater than 6,000 that can be formed, using the digits 3, 5, 6, 7 and 8, without repetition, is : **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 216 (2) 192 (3) 120 (4) 72

अंको 3, 5, 6, 7 तथा 8 के प्रयोग से बिना दोहराये, बनने वाले 6,000 से बड़े पूर्णांको की संख्या है। : **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 216 (2) 192 (3) 120 (4) 72

Ans. **(2)**

Sol.

Number of integer greater than 6000 may be 4 digit or 5 digit

C-1 when number is of 4 digit

C-2 when number is of 5 digit = 5! = 120

total = 120 + 72 = 192 digit

(6, 7, 8)

3 4 3 2 = 72

Hindi.

6000 से बड़े पूर्णांको की संख्या 4 अंक या 5 अंक होगी

C-1 जब संख्या में 4 अंक हो

C-2 जब संख्या में 5 अंक हो = 5! = 120

कुल = 120 + 72 = 192 अंक

(6, 7, 8)

$\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$

3 4 3 2 = 72

6. If all the words (with or without meaning) having five letters, formed using the letters of the word SMALL and arranged as in a dictionary; then the position of the word SMALL is : **[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]**

शब्द SMALL के अक्षरों का प्रयोग करके, पाँच अक्षरों वाले सभी शब्दों (अर्थपूर्ण अथवा अर्थहीन) को शब्दकोष के क्रमानुसार रखने पर, शब्द SMALL का स्थान है :

(1) 59 वां (2) 52 वां (3) 58 वां (4) 46 वां

Ans. **(3)**

Sol. SMALL

A _ _ _ _ # $\frac{4!}{2!}=12$

L _ _ _ _ # $4! = 24$

M _ _ _ _ # $\frac{4!}{2!}=12$

SA _ _ _ # $\frac{3!}{2!}=3$

SL _ _ _ # $3! = 6$

<u>S</u> <u>M</u> <u>A</u> <u>L</u> <u>L</u> # 1

58^{th} position (क्रम)

7. A man X has 7 friends, 4 of them are ladies and 3 are men. His wife Y also has 7 friends, 3 of them are ladies and 4 are men. Assume X and Y have no common friends. Then the total number of ways in which X and Y together can throw a party inviting 3 ladies and 3 men, so that 3 friends of each of X and Y are in this party, is **[JEE(Main) 2017, (4, – 1), 120]**

एक व्यक्ति X के 7 मित्र है, जिनमें 4 महिलाएं है तथा 3 पुरूषों है, उसकी पत्नी Y के भी 7 मित्र है, जिनमें 3 महिलाएं तथा 4 पुरूष है। यह माना गया है कि X तथा Y का कोई उभयनिठ (common) मित्र नहीं है। तो उन तरीकों की संख्या जिनमें X तथा Y एक साथ 3 महिलाओं तथा 3 पुरूषों को पार्टी पर बुलाएं कि X तथा Y प्रत्येक के तीन–तीन मित्र आयें, है–

(1) 485 (2) 468 (3) 469 (4) 484

Ans. **(1)**

Sol.

X < 4L, 3M   Y < 3L, 4M

X	Y		X	Y		X	Y		X	Y
0L	3L	+	1L	2L	+	2L	1L	+	3L	0L
3M	0M		2M	1M		1M	2M		0M	3M

$${}^3C_3 \times {}^3C_3 + {}^4C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_1 + {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_2 + {}^4C_3 \times {}^4C_3 = 1 + 144 + 324 + 16 = 485$$

8. From 6 different novels and 3 different dictionaries, 4 novels and 1 dictionary are to be selected and arranged in a row on a shelf so that the dictionary is always in the middle. The number of such arrangements is : **[JEE(Main) 2018, (4, – 1), 120]**

(1) at least 500 but less than 750 (2) at least 750 but less than 1000

(3*) at least 1000 (4) less than 500

6 भिन्न उपन्यासों तथा 3 भिन्न शब्दकोंशों में से 4 उपन्यासों तथा 1 शब्दकोश को चुनकर एक पंक्ति में एक शैल्फ पर इस प्रकार सजाया जाना है कि शब्दकोश सदा मध्य में हो। इस प्रकार के विन्यासों की संख्या है :

(1) कम से कम 500 लेकिन 750 से कम (2) कम से कम 750 लेकिन 1000 से कम

(3*) कम से कम 1000 (4) 500 से कम

Sol. **(3)**

Number of ways क्रमचय: $x = {}^6C_4 \times {}^3C_1 \times 4! = 15 \times 3 \times 24 = 1080$

9. Let S be the set of all triangles in the xy-plane, each having one vertex at the origin and the other two vertices lie on coordinate axes with integral coordinates. If each triangle in S has area 50 sq. units, then the number of elements in the set S is : **[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-2 (4, – 1), 120]**

माना S, xy-तल में स्थित ऐसी सभी त्रिभुजों का समुच्चय है जिनका एक शीर्ष मूल बिन्दु पर है तथा दूसरे दो शीर्ष निर्देशांक अक्षों पर हैं तथा जिनके निर्देशांक पूर्णांकीय हैं। यदि S की प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल 50 वर्ग इकाई है, तो समुच्चय S के अवयवों की संख्या है–

(1) 32 (2) 36 (3) 18 (4) 9

P & C XI M,

Ans. **(2)**

Sol. $\frac{1}{2}xy = \pm 50 \Rightarrow xy = \pm 100 \Rightarrow$ possible (x, y) can be

$(\pm 1,\pm 100),(\pm 2,\pm 50),(\pm 4,\pm 25),(\pm 5,\pm 20),(\pm 10,\pm 10),(\pm 20,\pm 5),(\pm 25,\pm 4),(\pm 50,\pm 2),(\pm 100,\pm 1)$

Hindi. $\frac{1}{2}xy = \pm 50 \Rightarrow xy = \pm 100 \Rightarrow$ (x, y) के संभव मान

$(\pm 1,\pm 100),(\pm 2,\pm 50),(\pm 4,\pm 25),(\pm 5,\pm 20),(\pm 10,\pm 10),(\pm 20,\pm 5),(\pm 25,\pm 4),(\pm 50,\pm 2),(\pm 100,\pm 1)$

10. Consider three boxes, each containing 10 balls labelled 1,2,....,10. Suppose one ball is randomly drawn from each of the boxes. Denote by n_i, the label of the ball drawn from the i^{th} box, (i = 1, 2, 3). Then, the number of ways in which the balls can be chosen such that $n_1 < n_2 < n_3$ is :

तीन ऐसे डिब्बों पर विचार कीजिए जिनमें प्रत्येक में 1,2,....,10 तक संख्याओं से अंकित 10 गेंदें है। मानाकि प्रत्येक डिब्बे में ये यादृच्छिया एक गेंद निकाली गई। यदि i वें (i = 1, 2, 3) डिब्बे में से निकाली गई गेंद पर अंकित संख्या को n_i से प्रदर्शित किया जाए तो जितने तरीकों से यह गेंदें निकाली जा सकती है, ताकि $n_1 < n_2 < n_3$ है, है–

[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-1 (4, – 1), 120]

(1) 120 (2) 164 (3) 240 (4) 82

Ans. **(1)**

Sol. ${}^{10}C_3$ is number of ways of selecting 3 numbers from 1 to 10. Let us consider one such case : (2,5,6) then 2 would be picked from B_1, 5 from B_2 & 6 from B_3

संख्याओं 1 से 10 में से 3 तीन संख्याएं चुनने के तरीके $^{10}C_3$ है। मानाकि उनमें से एक स्थिति : (2,5,6) तब 2 को B_1 से, 5 को B_2 से तथा 6 को B_3 से लिया है।

hence अतः $^{10}C_3 = 120$

11. Let S = {1, 2, 3....., 100}. The number of non-empty subsets A of S such that the product of element in A is even is :

माना S = {1, 2, 3....., 100} तो S के उन सभी अरिक्त (non-empty) उपसमुच्चयों A जिनके अवयवों का गुणनफल सम है, की संख्या है– **[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) $2^{50} + 1$ (2) $2^{50}(2^{50}-1)$ (3) $2^{100} - 1$ (4) $2^{50} - 1$

Ans. **(2)**

Sol. Product is even when atleast one elements of subset is even

गुणनफल सम है जब उपसमुच्चय का कम से कम एक अवयव सम है।

Hence required number of subset = total subsets – number of subsets all whose elements are odd

अतः अभीष्ट उपसमुच्चयों की संख्या = कुल उपसमुच्चय – सभी उपसमुच्चयों की संख्या जिनके सभी अवयव विषम है।

$= 2^{100} - 2^{50}$

HLP Answers

1. How many positive integers are there such that n is a divisor of one of the numbers 10^{40}, 20^{30}?
कितनी धनात्मक पूर्णांक संख्याएं इस प्रकार की है कि संख्याओं 10^{40}, 20^{30} में से कोई एक संख्या का भाजक n है–

Ans. 2301

We first note that the number of +ve divisors of a +ve integer n is $(a_1 + 1)(a_2 + 1)....(a_k + 1)$

If $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ..... p_k^{a_k}$

where $p_1,......,p_k$ are integers.

Now, $a = 10^{40} = 2^{40}\, 5^{40}$; $b = 20^{30} = 2^{60}\, 5^{30}$

gcd of a, b is $c = 2^{40}\, 5^{30}$

Let A, B denote the sets of divisor of a, b respectively.

Then $A \cap B$ is set of divisors of c.

