फाउंडेशन मॉड्यूल

गणित

कक्षाः—12वीं के नवीन विद्यार्थियों के लिये

वर्षः— 2021—22

राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा अभियान

लोक शिक्षण संचालनालय, मध्यप्रदेश

ब्रिज कोर्स मॉडयूल
कक्षा–12वीं
विषय – गणित

किसी भी कक्षा में किसी विषयवस्तु को समझने के लिए उससे पूर्व की कक्षाओं की विषयवस्तु का पूर्ण ज्ञान आवश्यक होता है। कक्षा 12वीं के गणित की विषयवस्तु को समझने के लिए कुछ विशेष तथ्यों का पूर्ण ज्ञान आवश्यक है। इसके लिए कक्षा 11वीं से कुछ महत्वपूर्ण अध्यायों से अध्ययन सामग्री संक्षिप्त में पुनरावृत्ति हेतु प्रस्तुत है जिसकी विषय–सूची इस प्रकार हैः–

कक्षा 11 के अध्याय	कक्षा 12 से संबंधित अध्याय
• समुच्चय	अध्याय–1 संबंध एवं फलन
• संबंध एवं फलन	अध्याय–1 संबंध एवं फलन
• त्रिकोणमितीय फलन	अध्याय–2 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन
• रैखिक असमिकाएँ	अध्याय–12 रैखिक प्रोग्रामन
• क्रमचय और संचय	अध्याय–13 प्रायिकता
• द्विपद प्रमेय	अध्याय–13 प्रायिकता
• शंकु परिच्छेद	अध्याय–6 अवकलज के अनुप्रयोग
• त्रिविमीय ज्यामिती का परिचय	अध्याय–11 त्रिविमीय ज्यामिति
• सीमा और अवकलन	अध्याय–5 सांतत्य एवं अवकलनीयता अध्याय–6 अवकलज के अनुप्रयोग अध्याय–7 समाकलन अध्याय–8 समाकलनो के अनुप्रयोग अध्याय–9 अवकल समीकरण
• प्रायिकता	अध्याय–13 प्रायिकता

उपरोक्त के अध्ययन से छात्रों को निश्चित रूप से नवीन विषयवस्तु को समझने में सहायता मिलेगी।

——00——

समुच्चय

भूमिका

समुच्चय सिद्धान्त आज गणित का सर्वाधिक प्रयुक्त आधारभूत तंत्र है। इस परिकल्पना का प्रयोग गणित की प्रायः सभी शाखाओं में होता है। संबंध एवं फलन, ज्यामिति, अनुक्रम, प्रायिकता आदि के अध्ययन में समुच्चय के ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है।

समुच्चय और उनका निरूपण

- N : प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
  Z : पूर्णांकों का समुच्चय
  Q : परिमेय संख्याओं का समुच्चय
  T : अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय
  Z+ : धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय
  Q+ : धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय
  R+ : धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
- वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं। समुच्चयों को प्रायः अंग्रेजी के बड़े अक्षरों A, B, C, X, Y, Z इत्यादि से निरूपित करते हैं। समुच्चयों के अवयवों को निरूपित करने के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों a, b, c, x, y, z इत्यादि का उपयोग करते हैं।

  यदि a, समुच्चय A का एक अवयव है, तो हम $a \in A$ लिखते हैं और यदि a समुच्चय A का अवयव नहीं है तो हम $a \notin A$ लिखते हैं।
- किसी समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं :–
  (i) रोस्टर या सारणीबद्ध रूप और
  (ii) समुच्चय निर्माण रूप।

  रोस्टर रूप में समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है। उदाहरण के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय $\{a, e, i, o, u\}$ है।

  समुच्चय निर्माण रूप में किसी समुच्चय के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म होता है जो समुच्चय से बाहर के किसी अवयव में नहीं होता है। उदाहरण के लिए समुच्चय $A = \{a, e, i, o, u\}$ के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म है कि इनमें से प्रत्येक अवयव अँग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है और इस गुणधर्म वाला कोई अन्य अक्षर नहीं है। इस समुच्चय को हम लिखते हैं कि

  $A = \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है $\}$

रिक्त समुच्चय

एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहलाता है, रिक्त समुच्चय को प्रतीक ϕ अथवा { } से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण के लिए मान लीजिए कि $A = \{x : 1 < x < 2, x$ एक प्राकृत संख्या है $\}$ यहाँ A रिक्त समुच्चय है क्योंकि 1 और 2 के मध्य कोई प्राकृत संख्या नहीं होती है अर्थात् A = { } = ϕ.

