कक्षा - 12 (Maths)

सांत्यता एवं अवकलनीयता

अध्याय - 05

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. यदि $f(x)=\begin{cases} x+k & , x<3 \\ 4 & , x=3 \\ 3x-5 & , x>3 \end{cases}$ $x=3$ पर संतत हो, तो k का मान होगा–

(1) 4 (2) 3 (3) 2 **(4)** 1

Ans. फलन f(x), x = 3 पर संतत है अत:

$$f(3)=\lim_{x\to 3-0} f(x)$$

$$\Rightarrow 4=\lim_{h\to 0}[(3-h)+k]$$

$$\Rightarrow 4=3+k \Rightarrow k=1$$

2. फलन f(x) = [x] असंतत है–

(1) प्रत्येक वास्तविक संख्या पर (2) प्रत्येक परिमेय संख्या पर

(3) प्रत्येक पूर्णांक पर (4) प्रत्येक अपरिमेय संख्या पर

3. यदि $y=\cos(\sqrt{x})$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–

(1) $-\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ (2) $-\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ (3) $\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ (4) $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

4. यदि $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–

(1) $\frac{2}{1+x^2}$ **(2)** $-\frac{2}{1+x^2}$ (3) $\frac{1}{1+x^2}$ (4) $-\frac{1}{1+x^2}$

5. यदि $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ है तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–

(1) $\frac{b}{a}\cot\theta$ (2) $\frac{-b}{a}\tan\theta$ (3) $+\frac{b}{a}\tan\theta$ **(4)** $-\frac{b}{a}\cot\theta$

6. यदि $y = \log x$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा–

(1) $\frac{1}{x^2}$ (2) $-\frac{1}{x}$ **(3)** $-\frac{1}{x^2}$ (4) $-\frac{1}{x^3}$

रिक्त स्थानों की पूर्ति करो

7. फलन $f(x) = |(x-3)|$, $x \in R$, x के मान ..... पर अवकलनीय नहीं है।

Ans. $x = 3$ पर $f(x) = |(x-3)|$ अवकलनीय फलन नहीं होता है।

8. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]$ = ... हैं।

Ans. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \times e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$

9. $\frac{d}{da}(a^x)$ = ... हैं।

Ans. $\frac{d}{da}(a^x) = xa^{x-1}$

10. यदि $x = 4t$, $y = \frac{4}{t}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ = ... हैं।

Ans. $\frac{dx}{dt} = 4, \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$ तब $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4}{t^2}}{4} = -\frac{1}{t^2}$

11. यदि $y = \tan^{-1}x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ... हैं।

Ans. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \times 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

12. $2x + 3y = \sin x$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. $2x + 3y = \sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x$

या $3\frac{dy}{dx} = \cos x - 2$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}$

13. x^x का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. माना कि $y = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगुणक लेने पर

$\log y = \log x^x$

या $\log y = x \log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \log x.1$

या $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \log x$

या $\frac{dy}{dx} = y(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$

14. $e^{\sec^2 x}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{d}{dx}(e^{\sec^2 x}) = e^{\sec^2 x}\frac{d}{dx}(\sec^2 x)$

$= e^{\sec^2 x}.2\sec x\ \frac{d}{dx}(\sec x)$

$= 2\sec^2 x \tan x.e^{\sec^2 x}$

15. $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

Ans. माना कि $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$y = \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)$

या $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)$

या $y = \tan^{-1}\left[\tan\frac{x}{2}\right)$

या $y = \frac{x}{2}$ x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

16. फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , \text{ यदि } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ यदि } x = 0 \end{cases}$

तब $x = 0$ पर $f(x)$ के सांत्यता का परीक्षण कीजिए।

Ans. फलन $f(x)$ को मापांक रहित रूप में लिखने पर

$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x} = -1 & , \text{ यदि } x < 0 \\ 0 & , \text{ यदि } x = 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & , \text{ यदि } x > 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर फलन $f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$x = 0$ पर बाँयी सीमा : $x < 0$ पर फलन $f(x) = -1$

$f(0-0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$

$= \lim_{h \to 0} (-1) = -1$

$x = 0$ पर दाँयी सीमा : $x > 0$ पर फलन $f(x) = 1$

$f(0+0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} (1) = 1$

$\therefore\ f(0) \neq f(0-0) \neq f(0+0)$

अत: $f(x)$, $x = 0$ पर असंतत है।

17. a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5 & , \text{ यदि } x \le 2 \\ ax + b & , \text{ यदि } 2 < x < 10 \\ 21 & , \text{ यदि } x \ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन हो।

Ans. दिया है फलन $f(x)$ संतत है इसलिए $x = 2$ व $x = 10$ पर भी संतत है।

$x = 2$ पर बाँयी सीमा = $x = 2$ पर दाँयी सीमा

$\lim_{h \to 0} f(2-h) = \lim_{h \to 0} f(2+h)$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} (5) = \lim_{h \to 0} [a(2+h) + b]$

$\Rightarrow\ 5 = a(2+0) + b$ या $2a + b = 5$ .... (1)