$|A| = 41^2$; $|B| = 61 \times 31$; $|A \cap B| = 41 \times 31$

Hence $|A \cup B| = 1681 + 1891 - 1271 = 2301$

Hindi. n धनात्मक पूर्णांक के धनात्मक भाजाकों की संख्या $(a_1 + 1)(a_2 + 1)....(a_k + 1)$

यदि $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ..... p_k^{a_k}$

जहां $p_1,......,p_k$ पूर्णांक है।

अब, $a = 10^{40} = 2^{40}\, 5^{40}$; $b = 20^{30} = 2^{60}\, 5^{30}$

a, b और का म.स.प. $c = 2^{40}\, 5^{30}$ है। माना a, b के भाजाकें का समुच्चय क्रमशः A तथा B है।

तब C के भाजकों का समुच्चय $A \cap B$ है।

$|A| = 41^2$; $|B| = 61 \times 31$; $|A \cap B| = 41 \times 31$

अतः $|A \cup B| = 1681 + 1891 - 1271 = 2301$

2. Six cards are drawn one by one from a set of unlimited number of cards, each card is marked with numbers -1, 0 or 1. Number of different ways in which they can be drawn if the sum of the numbers shown by them vanishes, is:

Ans. 141

असीमित पत्तों के एक समूह में से एक के बाद एक छः पत्ते खींचे जाते हैं और प्रत्येक पत्ते पर अंक -1, 0 या 1 लिखा हुआ है। कितने विभिन्न तरीकों से ये पत्ते खींचे जा सकते हैं यदि इन पर आने वाली संख्याओं का योग शून्य हो।

Sol. Here the sum of the numbers are vanishes of six cards i.e

Case I : If selected 3 cards each of number -1 or 1 i.e

The number of arrangement = $\dfrac{6!}{3!3!} = 20$

Case II : If selected 2 cards each of no. -1, 0 or 1 i.e

number of arrangement = $\dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$

Case III : If selected one card each of number -1 and 1 and 4 cards of no. 0.

so no. of arrangement is $\dfrac{6!}{1!1!4!} = 30$

Case IV : If all cards selected fram the no. 0

So no. of arrangement is $\dfrac{6!}{6!} = 1$

Hence total no. of arrangement is $20 + 90 + 30 + 1 = 141$

Hindi. यहाँ 6 पत्तों पर आने वाले अंकों का योग शून्य है अर्थात

Case I : यदि चयनित 3 पत्तों में प्रत्येक पर संख्या -1 या 1

अतः कुल चयन की विधियाँ $= \dfrac{6!}{3!3!} = 20$

Case II : यदि चयनित 2 पत्तों में प्रत्येक पर संख्या -1, 0 या 1

अतः कुल चयन की विधियाँ $= \dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$

Case III : यदि चयनित प्रत्येक 1 पत्तें में संख्या -1 तथा 1 हो तथा शेष चार पत्तों पर 0 है।

अतः कुल चयन की विधियाँ $= \dfrac{6!}{1!1!4!} = 30$

Case IV : यदि चयनित सभी पत्तों में प्रत्येक पर संख्या 0 हो

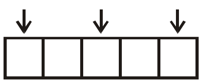
अतः कुल चयन की विधियाँ $= \dfrac{6!}{6!} = 1$

अतः कुल चयन की विधियाँ $= 20 + 90 + 30 + 1 = 141$

3. A five letter word is to be formed such that the letters appearing in the odd numbered positions are taken from the letters which appear without repetition in the word "MATHEMATICS". Further the letters appearing in the even numbered positions are taken from the letters which appear with repetition in the same word "MATHEMATICS". The number of ways in which the five letter word can be formed is:

Ans. 540

पाँच अक्षरों का एक शब्द इस प्रकार बनाया जाता है कि विषम स्थानों पर आने वाले अक्षर शब्द "MATHEMATICS" के उन अक्षरों में से चुने जाते हैं जिनकी पुनरावृत्ति नहीं हो रही है तथा सम स्थानों पर आने वाले अक्षर शब्द "MATHEMATICS" के उन अक्षरों में से चुने जाते हैं जिनकी पुनरावृत्ति हो रही हैं, तो पाँच अक्षरों का शब्द कितने तरीकों से बनाया जा सकता हैं ?

Sol. 

There are 2M, 2T, 2A and 1 H, E, I, C, S

First find the number of ways if odd's no. position place be filled is ${}^5p_3 = 60$

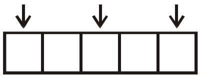
Now Case I If even place words is same i.e no. of ways = 3

Case II If even place words is different i.e no. of ways = ${}^3c_2 \times 2! = 6$

Hence total no. of arragment is

$60 \times (3 + 6) = 540$

Hindi.



दिये गये शब्द में 2M, 2T, 2A तथा 1 H, E, I, C, S है।

सर्वप्रथम विषम स्थानों को भरने की विधियाँ $= 5P_3 = 60$

अब Case I यदि सम स्थानों पर समान अक्षर हो, तो व्यवस्थाऐं = 3

Case II यदि सम स्थानों पर भिन्न–भिन्न अक्षर हो, तो व्यवस्थाऐं $= {}^3c_2 \times 2! = 6$

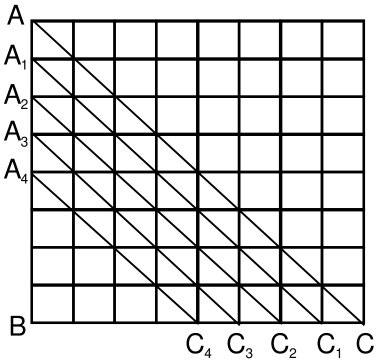
अतः कुल व्यवस्थाऐं $= 60 \times (3 + 6) = 540$

4. In how many ways 4 square are can be chosen on a chess-board, such that all the squares lie in a diagonal line.

शतरंज के बोर्ड पर चार वर्ग कितने प्रकार चुने जाते है कि सभी वर्ग एक विकर्ण रेखा पर स्थित है।

Ans. 364

Sol. Let us consider the ΔABC. Number of ways in which 4 selected squares are along the lines A_4C_4, A_3C_3, A_2, C_2, A_1C_1 and AC are ${}^4C_4$, ${}^5C_4$, ${}^6C_4$ and ${}^8C_4$ respectively.

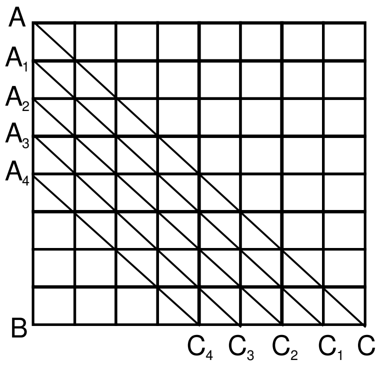


Similarly, in ΔACB, number of ways in which 4 selected squares are along the diagonal line parallel to AC are ${}^4C_4$, ${}^5C_4$, ${}^6C_4$, ${}^7C_4$ and ${}^8C_4$ but ${}^8C_4$ triangles occur only once.

Hence the total number of ways in which the 4 selected squares are in a diagonal line parallel to AC are $2({}^4C_4 + {}^5C_4 + {}^6C_4 + {}^7C_4) + {}^8C_4$

Also same is the case of selecting 4 squares on a chess-board. Such that the 4 squares are in a diagonal line $= 2\,[2({}^4C_4 + {}^5C_4 + {}^6C_4 + {}^7C_4) + {}^8C_4]$

Hindi. माना कि ΔABC है रेखाओं A_4C_4, A_3C_3, A_2, C_2, A_1C_1 और AC के अनुदिश 4 वर्गो को चुनने के क्रमचय क्रमशः ${}^4C_4$, ${}^5C_4$, ${}^6C_4$ और ${}^8C_4$ है।



इसी प्रकार ΔACB में, AC के समान्तर विकर्ण रेखा के अनुदिश 4 वर्गो को चुनने के क्रमशः ${}^4C_4$, ${}^5C_4$, ${}^6C_4$, ${}^7C_4$ और ${}^8C_4$ जबकि ${}^8C_4$ त्रिभुज केवल एक बार ही आता है।

अतः कुल क्रमचयों की संख्या $2({}^4C_4 + {}^5C_4 + {}^6C_4 + {}^7C_4) + {}^8C_4$ है जिसमें AC के समान्तर विकर्ण रेखा में 4 वर्ग चुने गए है।

तथा इसी प्रकार की स्थिति में शतंरज पर 4 वर्ग चुने जाते है। जिसमें विकर्ण रेखा में 4 वर्ग चुने जाते है।

$= 2\,[2({}^4C_4 + {}^5C_4 + {}^6C_4 + {}^7C_4) + {}^8C_4]$

5. Find the number of functions $f : A \to B$ where $n(A) = m$, $n(B) = t$, which are non decreasing,

फलन $f : A \to B$ में फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि $n(A) = m$, $n(B) = t$ जो कि ह्रासमान नहीं है–

Ans. $(t+m-1)c_m$ ways

$(t+m-1)c_m$ तरीके

Sol. Let $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\ldots b_t\}$ with $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$ and $b_1 > b_2 > \ldots\ldots > b_t$

Now for non decreasing function

$f(a_1) \geq f(a_2) \geq \ldots\ldots \geq f(a_m)$

where $\{f(a_1), f(a_2) \ldots\ldots f(a_m)\} \subseteq \{b_1, b_2, \ldots\ldots b_t\}$

Let us introduce (m – 1) dummy numbers $C_1, C_2, \ldots\ldots C_{m-1}$ and add into the set B, and then take m numbers from the new B in $(t+m-1)c_m$ ways

it is the required no. of non decreasing function from $A \to B$.