परिमित और अपरिमित समुच्चय

किसी समुच्चय S के अवयवों की संख्या से हमारा अभिप्राय समुच्चय की भिन्न अवयवों की संख्या से है और इसे हम प्रतीक n(S) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि n(S) एक प्राकृत संख्या है तो S एक अरिक्त परिमित समुच्चय होता है। एक समुच्चय जो रिक्त है अथवा जिसके अवयवों की संख्या निश्चित होती है परिमित समुच्चय कहलाता है, अन्यथा समुच्चय अपरिमित समुच्चय कहलाता है।

उदाहरण के लिए समुच्चय

$A = \{a, e, i, o, u\}$ एक परिमित समुच्चय है और यहाँ n(A) = 5 . किसी रेखा पर स्थित सभी बिन्दुओं का समुच्चय G अपरिमित है और यहाँ $n(G) = \infty$.

समान समुच्चय

दो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं, यदि उनमें तथ्यतः समान अवयव हों और हम लिखते हैं A = B, अन्यथा समुच्चय असमान कहलाते हैं और हम लिखते हैं $A \neq B$ उदाहरण के लिए मान लीजिए कि A = {1, 2, 3, 4} और B = {3, 1, 4, 2} तो A = B.

उपसमुच्चय

यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी एक अवयव है तो A, B का उपसमुच्चय कहलाता है। B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है। दूसरे शब्दों में $A \subset B$ यदि जब कभी $a \in A$ तो $a \in B$.

उदाहरण के लिए A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4} का एक उपसमुच्चय है, यहाँ B, A का उपसमुच्चय है।

घात समुच्चय

समुच्चय A के उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय है। इसे P(A) से निरूपित करते हैं। P(A) का प्रत्येक अवयव एक समुच्चय होता है। यदि A = {1, 2} तो $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

समुच्चयों का सम्मिलन

दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें वे सभी अवयव हैं, जो या तो A में हैं या B में हैं। (उन अवयवों को सम्मिलित करते हुए जो दोनों में हैं) दो समुच्चयों A और B के सम्मिलन समुच्चय को हम लिखते हैं कि $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$.

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ

दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ समुच्चय वह समुच्चय है जिसमें वे सभी अवयव हैं, जो A और B दोनों में हैं। दो समुच्चयों A और B के सर्वनिष्ठ समुच्चय को हम लिखते हैं कि $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$.

——00——

भूमिका (Introduction)

दैनिक जीवन में हम अनेक ऐसे पैटर्न पाते हैं जो संबंधों को दर्शाते हैं, जैसे माँ और पुत्र, भाई और बहन इत्यादि। गणित में भी हमें कई संबंध मिलते हैं जैसे संख्या X, संख्या Y से बड़ी है, रेखा m, रेखा n के लंबवत् है इत्यादि। इन समस्त संबंधों में ऐसे युग्म शामिल होते हैं जिनके घटक एक निश्चित क्रम में होते हैं। इस अध्याय में हम यह अध्ययन करेंगे कि दो समुच्चयों के अवयवों से कितने युग्म बनाये जा सकते हैं तथा इन युग्मों के बीच संबंधों को सुस्पष्ट करेंगे। इसके बाद हम यह भी जानेंगे कि कुछ विशेष संबंध फलन भी होते हैं। फलन की परिकल्पना एक अवयव से दूसरे अवयव के बीच संगतता के विचार को प्रकट करती है।

समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

- दो अरिक्त समुच्चयों A और B का कार्तीय गुणन $A \times B$ द्वारा निरूपित किया जाता है तथा इस प्रकार से परिभाषित होता है :
  $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$
  यहाँ (a, b) एक क्रमित युग्म कहलाता है।
- यदि समुच्चयों A या B में से कोई भी एक समुच्चय रिक्त समुच्चय होता है तो $A \times B = \phi$
- प्रश्न : यदि X = {1, 2} तथा Y = {4, 5, 6} तो $X \times Y$ क्या होगा?
  हल : X = {1, 2}
  Y = {4, 5, 6}
  तो
  $X \times Y = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6)\}$
- दो क्रमित युग्म समान होते हैं यदि और केवल यदि उनके संगत घटक समान हों।
- यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$ तो $n(A \times B) = pq.$
- A या B में से कोई अपरिमित समुच्चय है तो $A \times B$ अपरिमित समुच्चय होता है।
- $A \times A \times A = \{(a,b,c,): a,b,c \in A\}$ यहाँ (a, b, c,) एक क्रमित–त्रिक कहलाता है।

संबंध (Relation)

• किसी अरिक्त समुच्च्य A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध (R), कार्तीय गुणन $A \times B$ का उपसमुच्चय होता है। इस उपसमुच्चय के प्रत्येक क्रमित युग्म के प्रथम धटक एवं द्वितीय घटक के मध्य एक संबंध स्थापित होता है। द्वितीय घटक को प्रथम घटक का प्रतिबिंब (Image) घटक कहते हैं। $R: A \longrightarrow B$

$R: A \sqsubseteq B$

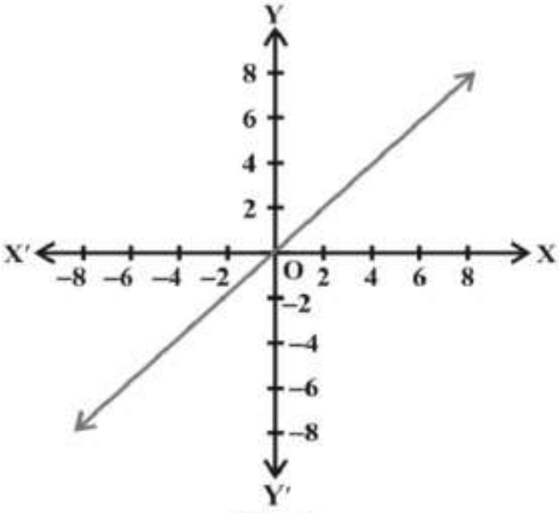
- किसी अरिक्त समुच्च्य A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R के सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों के समुच्च्य को संबंध R का प्रान्त (Domain) कहते हैं।
- किसी अरिक्त समुच्च्य A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R के सभी क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों के समुच्च्य को संबंध R का परिसर (Range) कहते हैं।

- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में यदि कोई संबंध R परिभाषित है तो समुच्चय B, संबंध R का सह–प्रांत (Co-domain) कहलाता है।
- किसी संबंध R का परिसर (Range) उस संबध के सह–प्रांत (Co-domain) का उपसमुच्चय (subset) होता है, अर्थात् परिसर (Range) $\sqsubseteq$ सह–प्रांत (Co-domain) ।
- किसी संबंध का बीजीय निरूपण (algebraic representation) या तो रोस्टर विधि या समुच्चय निर्माण विधि (Set builder form) द्वारा किया जा सकता है।
- तीर आरेख (Arrow diagram) किसी संबंध का दृष्टि चित्रण (visual representation) होता है।
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंधों की कुल संख्या, कार्तीय गुणन $A \times B$ के उपसमुच्चयों की कुल संख्या के बराबर होती है।
- यदि $n(A) = p$ तथा $n\,(B) = q$ तो $n\,(AXB) = pq$ तथा A से B में संबंधों की कुल संख्या $= 2^{pq}$ ।
- यदि कोई संबंध A से A पर परिभाषित है तो इसे हम ' A पर संबंध' भी कहते हैं।