$x = 10$ पर बाँयी सीमा = $x = 10$ पर दाँयी सीमा

$\lim_{h \to 0} f(10-h) = \lim_{h \to 0} f(10+h)$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} a(10-h) + b = \lim_{h \to 0} 21$

$\Rightarrow\ a(10-0) + b = 21$

$\Rightarrow\ 10a + b = 21$ .... (2)

समीकरण (2) से समीकरण (1) को घटाने पर $8a = 16$ या $a = 2$

$a = 2$ समीकरण (1) में रखने पर $2(2) + b = 5$ या $b = 5 - 4 = 1$

अत: $a = 2$, $b = 1$

18. यदि $\sin^2 y + \cos xy = k$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया फलन $\sin^2 y + \cos xy = k$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2 \sin y \frac{d}{dx}(\sin y) - \sin xy \frac{d}{dx}(xy) = 0$$

या $2 \sin y \cos y \frac{dy}{dx} - \sin xy \left[x.\frac{dy}{dx} + y.1 \right] = 0$

या $\sin 2y \frac{dy}{dx} - x \sin xy \frac{dy}{dx} - y \sin xy = 0$

या $\frac{dy}{dx}\left[\sin 2y - x\sin xy\right] = y\sin xy$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin xy}{\sin 2y - x\sin xy}$

19. यदि $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$; $y = a\sin t$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{dx}{dt} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2}\right)$

$= a\left(-\sin t + \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \times \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)$

$= a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right)$

$= \left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)$

$\frac{dx}{dt} = a\left(\frac{-\sin^2 t + 1}{\sin t}\right) = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}$

तथा $\frac{dy}{dt} = a\cos t$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t \times \sin t}{a\cos^2 t} = \tan t$

20. यदि $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ है, तो दर्शाइए कि $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

Ans. दिया है $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ ..... (1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$y_1 = \frac{dy}{dx} = -3\sin(\log x).\frac{1}{x} + 4\cos(\log x).\frac{1}{x}$

या $xy_1 = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$xy_2 + y_1.1 = -\frac{3}{x}\cos(\log x) - \frac{4}{x}\sin(\log x)$

या $x^2y_2 + xy_1 = -\{3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)\}$

समीकरण (1) से

$x^2y_2 + xy_1 = -y$

या $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

21. फलन $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

Ans. मानाकि $y = x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

पुनः मानाकि $x^{\sin x} = u$ तथा $(\sin x)^{\cos x} = v$

तब $y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots. \quad (1)$$

$u = x^{\sin x}$

लघुगुणक लेने पर

$\log u = \log x^{\sin x}$

या $\log u = \sin x \cdot \log x$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \sin x.\frac{1}{x} + \log x.\cos x$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log x\right]$$

$$\frac{du}{dx} = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log x\right)$$

$v = (\sin x)^{\cos x}$

लघुगुणक लेने पर

$\log v = \log(\sin x)^{\cos x}$

$\log v = \cos x \log(\sin x)$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \cos x.\frac{\cos x}{\sin x} - \sin x \log(\sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x.\log(\sin x)\right]$$

$$\frac{dv}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log(\sin x)\right]$$

समीकरण (1) से

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log x\right] + (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right]$$

22. यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{(1+y)} + y\sqrt{(1+x)} = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

Ans. दिया फलन $x\sqrt{(1+y)} + y\sqrt{(1+x)} = 0 \quad \ldots.. (1)$

या $x\sqrt{(1+y)} = -y\sqrt{(1+x)}$

वर्ग करने पर

$x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$x^2 + x^2y = y^2 + xy^2$

या $x^2 - y^2 + x^2y - xy^2 = 0$

या $(x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0$

या $(x-y)(x+y+xy) = 0$

$\therefore$ $x - y = 0$ अर्थात् $x = y$ समीकरण (1) को संतुष्ट नहीं करता है इसलिए $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0$ तो

$x + y + xy = 0$

या $y(x+1) = -x$

या $y = -\frac{x}{x+1}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(-x) - (-x)\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(-1) + x(1)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

अतः $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

23. फलन $y = x^2 + 2$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए जब $a = -2$ तथा $b = 2$ हैं।

Ans. फलन $f(x) = y = x^2 + 2$, अंतराल $[-2, 2]$

फलन x में बहुपदीय फलन है ऐसे फलन सर्वत्र संतत व अवकलनीय होते हैं इसलिए

(i) सवृत अंतराल $[-2, 2]$ में फलन संतत है तथा

(ii) विवृत अंतराल $(-2, 2)$ में अवकलनीय फलन है

(iii) $f(-2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$, $f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

साथ ही $f(-2) = f(2) = 6$ हैं तो रोले प्रमेय सत्यापित प्रमेयानुसार एक बिन्दु $c \in (-2,2)$ का अस्तित्व होगा, जहां $f'(c) = 0$ हैं चूंकि $f'(x) = 2x$ है इसलिए $x = c$ पर $f'(c) = 0$ और $c = 0 \in (-2,2)$