Hindi. मानाकि $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\ldots b_t\}$ जबकि $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$ तथा $b_1 > b_2 > \ldots\ldots > b_t$

अब वृद्धिमान फलन (non decreasing) के लिये

$f(a_1) \geq f(a_2) \geq \ldots\ldots \geq f(a_m)$

जहाँ $\{f(a_1), f(a_2) \ldots\ldots f(a_m)\} \subseteq \{b_1, b_2, \ldots\ldots b_t\}$

अब हम (m – 1) प्रतिलिपि संख्याएँ (Dummy Number) $C_1, C_2, \ldots\ldots C_{m-1}$ लेते है तथा इन्हें समुच्चय B में जोड़ते हैं तथा इसके पश्चात् नये समुच्चय B से m संख्याएँ लेते है जो कि $(t+m-1)c_m$ तरीके से किया जा सकता है।

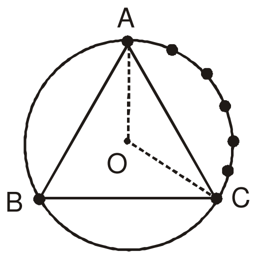
जो कि $A \to B$ में परिभाषित उन फलनों की संख्या होगी जो कि ह्रासमान नहीं है।

6. Find the number of ways of selecting 3 vertices from a regular polygon of sides '2n+1' with vertices $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_{2n+1}$ such that centre of polygon lie inside the triangle.

'2n+1' भुजाओं वाले समबहुभुज के शीर्षो $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_{2n+1}$ में से 3 शीर्षो का चयन करने के ऐसे तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिये जिनमें समबहुभुज का केन्द्र चयनित शीर्षो से बने त्रिभुज के अन्दर स्थित हो।

Ans. $\dfrac{2n+1}{3}\left({}^{2n}C_2 - 3.{}^nC_2\right)$

Sol.



If between A and C, there are 'r' vertices then AC will subtends $\dfrac{2\pi}{2n+1}$ (r + 1) at the centre.

According to condition $\dfrac{2\pi}{2n+1}(r+1) < \pi \;\Rightarrow\; r < n-1$

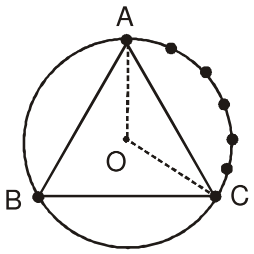
So required no of triangle will be no. of solution of

$a_1 + a_2 + a_3 = 2n - 2$

$a_1 \leq n-1$, $a_2 \leq n-1$, $a_3 \leq n-1$

which is $2n_{C_2} - 3.\ n_{C_2}$

Hindi.



यदि A तथा C के मध्य 'r' शीर्ष हो, तो भुजा AC केन्द्र पर $\frac{2\pi}{2n+1}$ (r + 1) का कोण बनायेगी।

प्रतिबंध के अनुसार $\frac{2\pi}{2n+1}(r+1) < \pi \;\Rightarrow\; r < n-1$

अतः अभीष्ट त्रिभुजों की संख्या निम्न समीकरण के हलों की संख्या के बराबर होगी।

$a_1 + a_2 + a_3 = 2n - 2$

$a_1 \le n-1$, $a_2 \le n-1$, $a_3 \le n-1$

अतः तरीकों की संख्या $= 2n_{C_2} - 3.\ n_{C_2}$

7. A operation * on a set A is said to be binary, if x * y $\in$ A , for all x, y $\in$ A, and it is said to be commutative ,
if x * y = y * x for all x, y $\in$ A. Now if A = {a_1, a_2, ..., a_n}, then find the following -
(i) Total number of binary operations of A
(ii) Total number of binary operation on A such that
$a_i * a_j \ne a_i * a_k$, if $j \ne k$.
(iii) Total number of binary operations on A such that $a_i * a_j < a_i * a_{j+1}$ $\forall$ i, j

समुच्चय A में एक संक्रिया * द्विआधारी होगी, यदि x * y $\in$ A, $\forall$ x, y $\in$ A तथा यह क्रमविनिमेय होगी,
यदि x * y = y * x, $\forall$ x, y $\in$ A. अब यदि A = {a_1, a_2, ..., a_n}, तो निम्न ज्ञात कीजिए।
(i) समुच्चय A में कुल द्विआधारी संक्रियाएँ
(ii) समुच्चय A में कुल द्विआधारी संक्रियाएँ इस प्रकार कि $a_i * a_j \ne a_i * a_k$, यदि $j \ne k$.
(iii) समुच्चय A में कुल द्विआधारी संक्रियाएँ इस प्रकार कि $a_i * a_j < a_i * a_{j+1}$ $\forall$ i, j

Ans. (i) n^{n^2} (ii) $(n!)^n$ (iii) 1

Sol. (i) For each $a_i * a_j$, we have n choices so total no. of binary operation will be n^{n^2}
(ii) In each row all the elements should be distinct, so in each row, we have n! ways , total no. of binary operation will be $(n!)^n$
(iii) In this case, in each row, elements must be in incresing order, so only 1 such binary operation.

Hindi. (i) प्रत्येक $a_i * a_j$ के लिए हमारे पास n विकल्प है अतः कुल द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या n^{n^2} होगी।
(ii) प्रत्येक पंक्ति में सभी अवयव भिन्न होने चाहिए, अतः प्रत्येक पंक्ति के लिए n! तरीके होगें, अतः कुल द्विआधारी संक्रियाओ की संख्या $(n!)^n$ होगी।
(iii) इस स्थिति में, प्रत्येक पंक्ति में सभी अवयव बढ़ते हुए क्रम में होने चाहिये अतः केवल 1 द्विआधारी संक्रिया होगी।

8. The integers from 1 to 1000 are written in order around a circle. Starting at 1, every fifteenth number is marked (that is 1, 16, 31, ... etc.). This process in continued untill a number is reached which has already been marked, then find number of unmarked numbers.
1 से 1000 तक के पूर्णांकों को वृत्त पर लिखा जाता है। 1 से प्रारम्भ करते हुए प्रत्येक 15 वीं संख्या चिन्हित् (अर्थात् 1, 16, 31, ... इत्यादि) की जाती है। यह प्रक्रिया तब तक जारी रखी जाती है जब तक कि पहले से चिन्हित् संख्या प्राप्त नहीं हो जाती, तो अचिन्हित संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. 800

Sol. In one round, marked numbers are 1, 16, 31, ..., 991 $\rightarrow$ 67 numbers
In second round marked numbers are 6, 21, 36, ..., 996 $\rightarrow$ 67 numbers
In third round marked numbers are 11, 26, 41, ..., 986 $\rightarrow$ 66 numbers
the next number will be 1 which has already been marked

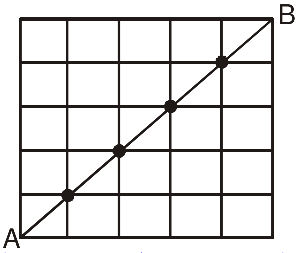
∴ total marked numbers = 67 + 67 + 66 = 200
∴ unmarked numbers = 1000 – 200 = 800

Hindi. एक चक्कर में चिन्हित संख्याएँ $\rightarrow$ 1, 16, 31, ..., 991 $\rightarrow$ 67संख्याएँ
दूसरे चक्कर में चिन्हित संख्याएँ $\rightarrow$ 6, 21, 36, ..., 996 $\rightarrow$ 67 संख्याएँ
तीसरे चक्कर में चिन्हित संख्याएँ $\rightarrow$ 11, 26, 41, ..., 986 $\rightarrow$ 66 संख्याएँ
अगली संख्या 1 होगी जो कि पहले से ही चिन्हित है।
∴ कुल चिन्हित संख्याएँ = 67 + 67 + 66 = 200
∴ कुल अचिन्हित संख्याएँ = 1000 – 200 = 800

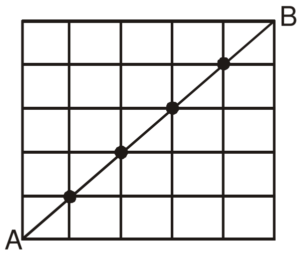
9. Find the number of ways in which n '1' and n '2' can be arranged in a row so that upto any point in the row no. of '1' is more than or equal to no. of '2'
n, '1' तथा n, '2' को एक पंक्ति में कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि पंक्ति में किसी बिन्दु तक '1' की संख्या '2' की संख्या के बराबर या उससे अधिक हो?

Ans. $\dfrac{{}^{2n}C_n}{n+1}$

Sol. No. of solution will be no. of paths below or on AB



Hindi. हलों की संख्या, AB पर के ऊपर या नीचे सम्भव रास्तों की संख्या के बराबर होगी।



10. Find the number of positive integers less than 2310 which are relatively prime with 2310.
2310 से छोटी धनात्मक पूर्णांकों की संख्या ज्ञात कीजिए जो 2310 के साथ सहअभाज्य है।

Ans. 480

Sol. Prime divisor of 2310 are 2, 3, 5, 7, 11.
So number of positive integers less than 2310 which are relatively prime with 2310

$$= 2310\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right) = 2 \times 4 \times 6 \times 10 = 480$$

Hindi. 2310 के अभाज्य भाजक 2, 3, 5, 7, 11 है।
इसलिए 2310 से छोटी धनात्मक पूर्णांकों की संख्या जो 2310 के साथ सहअभाज्य है उनकी संख्या होगी

$$= 2310\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right) = 2 \times 4 \times 6 \times 10 = 480$$

11. In maths paper there is a question on "Match the column" in which column A contains 6 entries & each entry of column A corresponds to exactly one of the 6 entries given in column B (and vice versa) written randomly. 2 marks are awarded for each correct matching & 1 mark is deducted from each incorrect matching. A student having no subjective knowledge decides to match all the 6 entries randomly. Find the number of ways in which he can answer, to get atleast 25 % marks in this question.