फलन (Function)

- किसी अरिक्त समुच्च्य A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध f एक फलन कहलाता है यदि A के प्रत्येक अवयव (पूर्व प्रतिबिंब) का B में एक और केवल एक अवयव (प्रतिबिंब) हो।
  $f: A \longrightarrow B.$
- फलन f के सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों के समुच्चय को फलन f का प्रांत (Domain) कहते हैं।
- फलन f के सभी क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों के समुच्चय को फलन f का परिसर (Range) कहते हैं।
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में यदि कोई फलन f परिभाषित है तो समुच्चय B, फलन f का सह प्रान्त (Co-domain) कहलाता है।
- किसी फलन f का बीजीय निरूपण (algebraic representation) या तो रोस्टर विधि या समुच्चय निर्माण विधि (Set builder form) द्वारा किया जाता है।
- फलन f का परिसर यदि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो, तो फलन f वास्तविक मान फलन कहलाता है।

- **तत्समक फलन (Identity Funcion) :**
  एक वास्तविक मान फलन $f: R \longrightarrow R$, तत्समक फलन Identity Funciton) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = x$
  $Domain\ (f) = R$
  $Range\ (f) = R$



$f(x) = x$

- **अचर फलन (Constant Funcion) :**

  एक वास्तविक मान फलन $f: R \longrightarrow R$, अचर फलन (Constant Funcion) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = c$ जहाँ c एक अचर है।

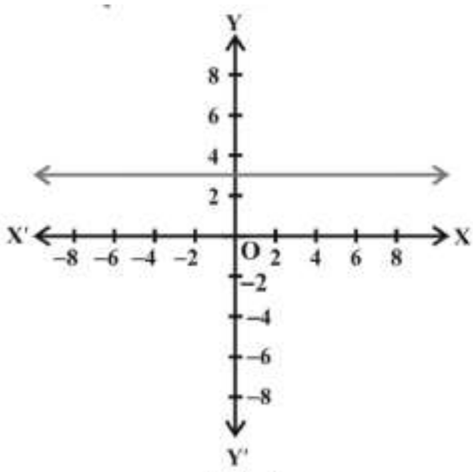
  $Domain\ (f) = R$

  $Range\ (f) = R$

  उदाहरण : प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = 3$ जहाँ एक अचर है।

  $Domain\ (f) = R$

  $Range\ (f) = 3$



$f(x) = 3$

- **बहुपद फलन (Polynomial Function)**

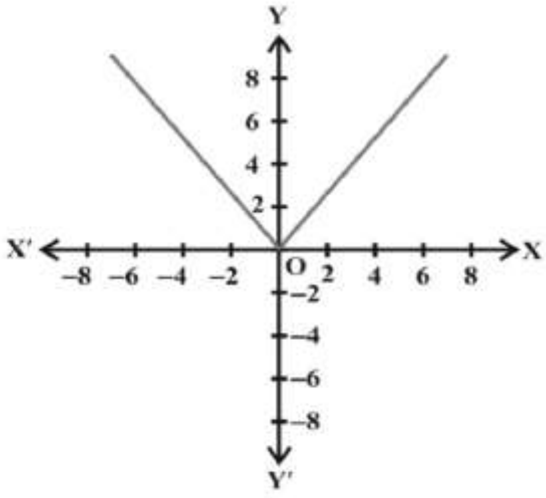
  एक वास्तविक मान फलन $f: R \to R$, एक बहुपदीय फलन (Polynomial Function) कहलाता है।

  यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$ जहाँ n ऋणेतर पूर्णांक है तथा $a_0\, a_1\, a_2 .....a_n \in R$

  Domain $(f) = R$.