गणित के एक प्रश्न पत्र में स्तम्भ मिलान का एक प्रश्न हैं जिसमें स्तम्भ A में 6 प्रविष्टियाँ है और स्तम्भ A की प्रत्येक प्रविष्टि स्तम्भ B में यादृच्छिक रूप से लिखी हुई 6 प्रविष्टियों में से एक से मेल खाती (और ऐसे ही उल्टा भी) हैं। प्रत्येक सही मिलान के लिये 2 अंक दिये जाते हैं और प्रत्येक गलत मिलान के लिए 1 अंक कम कर दिया जाता हैं। एक विद्यार्थी जिसको विषय का कोई ज्ञान नहीं हैं, सभी 6 प्रविष्टियों को यादृच्छिक रूप से मिलाने का निश्चय करता है। वह कितने तरीकों से उत्तर दे सकता हैं ताकि उसे इस प्रश्न में कम से कम 25% अंक प्राप्त हो जाये?

Ans. 56 ways

Sol. Students can get maximum marks = 12

condition to get At least 25% marks

i.e. $12 \times \dfrac{25}{100} = 3$ marks

Case I : When we get exactly 3 marks i.e. 3 correct Answer and 3 wrong Answer

$$= {}^6C_3 \times 3! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \times 6 = 20 \times \left(\frac{3 - 1}{6}\right) \times 6 = 20 \times \frac{2}{6} \times 6 = 40$$

Case II : When 4 correct Answer and 2 wrong $= {}^6C_4 \times 2! \left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!}\right) = 15 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 15$

Case III : When 5 correct Answer and one wrong $= {}^6C_5 \times 1!\,(1 - 1) = 0$ (i.e. not possible)

Case IV : when all 6 correct Answer $= {}^6C_6 = 1$. Hence total no. of ways $= 40 + 15 + 1 = 56$ **Ans.**

Hindi. विधार्थी अधिकतम अंक प्राप्त कर सकता है = 12 कम से कम 25% अंक प्राप्त करने का प्रतिबंध है

अर्थात् $12 \times \dfrac{25}{100} = 3$ अंक

स्थिति I : जब ठीक 3 अंक प्राप्त करे अर्थात् 3 सही एवं 3 गलत जवाब हो

$$= {}^6C_3 \times 3! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \times 6 = 20 \times \left(\frac{3 - 1}{6}\right) \times 6 = 20 \times \frac{2}{6} \times 6 = 40$$

स्थिति II : जब 4 सही एवं दो गलत जवाब हो $= {}^6C_4 \times 2! \left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!}\right) = 15 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 15$

स्थिति III : जब 5 सही एवं एक गलत जवाब हो $= {}^6C_5 \times 1!\,(1 - 1) = 0$ (संभव नहीं है)

स्थिति IV : जब सभी 6 सही जवाब हो $= {}^6C_6 = 1$. अतः कुल तरीके होगे $= 40 + 15 + 1 = 56$ **Ans.**

12. Find the number of positive unequal integral solution of the equation $x + y + z = 20$.

समीकरण $x + y + z = 20$ के धनात्मक भिन्न–भिन्न पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. 144

Sol. The given equation is $x + y + z = 20$ ....(1)

We have to find the number of different values of x, y, z

Such that $x \neq y \neq z$ and $x, y, z \geq 1$

Let us assume that $x < y < z$

And $x = x_1$, $y - x = x_2$ and $z - y = x_3$

Then $x = x_1$; $y = x_1 + x_2$ and $z = x_1 + x_2 + x_3$

Also $x_1, x_2, x_3 \geq 1$

Substitution these values in (1) we get

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$ ....(2)

Where $x_1, x_2, x_3 \geq 1$

Now No. of solution of equation (2) is

$= $ Co-efficient of x^{20} in $(x^3 + x^6 + x^9 + ...) \times (x^2 + x^4 + x^6 + ...) \times (x + x^2 + x^3 + ...)$

$= $ Co-efficient of x^{14} in $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + ...)\,(1 + x^2 + x^4 + ...) \times (1 + x + x^2 + ...)$

$= (1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + 3x^{14} + 3x^{15} + ...)$

$(1 + x + x^2 + x^3 + ...)$

Co-efficient of x^{14} is $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 = 24$

But x , y and z are arranged in 3! ways

So Required no of solution = $24 \times 6 = 144$ **Ans.**

Hindi. दी गयी समीकरण $x + y + z = 20$ है। ....(1)

हमें x, y, z के मान इस प्रकार ज्ञात करने है कि $x \neq y \neq z$ एवं $x, y, z \geq 1$

माना $x < y < z$

एवं $x = x_1,\ y - x = x_2$ एवं $z - y = y_3$

तब $x = x_1$; $y = x_1 + x_2$ एवं $z = x_1 + x_2 + x_3$

जहाँ $x_1, x_2, x_3 \geq 1$

इन सभी मानों की (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$ ....(2)

जहाँ $x_1, x_2, x_3 \geq 1$

अब समीकरण (2) के हलों की संख्या

$= (x^3 + x^6 + x^9 + ...) \times (x^2 + x^4 + x^6 + ...) \times (x + x^2 + x^3 + ...)$ में x^{20} का गुणांक

$= (1 + x^3 + x^6 + x^9 + ...) (1 + x^2 + x^4 + -....) \times (1 + x + x^2 + ...)$ में x^{14} का गुणांक

$= (1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + 3x^{14} + 3x^{15} + ...)$
$(1 + x + x^2 + x^3 + ...)$ में x^{14} का गुणांक

अतः x^{14} का गुणांक $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 = 24$

लेकिन x , y व z को 3! तरह से व्यवस्थित किया जा सकता है–

अतः हलों की संख्या $= 24 \times 6 = 144$

13. If we have 3 identical white flowers and 6m identical red flowers. Find the number of ways in which a garland can be made using all the flowers.
यदि हमारे पास 3 सर्वसम सफेद फूल तथा 6m सर्वसम लाल फूल है, तो इन सभी फूलों को प्रयोग में लेते हुए कितने तरह से माला बनायी जा सकती है?

Ans. $3m^2 + 3m + 1$

Sol. No. of garlands will be equal to no. of solutions of the equation

$a_1 + a_2 + a_3 = 6m$

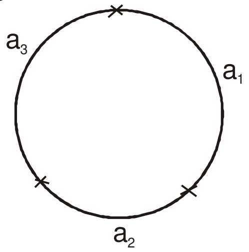
with $a_1 \leq a_2 \leq a_3$

Case I $a_1 = a_2 = a_3$, so we have only one solution

Case II only two are equal, we have $\frac{9m}{3} = 3m$ solutions

Case III If all are different, we have $\frac{18m^2 + 9m + 1 - 9m - 1}{6} = 3m^2$

Solution, so total no. of garlands will be $3m^2 + 3m + 1$



Hindi. मालाओं की संख्या निम्न समीकरण के हलों की संख्या के बराबर होगी।

$a_1 + a_2 + a_3 = 6m$

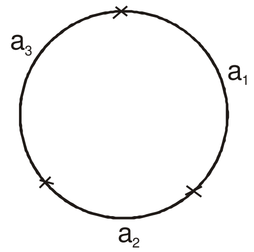
जबकि $a_1 \leq a_2 \leq a_3$

स्थिति I $a_1 = a_2 = a_3$, अतः केवल एक हल होगा।

स्थिति II यदि केवल दो बराबर हो, तो $\frac{9m}{3} = 3m$ हल मिलेंगे।

स्थिति III यदि सभी भिन्न हो, तो हमें $\frac{18m^2 + 9m + 1 - 9m - 1}{6} = 3m^2$ हल मिलेंगे।

अतः कुल मालायें $3m^2 + 3m + 1$ होगी।



14. Number of times is the digit 5 written when listing all numbers from 1 to 10^5?

1 से 10^5 की सभी संख्याओं को लिखने पर अंक 5 कितनी बार लिखा गया है।

Ans. 50000

Sol. We have to count the occurrences of digit 5 consider integers t such that $0 \le t \le 10^5$

The largest number t having 5 in the units place is 99995.So there are

$1 + 9999 = 10^4$ numbers t having 5 in the units place

The are 5, 15, 25,............99995

We can describe these numbers as $t = x^5$

Where x is any one of 0, 1, 2,......9999. Similarly numbers t = x5y.

ie.e., numbers having 5 in the ten's place are in all $(1 + 999) \times 10 = 10^4$ as x can be any one of 0, 1, 2,..999 and y can be anyone of 0, 1,2,.......9

In the same way, there are 10^4 numbers in each of the following cases: numbers with 5 in the hundreds place or thousands place or ten thousands place.

Hence, the total number of times 5 is written $10^4 \times 5$

Hindi. यहां t पूर्णांको में 5 अंक की गिनती जबकि $0 \le t \le 10^5$ है।

अधिकतम संख्या जबकि 99995 इकाई स्थान में 5 है। $1 + 9999 = 10^4$ संख्या t में 5 इकाई स्थान पर है।

The are 5, 15, 25,............99995

हम केवल इन संख्याओं को ले सकते है।

जहां x, 0, 1, 2,......9999 में से एक है। इसी प्रकार संख्या t = x5y.

संख्याएं जिनके दहाई संख्या का अंक $(1 + 999) \times 10 = 10^4$ है तब x कोई भी अंक 0, 1, 2,..999 तथा y कोई भी अंक 0, 1,2,.......9 हो सकता है।

इसी प्रकार 10^4 संख्याएं जिनमें प्रत्येक की स्थिति है। अंक 5 जिसमें सैकण्डा स्थान हजार संख्या स्थान, दस हजावां स्थान है। अतः 5 को कुल बार लिखने पर $10^4 \times 5$

15. The number of combinations of n letters together out of 3n letters of which n are a and n are b and the rest unlike.

3n पत्रों (जिनमें से n पत्र, a प्रकार के हैं n पत्र, b प्रकार के हैं तथा शेष पत्र भिन्न हैं।) में से n पत्रों के कितने संचय बनाये जा सकते हैं।

Ans. $(n + 2). 2^{n-1}$

Sol. $\underbrace{a\ \ a\ \ a\ \ ....a}_{n\ times}\ \underbrace{b\ \ b\ \ b\ \ ....b}_{n\ times}\ \underbrace{all\ \ diff.}_{n}$

selection of n objects = coefficient of x^n in $(1 + x + ...+ x^n)^2 (1 + x)^n$

on solving = $(n + 2). 2^{n-1}$

Hindi. $\underbrace{a\ \ a\ \ a\ \ ....a}_{n\ times}\ \underbrace{b\ \ b\ \ b\ \ ....b}_{n\ times}\ \underbrace{all\ \ diff.}_{n}$

n वस्तुओं को चुनने के तरीकों की संख्या = $(1 + x + ...+ x^n)^2 (1 + x)^n$ में x^n का गुणांक

हल करने पर = $(n + 2). 2^{n-1}$

16. In a row, there are 81 rooms, whose door no. are 1,2,.......,81, initially all the door are closed. A person takes 81 round of the row, numbers as 1st round, 2nd round .... 81th round. In each round, he interchage the position of those door number, whose number is multiple of the round number. Find out after 81st round,How many doors will be open.
एक पंक्ति में 81 कमरे हैं जिनके द्वार संख्या 1, 2,......., 81 है। प्रारम्भ में सभी द्वार बन्द है। यदि एक व्यक्ति इस पंक्ति के 81 चक्कर लगाता है जो कि 1st चक्कर, 2nd चक्कर .... 81 वां चक्कर है। यदि प्रत्येक चक्कर में वह उस द्वार की स्थिति को परिवर्तित (interchage) कर देता है जिसकी द्वार संख्या चक्कर संख्या का गुणज हो, तो 81 वें चक्कर के पश्चात् कुल कितने दरवाजे खुल जायेगें?

Ans. 9

Sol. Here, we note the following.

1. A door will open if it face odd number of changes.
2. Number of changes faced by any door will be equal to number of factors of the door number
3. So only those door will open, whose number is perfect square so ans is $\left[\sqrt{n}\right]$, [where [ ] denotes the G.I.F.]

Hindi. यहाँ हम निम्न निर्देश को देखेगें।

1. एक द्वार तभी खुलेगा यदि यह उसमें विषम संख्या में परिवर्तन हों।
2. किसी भी द्वार में होने वाले परिवर्तनों की संख्या द्वार संख्या के गुणनखंडों की संख्या के बराबर होगी।
3. अतः वे ही द्वार खुलेगें जिनकी द्वार संख्या पूर्ण वर्ग है,

अतः कुल खुले दरवाजों की संख्या $\left[\sqrt{n}\right]$ होगी।

[जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है।]

17. Mr. Sibbal walk up 16 steps, going up either 1 or 2 steps with each stride there is explosive material on the 8th step so he cannot step there. Then number of ways in which Mr. Sibbal can go up.
श्रीमान सिब्बल 16 कदम ऊपर की ओर चलते है, प्रत्येक चाल में 1 या 2 कदम जाते है। उनके पास 8वें कदम में कोई जगह नहीं है जहाँ वह कदम रख सकते है तब श्रीमान सिब्बल के ऊपर की ओर कदम रखने के तरीके है–

Ans. 441

Sol. x number of 1 unit steps
y number of 2 unit steps
$x + 2y = 7$
$x = 7 \quad y = 0$ Number of ways = 1
$x = 5 \quad y = 1$ Number of ways = 6
$x = 3 \quad y = 2$ Number of ways = 10
$x = 1 \quad y = 3$ Number of ways = 4
Total number of ways = 21 ways
Now he cannot go on 8th step. Now he reach 9th step in 1 ways and then again move from 9th to 15th steps
$x + 2y = 7$
Number of ways = 21
Total number of ways = 21.21 = 441

Hindi. 1 इकाई कदम की x संख्या
2 इकाई कदम की y संख्या
$x + 2y = 7$
$x = 7 \quad y = 0$ क्रमचयों की संख्या = 1
$x = 5 \quad y = 1$ क्रमचयों की संख्या = 6
$x = 3 \quad y = 2$ क्रमचयों की संख्या = 10
$x = 1 \quad y = 3$ क्रमचयों की संख्या = 4
कुल क्रमचय = 21 तरीके
वह 8वां कदम बढ़ नहीं सकता है अब वह 9 वें कदम में 1 तरीका चल सकता है। तब वह 9वें से 15वें कदम में पुनः चल सकता है
$x + 2y = 7$
तरीकों की संख्या = 21

कुल तरीकों की संख्या = 21.21 = 441

18. Number of numbers of the form xxyy which are perfect squares of a natural number.
xxyy रूप की संख्याओं की संख्या होगी जो कि एक प्राकृत संख्या का पूर्ण वर्ग है।

Ans. 1

Sol. xxyy
Number can be written in the form of $y + 10y + 100x + 1000x = 1100x + 11y$
$\Rightarrow \quad 11(100x + y) = p^2$ where $p \in N$
Now we can say that p is multiple of 11
$100x + y = \dfrac{p^2}{11}$
$100x + y = 44, 99, 176, 275, 396, 539, 704, 891$
Now x & y are natural number from [0, 9]
only possibility
$100x + y = 704$
$y = 4$
$x = 7$
so number is
7744

Hindi. xxyy
$y + 10y + 100x + 1000x = 1100 + 11y$ के रूप की संख्या को लिखा जा सकता है
$\Rightarrow \quad 11(100x + y) = p^2$ जहाँ $p \in N$
हम कह सकते है कि p, 11 का गुणज है।
$100x + y = \dfrac{p^2}{11}$
$100x + y = 44, 99, 176, 275, 396, 539, 704, 891$
अब [0, 9] से x और y प्राकृत संख्याएं है।
केवल सम्भावनाएं
$100x + y = 704$
$y = 4$
$x = 7$
इसलिए संख्या है
7744

19. A batsman scores exactly a century by hitting fours and sixes in twenty consecutive balls. In how many different ways can he hit either six or four or play a dot ball?
एक बल्लेबाज 20 क्रमागत गेदों में 4 रन और 6 रन की सहायता से ठीक एक शतक लगाता है। कितने तरीकों से वह ऐसा कर सकता है यदि किसी भी गेंद पर 4 रन, 6 रन और खाली गेंद ले सकता है–

Ans. $\dfrac{20!}{10!\ 10!} + \dfrac{20!}{7!\ 12!} + \dfrac{20!}{4!\ 14!\ 2!} + \dfrac{20!}{16!\,3!}$

Sol. Let the batsman hit 'x'– fours
'y' – sixes
'z' = may not yield runs

$4x + 6y + 0z = 100$
$x + y + z = 20$
make equation in y & z
$y - 2z = 10$
$y = 10 + 2z$

x	y	z
10	10	0
7	12	1
4	14	2
1	16	3

Total number of ways $\frac{20!}{10!\ 10!}+\frac{20!}{7!\ 12!}+\frac{20!}{4!\ \ 14!\ \ 2!}+\frac{20!}{16!\,3!}$

Hindi माना कि बल्लेबाज मारता है 'x'– चौका

'y' – छक्का

'z' = में कोई रन नहीं लेता है

$4x + 6y + 0z = 100$

$x + y + z = 20$

y और z में समीकरणें

$y - 2z = 10$

$y = 10 + 2z$

x	y	z
10	10	0
7	12	1
4	14	2
1	16	3

कुल तरीके $\frac{20!}{10!\ 10!}+\frac{20!}{7!\ 12!}+\frac{20!}{4!\ \ 14!\ \ 2!}+\frac{20!}{16!\,3!}$

20. In how many ways can two distinct subsets of the set A of $k(k \geq 2)$ elements be selected so that they have exactly two common elements.

$k(k \geq 2)$ अवयवों के समुच्चय A के दो विभिन्न उपसमुच्चय को कितने प्रकार से चुना जा सकता है जबकि उनमें ठीक 2 अवयव उभयनिष्ठ हो।

Ans. $\frac{k(k-1)}{4}\ ((3)^{k-2}-1)$

Sol. Let the two subset be A & B

First select two element in ${}^{k}C_2$ ways

Now remaining 'r' element for subset A are selected from (k – 2) elements and number of element for B from k – 2 – r elements

$0 \leq r \leq k-2$

number of selection = ${}^{k-2}C_r.2^{k-2-r}$

total number of selection

$$\sum_{r=0}^{k-2} {}^{k-2}C_r.2^{k-2-r} - 1,$$

Now every pair A, B is appearing twice

$$\frac{1}{2}\,{}^{k}C_2\left[\sum_{r=0}^{k-2} {}^{k-2}C_r.2^{k-2-r} - 1\right)$$

$$\frac{k(k-1)}{4}\ ((2+1)^{k-2}-1)$$

Hindi. माना A और B दो उपसमुच्य है।

${}^{k}C_2$ तरीकों में प्रथम दो अवयवों को चुनने पर

अब समुच्चय A के लिए शेष 'r' अवयवों को (k – 2) तरीकों से चुना जाता है, k – 2 – r अवयवों से B के लिए अवयवों की संख्या है।

$0 \leq r \leq k-2$

कुल चयन = ${}^{k-2}C_r.2^{k-2-r}$

कुल चयनों की संख्या

$$\sum_{r=0}^{k-2} {}^{k-2}C_r.2^{k-2-r} - 1,$$

अब प्रत्येक युग्म A, B के दो बार आने पर

$\frac{1}{2}\,{}^{k}C_2\left[\sum_{r=0}^{k-2}{}^{k-2}C_r.2^{k-2-r}-1\right)$

$\frac{k(k-1)}{4}$ $((2+1)^{k-2}-1)$

21. How many 5 digit numbers can be made having exactly two identical digit.

5 अंको की संख्याओं की संख्या होगी जो ठीक 2 सर्वसम अंको से बनाई जा सकती है।

Ans. 45360

Sol. **case-I** Two identical digit are (0, 0)

number of ways ${}^{9}C_3\left(\frac{5!}{2!}-4!\right)=3024$

case-II Two identical digit are
(1, 1), (2, 2) ...... (9, 9)

P-1 If '0' is included

${}^{9}C_1.{}^{8}C_2 = \left(\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}\right)12096$

P-2 If 0 is not included

${}^{9}C_1.{}^{8}C_3\left(\frac{5!}{2!}\right)=3360\times 9=30240$

Total number of ways

${}^{9}C_1\ {}^{8}C_2+\left(\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}\right){}^{8}C_3.\frac{5!}{2!}=12096+30240=42336$

Total ways = 42336 + 3024 = 45360.