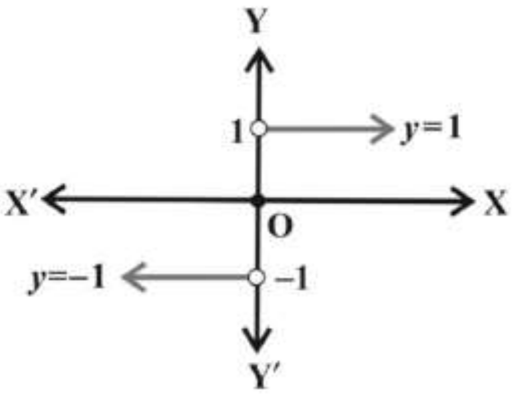
- **परिमेय फलन (Polynomial Function)**
  यदि $f(x)$ तथा $g(x) \neq 0$ एक प्रांत में x के बहुपदीय फलन (Polynomial Function) है तो फलन $\frac{f(x)}{g(x)}$ परिमेय फलन कहलाता है।

- **मापांक फलन (Modulus Function)**
  एक वास्तविक मान फलन $f : R \to R,$ मापांक फलन (Modulus Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R,$ के लिये $y = f(x) = |x|.$
  Domain $(f) = R$
  Range $(f) = [0, \infty$



$f(x) = |x|$

- **चिन्ह फलन (Signum Function)**
  एक वास्तविक मान फलन $f : R \to R,$ मापांक फलन (Modulus Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R,$ के लिये $\begin{cases} 1, if\ x > 0 \\ 0, if\ x = 0 \\ 1, if\ x < 0 \end{cases}$
  Domain $(f) = R$
  Range $(f) = \{-1, 0, 1\}.$

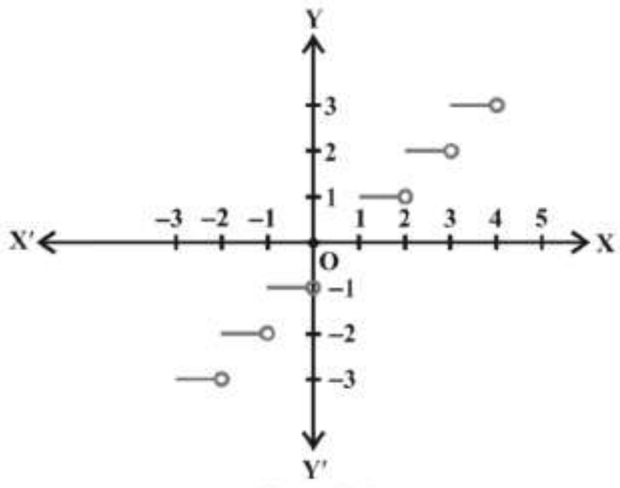


- **महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest integer Function)**

  एक वास्तविक मान फलन $f: R \rightarrow R,$ महत्वपूर्ण पूर्णांक फलन (Greatest integer Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R,$ के लिये $y = f(x) = [x]$

  Domain $(f) = R$

  Range $(f) = I =$ set of Integers



$f(x) = [x]$

वास्तविक फलनों का बीजगणित (Algebra of real function):

- दो वास्तविक फलनों का योग (Addition):

  दो वास्तविक फलनों $f: X \rightarrow R$ तथा $g: X \rightarrow R,$ जहां $X \subset R,$ के लिए $(f+g): X \rightarrow R$ को प्रत्येक $x \epsilon R,$ के लिये $(f+x)(x) = f(x) + g(x)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

- दो वास्तविक फलनों का व्यवकलन (Subtraction):

  दो वास्तविक फलनों $f: X \rightarrow R$ तथा $g: X \rightarrow R,$ जहां $X \subset R,$ के लिए $(f-g): X \rightarrow R$ को प्रत्येक $x \epsilon R,$ के लिये $(f-x)(x) = f(x) - g(x)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

- अदिश का वास्तविक फलन से गुना (Multiplication):

  वास्तविक फलन $f: X \rightarrow R$ का किसी अदिश α से गुणन को प्रत्येक $x \epsilon R$ के लिये $(\alpha f)(x) = f(\alpha x)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

- दो वास्तविक फलनो का गुणन (Multiplication):

  दो वास्तविक फलनों $f: X \rightarrow R$ तथा $g: X \rightarrow R,$ जहां $X \subset R,$ के लिए $(fg): X \rightarrow R$ को प्रत्येक $x \epsilon R,$ के लिये $(fg)(x) = f(x).g(x)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

——00——

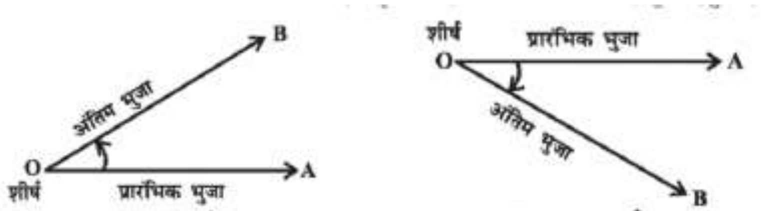
त्रिकोणमितीय फलन

भूमिका

Trigonometry शब्द की व्युत्पति ग्रीक शब्दो Tri, gone और metron से हुई है जिनका संयुक्त रूप से अर्थ त्रिभुज की भुजाओं को मापना होता है। पिछली कक्षाओं में हम समकोणीय त्रिभुजों की भुजाओं के अनुपातों को न्यूनकोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के रूप में अध्ययन कर चुके हैं। हम त्रिकोणमितीय अनुपातों और सर्वसमिकाओं का अनुप्रयोंग ऊँचाई और दूरी के प्रश्नों में भी कर चुके हैं। अब हम इस अध्याय में त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंधो का त्रिकोणमितीय फलनों के रूप में व्यापकीकरण करेंगे तथा उनके गुणधर्मो का अध्ययन करेंगे।

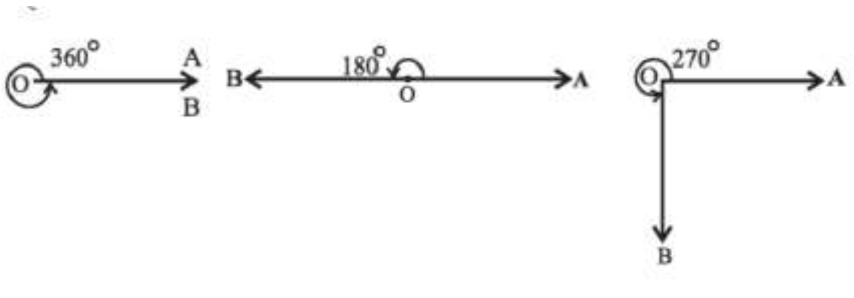
कोण

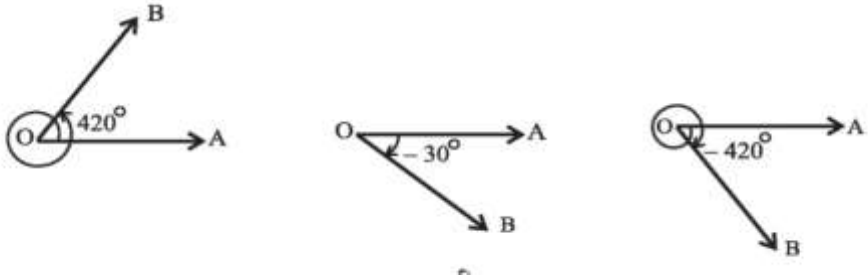
- एक कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्रारम्भिक बिन्दु के परितः घूमने पर बनता है।