Hindi **case-I** दो सर्वसम अंक (0, 0)

कुल तरीके ${}^{9}C_3\left(\frac{5!}{2!}-4!\right)=3024$

case-II दो सर्वसम अंक (1, 1), (2, 2) ...... (9, 9) है।

P-1 यदि '0' शामिल है।

${}^{9}C_1.{}^{8}C_2\left(\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}\right)=12096$

P-2 यदि 0 शामिल नहीं है।

${}^{9}C_1.{}^{8}C_3\left(\frac{5!}{2!}\right)=3360\times 9=30240$

कुल तरीके

${}^{9}C_1\ {}^{8}C_2\left(\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}\right)+{}^{8}C_3.\frac{5!}{2!}=12096+30240=42336$

कुल तरीके = 42336 + 3024 = 45360.

22. Find the number of 3-digit numbers. (including all numbers) which have any one digit is the average of the other two digits.

3-अंको की संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें कोई भी एक अंक अन्य दो अंको का औसत है।

Ans. 121

Sol. Consider two at मानाकि दो

A : 1, 3, 5, 7, 9

B : 0, 2, 4, 6, 8

Total number of ways कुल तरीके

$({}^{5}C_2)\times 3!+({}^{4}C_2)\times 3!+({}^{4}C_1)\times 4+9=121$

23. In how many ways can(2n + 1) identical balls be placed in 3 distinct boxes so that any two boxes together will contain more balls than the third box.
(2n + 1) सर्वसम गेंदों को 3 विभिन्न सन्दूकों में कितने तरीकों से रखा जा सकता है कि कोई भी दो सन्दूक एक साथ, तीसरे सन्दूक से अधिक गेंद रखेगा।

Ans. $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Sol. $x_1 + x_2 + x_3 = 2n + 1$
Total number of ways of places = ${}^{2n+3}C_2$
Total number of ways to placed the balls so that first box have more balls than other two = ${}^{n+2}C_2$
(first place (n + 1) balls in first box and then divide n balls in 3 boxes)
Hence total number of ways
$${}^{2n+3}C_2 - 3\,{}^{n+2}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sol. $x_1 + x_2 + x_3 = 2n + 1$
कुल क्रमचयों की संख्या = ${}^{2n+3}C_2$
प्रथम सन्दूक में, अन्य 2 से अधिक गेंद रखने पर क्रमचयों की संख्या = ${}^{n+2}C_2$
(प्रथम सन्दूक में प्रथम स्थान पर (n + 1) तथा n गेदों को 3 सन्दूकों में विभाजित करने पर)
अतः कुल क्रमचय
$${}^{2n+3}C_2 - 3\,{}^{n+2}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

24. Let f(n) denote the number of different ways in which the positive integer 'n' can be expressed as sum of 1s and 2s.
for example f(4) = 5 {2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1}. Now that order of 1s and 2s is important. Then determine f(f(6))
माना f(n) विभिन्न क्रमचयों की संख्या को व्यक्त करता है जिसमें धनात्मक पूर्णांक 'n' को 1 या 2 के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
उदाहरण के लिए f(4) = 5 {2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1} अब 1 या 2 के क्रम महत्वपूर्ण है तब f(f(6)) ज्ञात कीजिए।

Ans. 377

Sol. 6 = 3(2) = 6(1) = 1(2) + 4(1) = 2(2) + 2(1)
Number of permutation क्रमचय की सख्ंया
$$1 + \frac{5!}{4!} + \frac{4!}{2!\ \ 2!} + \frac{3!}{3!} = 13$$
Now अब f(6) = 13
f(f(6)) = f(13)
13 = 13(1) + 0(2) = 11(1) + (2)1 = 9(1) + 2(2)
= 7(1) + 3(2) = 5(1) + 4(2) = 3(1) + 5(2) = 1(1) + 6(2)
Total number of ways कुल क्रमचयों की संख्या
$$1 + \frac{12!}{11!} + \frac{11!}{9!\ \ 2!} + \frac{10!}{7!\ \ 3!} + \frac{9!}{5!\ \ 4!} + \frac{8!}{3!\ \ 5!} + \frac{7!}{6!}$$
Total कुल = 377

25. Prove that (n!)! is divisible by $(n!)^{(n-1)!}$
सिद्ध कीजिए कि (n!)! , $(n!)^{(n-1)!}$ से विभाजित है।

Sol. (n!)! is the product of the positive integers from 1 to n! we write integers from 1 to n! in (n – 1)! rows as follows
1.2.3......(n)

$(n + 1)(n + 2) .... (2n)$
$(2n + 1)(2n + 2) .... (3n)$
:
:
$(n! – n + 1)(n! – n + 2) .... n(n – 1)!$
Each of these $(n – 1)!$ rows contain n consecutive positive integers. The product of consecutive integers in each row is divisible by n!
Hence to product of all integers from 1 to n! is divisible by $(n!)^{(n-1)!}$

Hindi. 1 से n! तक धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल (n!)! तब 1 से n! तक के पूर्णांकों को (n – 1)! पंक्ति में लिख सकते है।
$1.2.3......(n)$
$(n + 1)(n + 2) .... (2n)$
$(2n + 1)(2n + 2) .... (3n)$
:
:
$(n! – n + 1)(n! – n + 2) .... n(n – 1)!$
इन (n – 1)! पंक्तियों के प्रत्येक में n क्रमागत धनात्मक पूर्णांक है। प्रत्येक पंक्ति में क्रमागत पूर्णांकों का गुणनफल n! से विभाजित है।
अतः 1 से n! तक के सभी पूर्णांकों का गुणनफल $(n!)^{(n-1)!}$ से विभाजित है।

26. A user of facebook which is two or more days older can send a friend request to some one to join facebook.
If initially there is one user on day one then find a recurrence relation for a_n where a_n is number of users after n days.
एक फेसबुक को काम में लेने वाला व्यक्ति जो दो या अधिक दिनों पुराने व्यक्ति को फेसबुक में शामिल होने के लिए निवेदन करता है यदि आरम्भ में एक दिन में उपभोक्ता है तब a_n के लिए प्रतिवर्ति सम्बन्ध लिखियें जहाँ a_n, n दिनों के बाद उपभोक्ताओं की संख्या है–

Ans. $\mathbf{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$

Sol.

	(two or more than two days old) x	one day old y	pending request z
Ist day	0	1	0
IInd day	1	0	1
IIIrd day	1	1	1
IVth day	2	1	2
Vth day	3	2	3
VIth day	5	3	5
VIIth day	8	5	8
VIIIth day	13	8	13
……..			
….nth day	x_n	y_n	z_n

	(दो या अधिक दिन पुराने) x	एक दिन पुराने y	निवेदन बाकी z
पहला दिन	0	1	0
दूसरा दिन	1	0	1
तीसरा दिन	1	1	1
चौथा दिन	2	1	2
पाचवाँ दिन	3	2	3
छटा दिन	5	3	5
सातवाँ दिन	8	5	8
आठवाँ दिन	13	8	13
......			
n वाँ दिन	x_n	y_n	z_n

$x_n = y_{n-1} + x_{n-1}$
$x_n = z_n$
$x_n = a_{n-1}$
$a_n = x_n + y_n$
$a_n = a_{n-1} + x_{n-1}$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

27. Let X = {1, 2, 3,......,10}. Find the the number of pairs {A, B} such $A \subseteq X$. $B \subseteq X$. $A \neq B$ and $A \cap B = \{5,7,8\}$.
[DRN1479]
माना X = {1, 2, 3,......,10} तब {A, B} युग्मों की संख्या ज्ञात कीजिए जब कि $A \subseteq X$. $B \subseteq X$. $A \neq B$ तथा $A \cap B = \{5, 7, 8\}$.

Ans. 2186

Sol. X = {1, 2, 3, ..., 0}
So $X - (A \cap B)$ has 7 elements.
A will has 5, 7, 8. Rest elements can be assigned in 2 ways '1' can either go to A of B or none. So total pairs = $3^7 - \underset{\uparrow}{(1)}$.
(When no elements has been assigned to A or B.)