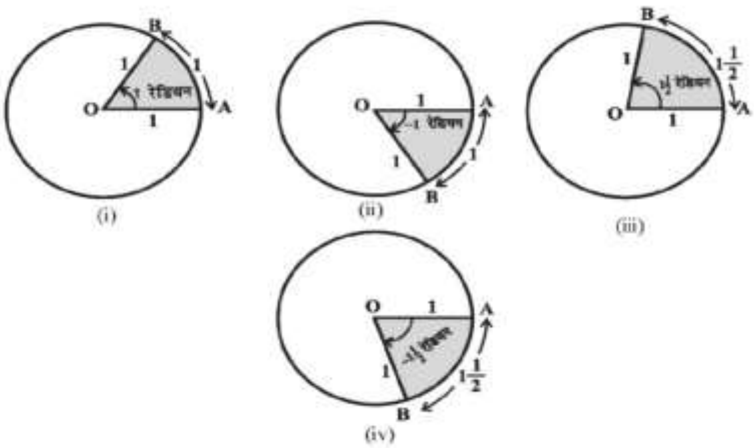
(i) धनात्मक कोण (ii) ऋणात्मक कोण

- डिग्री मापः एक पूर्ण परिक्रमण का 360वाँ भाग एक डिग्री कहलाता है।
  अर्थात एक पूर्ण परिक्रमण $= 360°$
  एक डिग्री का साठवाँ भाग एक मिनट कहलाता है। इसे हम $1^0 = 60'$ से लिखते हैं।
  एक मिनट का साठवाँ भाग एक सेकंड कहलाता है। इसे हम $1' = 60''$ से लिखते हैं।
  कुछ कोणों को इन आकृतियों में दिखाया गया है।





- रेडियन मापः इकाई वृत्त के केन्द्र पर एक इकाई लंबाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन कहते है। कुछ कोणो को उनकी रेडियन माप के साथ इन आकृतियों में दिखाया गया है।



- डिग्री तथा रेडियन के मध्य संबंधः वृत, केन्द्र पर एक कोण बनाता है जिसकी माप 2π रेडियन है तथा यह $360°$ माप है। अर्थात 2π रेडियन $= 360$ डिग्री या π रेडियन $=$ 180 डिग्री।

स्मरणीय बिन्दु

- एक पूर्ण परिक्रमण का 360वाँ भाग एक डिग्री कहलाता है।
- एक डिग्री का साठवाँ भाग एक मिनट कहलाता है।
- एक मिनट का साठवाँ भाग एक सेकंड कहलाता है।
- एक पूर्ण परिक्रमण $= 360°$
- $1° = 60'$
- $1' = 60''$
- इकाई वृत्त के केन्द्र पर एक इकाई लंबाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन कहते है।

  इकाई त्रिज्या के वृत्त की परिधि $= 2\pi$
- एक पूर्ण परिक्रमण $= 2\pi$ रेडियन
- π रेडियन $= 180$ डिग्री
- $2\pi^C = 360°$
- π रेडियन $= 180$ डिग्री
- रेडियन माप $= \frac{180}{\pi}$ डिग्री माप
- डिग्री माप $= \frac{\pi}{180}$ रेडियन माप
- यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, चाप की लंबाई l तथा केन्द्र पर अंकित कोण θ रेडियन है, तो $\theta = \frac{l}{r}$.

$\theta \Rightarrow$ $t.r.$ $\Downarrow$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$Sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$Cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$Cosec\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$Cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- $sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \Rightarrow 1 - sin^2\theta = cos^2\theta \Rightarrow 1 - cos^2\theta = sin^2\theta$

  $1 + tan^2\theta = sec^2\theta \Rightarrow sec^2\theta - 1 = tan^2\theta \Rightarrow sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

  $1 + cot^2\theta = cosec^2\theta \Rightarrow cosec^2\theta - 1 = cot^2\theta \Rightarrow cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

- $in\theta.cosec\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{sin\theta} = cosec\theta \Rightarrow \frac{1}{cosec\theta} = sin\theta$

  $cos\theta.sec\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{cos\theta} = sec\theta \Rightarrow \frac{1}{sec\theta} = cos\theta$

  $tan\theta.cot\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{tan\theta} = cot\theta \Rightarrow \frac{1}{cot\theta} = tan\theta$

- $\sin(90 - \theta) = cos\theta$
  $\cos(90 - \theta) = sin\theta$
  $\tan(90 - \theta) = cot\theta$
  $\text{cosec}(90 - \theta) = sec\theta$
  $\sec(90 - \theta) = cosec\theta$
  $\cot(90 - \theta) = tan\theta$
- $\sin(90 + \theta) = cos\theta$
  $\cos(90 + \theta) = -sin\theta$