Hindi. X = {1, 2, 3, ..., 0}
इसलिए $X - (A \cap B)$, 7 अवयव है
A में 5, 7, 8 होगें। अन्य अवयवों को 2 तरीकों से A का B या किसी में नहीं हो = $3^7 - \underset{\uparrow}{(1)}$.
(या किसी में नहीं हो। इसलिए कुल तरीकें A या B)

28. Consider a 20-sided convex polygon K, with vertices $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ in that order. Find the number of ways in which three sides of K can be chosen so that every pair among them has at least two sides of K between them. (For example $(A_1A_2, A_4A_5, A_{11}A_{12})$ is an admissible triple while $(A_1A_2, A_4A_5, A_{19}A_{20})$ is not).
माना कि K एक 20-भुजा वाला अवमुख बहुभुज है जिसके शीर्ष $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ उसी क्रम में है। ज्ञात कीजिए कि ऐसे कितने तरीके हैं जिसमें K की तीन भुजाएँ इस तरह चुनी जा सकती हैं कि उनमें से प्रत्येक युग्म में बीच में K की कम से कम दो भुजाएं हों।
(उदाहरणार्थ $(A_1 A_2, A_4 A_5, A_{11} A_{12})$ ग्राहय त्रिक हैं जब कि $(A_1 A_2, A_4 A_5, A_{19} A_{20})$ नहीं हैं।)

Ans. **520**

Sol. Any side can be selected in ${}^{20}C_1$ ways

Let x, y, z are gapes between two sides and

$x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$

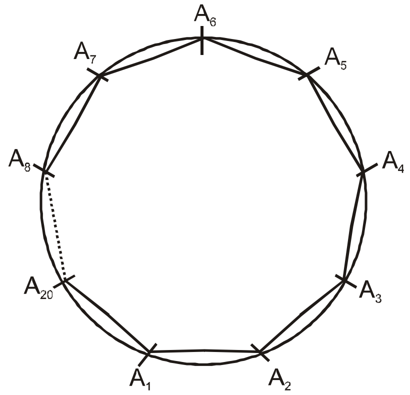
also $x + y + z = 17$

Let $x = t_1 + 2$, $y = t_2 + 2$, $z = t_3 + 2$

so $t_1 + t_2 + t_3 = 11$ where $t_1, t_2, t_3 \in W$

so total ways ${}^{11+3-1}C_{3-1} = {}^{13}C_2$

Now total required ways = $\dfrac{{}^{20}C_1 \times {}^{13}C_2}{3} = 520$



Hindi. कोई भुजा को चुना जा सकता हैं = ${}^{20}C_1$ तरीके से

माना x, y, z दो भुजाओं के मध्य अन्तराल है तथा

$x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$

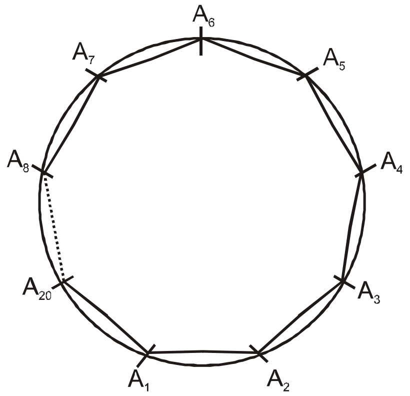
तथा $x + y + z = 17$

माना Let $x = t_1 + 2$, $y = t_2 + 2$, $z = t_3 + 2$

इसलिए $t_1 + t_2 + t_3 = 11$ जहाँ $t_1, t_2, t_3 \in W$

इसलिए कुल तरीके ${}^{11+3-1}C_{3-1} = {}^{13}C_2$

अब कुल अभीष्ट तरीके = $\dfrac{{}^{20}C_1 \times {}^{13}C_2}{3} = 520$



29. Find the number of 4-digit numbers (in base 10) having non-zero digits and which are divisible by 4 but not by 8.

4-अंकों की संख्याओं (आधार 10 में) की संख्या होगी जिसके अशून्य अंक है और जो 4 से विभाजित है परन्तु 8 से नहीं।

Ans. 729

Sol. We divide the even 4-digit numbers having non-zero digits into 4 classes : those ending in 2, 4, 6, 8.

(A) Suppose a 4-digit number ends in 2. Then the second right digit must be odd in order to be divisible by 4. Thus the last 2 digits must be of the form 12, 32, 52,72 or 92. If a number ends in 12, 52 or 92, then the previous digit must be even in order not to be divisible by 8 and we have 4 admissible even digits.

Now the left most digit of such a 4-digit number can be any non-zero digit and there are 9 such ways, and we get $9 \times 4 \times 3 = 108$ such number. If a number ends in 32 or 72, then the previous digit must be odd in order not to be divisible by 8 and we have 5 admissible odd digits. Here again the left most digit of such a 4-digit number can be any non-zero digit and there are 9 such ways, and we get $9 \times 5 \times 2 = 90$ such number. Thus the number of 4-digit number having non-zero digits, ending in 2, divisible by 4 not by 8 is $108 + 90 = 198$.

(B). If the number ends in 4, then the previous digit must be even for divisibility by 4. Thus the last two digits must be of the form 24, 44, 64, 84. If we take numbers ending with 24 and 64, then the previous digit must be odd for non-divisibility by 8 and the left most digit can be any non-zero digit. Here we get $9 \times 5 \times 2 = 90$ such numbers. If the last two digits are of the form 44 and 84, then previous digit must be even for non-divisibility by 8. And the left most digit can take 9 possible values. We thus get $9 \times 4 \times 2 = 72$ numbers. Thus the admissible numbers ending in 4 is $90 + 72 = 162$.

(C) If a number ends with 6, then the last two digits must be of the form 16, 36, 56, 76, 96. For numbers ending with 16, 56, 76, the previous digit must be odd. For numbers ending with 36, 76, the previous digit must be even. Thus we get here $(9 \times 5 \times 3) + (9 \times 4 \times 2) = 135 + 72 = 207$ numbers.

(D) If a number ends with 8, then the last two digits must be of the form 28, 48, 68, 88. For numbers ending with 28, 68, the previous digit must be even. For numbers ending with 48, 88 the previous digit must be odd. Thus we get $(9 \times 4 \times 2) + (9 \times 5 \times 2) = 72 + 90 = 162$ numbers.

Thus the number of 4-digit numbers, having non-zero digits, and divisible by 4 but not by 8 is
$198 + 168 + 207 + 162 = 729$.

Alternative Solution : If we take any four consecutive even numbers and divide them by 8, we get remainders 0, 2, 4, 6 in some order. Thus there is only one number of the from $8k + 4$ among them which is divisible by 4 but not by 8. Hence if we take four even consecutive numbers.
$1000a + 100b + 10c + 2$, $1000a + 100b + 10c + 4$, $1000a + 100b + 10c + 6$, $1000a + 100b + 10c + 8$, there is exactly one among these four which is divisible by 4 but not by 8. Now we can divide the set of all 4-digit even numbers with non-zero digits into groups of 4 such consecutive even numbers with a, b, c nonzero. And in each group, there is exactly one number which is divisible by 4 but not by 8. The number of such groups is precisely equal to $9 \times 9 \times 9 = 729$, since we can vary a, b.c in the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Hindi. अशून्य अंको की 4-अंकों की सम संख्याओं को हम 4 भागों मे विभक्त करते है। जिनके अन्तिम अंक 2, 4, 6, 8 है।

(A) माना कि 4-अंक की संख्या का अन्तिम अंक 2 है। तब 4 विभाजित होने के लिए दूसरा दांया अंक क्रम में अवश्य विषम होगा। तब अन्तिम 2 अंको का रूप 12, 32, 52,72 या 92 होगें। यदि संख्या के अन्तिम अंक 12, 52 या 92 है तब पूर्व का अंक क्रम मे अवश्य सम होगा जब यह 8 से विभाजित नहीं होगा और यहाँ 4 स्वीकार्य सम अंक है। अब इसप्रकार की 4 अंको की संख्या के बायें अंक कोई भी अशून्य अंक हो सकता है इसके 9 तरीके है और इस प्रकार की संख्याओं की संख्या $9 \times 4 \times 3 = 108$ है। यदि संख्या के अन्तिम अंक 32 या 72 है, तब 8 से विभाजित नहीं होने के लिए क्रम में पूर्व अंक अवश्य विषम होने चाहिए यहाँ स्वीकार्य विषम अंक है। यहाँ पुनः इसप्रकार की 4-अंको की संख्या का बायां अंक अशून्य अंक हो सकता है और इसके 9 तरीके है तब इस प्रकार की संख्याओं की संख्या $9 \times 5 \times 2 = 90$ है। अतः 2 से समाप्त होने वाली अशून्य अंको की 4 अंकों की संख्याओं की संख्या $108 + 90 = 198$ होगी जो 4 से विभाजित है परन्तु 8 से नहीं।

(B). यदि संख्या 4 से समाप्त होती है तब 4 से विभाजित होने के लिए पूर्व के अंक सम होने चाहिए। अतः अन्तिम दो अंक 24, 44, 64, 84 के रूप के होंगें. यदि 24 और 64 से समाप्त होने वाली संख्या लेते है तब 8 से विभाजित नहीं होने के लिए पूर्व का अंक विषम होना चाहिए और बायां अंक कोई भी अशून्य संख्या हो सकती है अतः तरीके $9 \times 5 \times 2 = 90$ है। यदि 44 और 84 से समाप्त होने वाली संख्या लेते है तब 8 से विभाजित नहीं होने के लिए पूर्व का अंक सम होना चाहिए और बायां अंक कोई भी अशून्य संख्या हो सकती है अतः तरीके $9 \times 4 \times 2 = 72$ है। अतः कुल संख्याएं $90 + 72 = 162$ है।

(C) यदि संख्या 6 से समाप्त होती है तब 4 से विभाजित होने के लिए अन्तिम दो अंको का रूप 16, 36, 56, 76, 96 होगा। यदि अन्तिम दो अंक 16, 56, 76 के लिए पूर्व अंक विषम होना चाहिए और अन्तिम दो अंक 36, 76 के लिए पूर्व का अंक सम होना चाहिए। अतः कुल तरीके $(9 \times 5 \times 3) + (9 \times 4 \times 2) = 135 + 72 = 207$ है।

(D) यदि संख्या 8 से समाप्त होती है तब 4 से विभाजित होने के लिए अन्तिम दो अंको का रूप 28, 48, 68, 88 होगा। यदि अन्तिम दो अंक 28, 68 के लिए पूर्व अंक सम होना चाहिए और अन्तिम दो अंक 48, 88 के लिए पूर्व का अंक विषम होना चाहिए। अतः कुल तरीके $(9 \times 4 \times 2) + (9 \times 5 \times 2) = 72 + 90 = 162$ है।

अशून्य अंको की 4-अंको की संख्याऐं जो 4 से विभाजित है परन्तु 8 से नहीं है।

$198 + 168 + 207 + 162 = 729$.

वैकल्पिक हल : यदि हम कोई चार क्रमागत सम संख्याऐं लेते है और उनको 8 से विभाजित करते है तब शेषफल 0, 2, 4, 6 किसी क्रम में होंगें अतः केवल एक संख्या का रूप $8k + 4$ है जो 4 से विभाजित है परन्तु 8 से नहीं । अतः हम चार क्रमागत सम संख्याऐं लेते है $1000a + 100b + 10c + 2$, $1000a + 100b + 10c + 4$, $1000a + 100b + 10c + 6$, $1000a + 100b + 10c + 8$ इन चारों में से ठीक एक संख्या है जो 4 से विभाजित है परन्तु 8 से नहीं अब इसप्रकार की चार क्रमागत सम संख्याओं के समूह जिनमें a, b, c अशून्य है, को अशून्य अंको की सभी चार अंको की संख्याओं के समुच्चय में विभाजित कर सकते है और प्रत्येक समूह में ठीक एक संख्या है जो 4 से विभाजित है परन्तु 8 से नहीं । इसप्रकार के समूहों की संख्या $9 \times 9 \times 9 = 729$ है चूकिं हम a, b,c को इस {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} समुच्चय से ले सकते है।

30. Find the number of all integer-sided isosceles obtuse-angled triangles with perimeter 2008.

परिमाप 2008 के सभी पूर्णांक भुजाओं के समद्विबाहु अधिक कोण त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. 86

Sol माना भुजाएं x, x, y है जहाँ x, y धनात्मक पूर्णांक है। चूंकि अधिक कोण त्रिभुज के लिए $y > x$ होगा यहाँ पर $2x + y = 2008$ होगा जिसके लिए y सम होगा परन्तु त्रिभुज असमिका से $y < x + x$ अतः $y < 1004$ अतः सम्भावित त्रिक $(y, x, x) = (1002, 503, 503), (1000, 504, 504), (998, 505, 505)$ होंगें और इसीप्रकार। व्यापक रूप $(y, x, x) = (1004 - 2k, 502 + k)$, जहाँ $k = 1, 2, 3, ..., 501$ है परन्तु प्रतिबन्ध में त्रिभुज के अधिक कोण होने के लिए $(1004 - 2k)^2 > 2(502 + k)^2$ यह सरल होता है $502^2 + k^2 - 6(502)k > 0$ द्विघात असमिका को k के लिए हल करने के लिए $k < 502(3 - 2\sqrt{2})$, या $k > 502(3 + 2\sqrt{2})$, जो लगभग 86.1432 अतः $k \le 86$ इसप्रकार 86 त्रिभुज प्राप्त होंगें $(y, x, x) = (1004 - 2k, 502 + k)$, $k = 1, 2, 3,.., 86$ इस सारणी में अन्तिम अधिक कोण (832, 588, 588). (यह आसानी से जाँच किया जा सकता है कि $832^2 - 588^2 - 588^2 = 736 > 0$, जहाँ $830^2 - 589^2 - 589^2 = -492 < 0$.)

31. Let ABC be a triangle. An interior point P of ABC is said to be good if we can find exactly 27 rays emanating from P intersecting the sides of the triangle ABC such that the triangle is divided by these rays into 27 smaller triangles of equal area. Determine the number of good points for a given triangle ABC. माना कि ABC एक त्रिभुज है। इसके अंतस्थ बिन्दु P को उत्तम (good) मानते हैं जब हम इस बिन्दु P से निर्गत हुई ठीक 27 किरणें ज्ञात कर सकते हैं जो कि त्रिभुज ABC की भुजाओं को प्रतिच्छेदित करती है और त्रिभुज को 27 समक्षेत्रफल वाले छोटे त्रिभुजों में विभक्त करती है। किसी दिए गए त्रिभुज ABC के लिए ऐसे उत्तम बिन्दुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. $^{26}C_2$

Sol. Three of these rays will be passing through vertices.

Remaining 24 rays are to distributed in three groups such that they from equal triangles.

Let x, y, z be number of rays on three sides.

$\Rightarrow x + y + z = 24$

Number of such points is equal to number of non-negative integral solutions

$\Rightarrow \ ^{24+2}C_{24} = {}^{26}C_2$

Hindi. इनमें से तीन किरणें शीर्षो से गुजरेगी। शेष 24 किरणों को तीन समूहों में इस प्रकार बाँटते है कि उनसे समान त्रिभुज बने।

माना x, y, z तीन भुजाओं पर किरणों की संख्या है।

$\Rightarrow x + y + z = 24$

ऐसे बिन्दुओं की संख्या उपरोक्त समीकरण के अऋणात्मक पूर्णांक हलों की संख्या के बराबर होगी।

$\Rightarrow \ ^{24+2}C_{24} = {}^{26}C_2$

32. Let $\sigma = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ be a permutation of (1, 2, 3, ..., n). A pair (a_i, a_j) is said to correspond to an inversion of σ, if $i < j$ but $a_i > a_j$. (Example : In the permutation (2, 4, 5, 3, 1), there are 6 inversions corresponding to the pairs (2, 1), (4, 3), (4, 1), (5, 3) (5, 1), (3, 1) .) How many permutations of (1, 2, 3, ... n), $(n \geq 3)$, have exactly **two** inversions.?

मानाकि (1, 2, 3, ..., n) के क्रमचय $\sigma = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ है। एक युग्म (a_i, a_j) को σ का एक व्युक्रम के लिए संगत कहा जाता है यदि $i < j$ परन्तु $a_i > a_j$ (उदाहरण के लिए क्रमचय (2, 4, 5, 3, 1) में 6 व्युत्क्रम संगत परिणाम के युग्म (2, 1), (4, 3), (4, 1), (5, 3) (5, 1), (3, 1) है।) (1, 2, 3, ... n), $(n \geq 3)$ के कितने क्रमचयों के ठीक दो व्युत्क्रम है?

Ans. $\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$

Sol. In a permutation of (1, 2, 3, ..., n), two inversions can occur in only one of the following two ways :

(A) Two disjoint consecutive pairs are interchanged :

$(1, 2, 3, j, j+1, j+2 \dots k-1, k, k+1, k+2, ..., n)$

$\rightarrow \quad (1, 2, \dots j-1, j+1, j, j+2, .., k-1\ k+1, k, k+2, ..., n)$.

(B) Each block of three consecutive integers can be permuted in any of the following 2 ways;

$(1, 2, 3, \dots k, k+1, k+2, ..., n) \rightarrow (1, 2, ..., k+2, k, k+1, ..., n)$;

$(1, 2, 3, \dots k, k+1, k+2, ..., n) \rightarrow (1, 2, ..., k+1, k+2, k, ..., n)$;

Consider case (A). For j = 1, there are n – 3 possible values of k; for j = 2, there are n – 4 possibilities for k and so on. Thus the number of permutations with two inversions of this type is

$$1 + 2 + \dots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

In case (B), we see that there are n – 2 permutations of each type, since k can take values from 1 to n – 2. Hence we get 2(n – 2) permutations of this type. Finally, the number of permutations with **two** inversions is

$$\frac{(n-3)(n-2)}{2} + 2(n-2) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Hindi. (1, 2, 3, ..., n) के क्रमचय में दो व्युत्क्रम केवल एक में हो सकते है जो निम्न दो तरीकों से है।

(A) दो विसंघित क्रमागत युग्मों को आपस में बदला जाता है।

$(1, 2, 3, j, j+1, j+2 \dots k-1, k, k+1, k+2, ..., n)$

$\rightarrow \quad (1, 2, \dots j-1, j+1, j, j+2, .., k-1\ k+1, k, k+2, ..., n)$.

(B) तीन क्रमागत पूर्णाकों के प्रत्येक समूह को निम्न दो तरीकों से क्रमित किया जा सकता है।

$(1, 2, 3, \dots k, k+1, k+2, ..., n) \rightarrow (1, 2, ..., k+2, k, k+1, ..., n)$;

$(1, 2, 3, \dots k, k+1, k+2, ..., n) \rightarrow (1, 2, ..., k+1, k+2, k, ..., n)$;

मानाकि स्थिति (A). j = 1 के लिए यहाँ k के n – 3 सम्भावित मान है।

j = 2 के लिए यहाँ k के n – 4 सम्भावित मान है और इसीप्रकार। अतः इसप्रकार के दो व्युत्क्रम के क्रमचयों की संख्या

$$1 + 2 + \dots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

स्थिति (B) में इसप्रकार के n – 2 क्रमचय है क्योंकि k, 1 से n – 2 तक के मान ले सकता है। अतः इसप्रकार के क्रमचय 2(n – 2) अन्ततः दो व्युत्क्रमों के क्रमचयों की संख्या

$$\frac{(n-3)(n-2)}{2} + 2(n-2) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

HLP Answers

.