$\tan(90+\theta) = -cot\theta$
$\text{cosec}(90+\theta) = sec\theta$
$\sec(90+\theta) = -cosec\theta$
$\cot(90+\theta) = -tan\theta$

- $\sin(180-\theta) = sin\theta$
  $\cos(180-\theta) = -cos\theta$
  $\tan(180-\theta) = -tan\theta$
  $\text{cosec}(180-\theta) = cosec\theta$
  $\sec(180-\theta) = -sec\theta$
  $\cot(180-\theta) = -cot\theta$
- $\sin(180+\theta) = -sin\theta$
  $\cos(180+\theta) = -cos\theta$
  $\tan(180+\theta) = tan\theta$
  $\text{cosec}(180+\theta) = -cosec\theta$
  $\sec(180+\theta) = -sec\theta$
  $\cot(180+\theta) = cot\theta$
- $\sin(270-\theta) = -cos\theta$
  $\cos(270-\theta) = -sin\theta$
  $\tan(270-\theta) = cot\theta$
  $\text{cosec}(270-\theta) = -sec\theta$
  $\sec(270-\theta) = -cosec\theta$
  $\cot(270-\theta) = tan\theta$
- $\sin(270+\theta) = -cos\theta$
  $\cos(270+\theta) = sin\theta$
  $\tan(270+\theta) = -cot\theta$
  $\text{cosec}(270+\theta) = -sec\theta$
  $\sec(270+\theta) = cosec\theta$
  $\cot(270+\theta) = -tan\theta$
- $\sin(360-\theta) = -sin\theta$
  $\cos(360-\theta) = cos\theta$
  $\tan(360-\theta) = -tan\theta$
  $\text{cosec}(360-\theta) = -cosec\theta$
  $\sec(360-\theta) = sec\theta$
  $\cot(360-\theta) = -cot\theta$
- $\sin(360+\theta) = sin\theta$
  $\cos(360+\theta) = cos\theta$

$\tan(360 + \theta) = tan\theta$
$\text{cosec}(360 + \theta) = cosec\theta$
$\sec(360 + \theta) = sec\theta$
$\cot(360 + \theta) = cot\theta$

- $\sin(2n\pi + \theta) = sin\theta$
  $\cos(2n\pi + \theta) = cos\theta$
  $\tan(2n\pi + \theta) = tan\theta$
  $\text{cosec}(2n\pi + \theta) = cosec\theta$
  $\sec(2n\pi + \theta) = sec\theta$
  $\cot(2n\pi + \theta) = cot\theta$
- $\sin(-\theta) = -sin\theta$
  $\cos(-\theta) = cos\theta$
  $\tan(-\theta) = -tan\theta$
  $\text{cosec}(-\theta) = -cosec\theta$
  $\sec(-\theta) = sec\theta$
  $\cot(-\theta) = -cot\theta$
- $\sin(A + B) = sinAcosB + cosAsinB$
  $\sin(A - B) = sinAcosB - cosAsinB$
  $\cos(A + B) = cosAcosB - sinAsinB$
  $\cos(A - B) = cosAcosB + sinAsinB$
  $\tan(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \frac{tanA + tanB}{1 - tanA\,tanB}$
  $\tan(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{tanA - tanB}{1 + tanA\,tanB}$
  $\cot(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \frac{cotAcotB - 1}{cotA + cotB}$
  $\cot(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{cotAcotB + 1}{cotB - cotA}$

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2tan\theta}{1 + tan^2\theta}$
  $\cos 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta = \frac{1 - tan^2\theta}{1 + tan^2\theta}$
  $tan2\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta}$
- $1 + \cos 2\theta = 2cos^2\theta$
  $1 - \cos 2\theta = 2sin^2\theta$

- $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} = \frac{2tan\frac{\theta}{2}}{1+tan^2\frac{\theta}{2}}$

  $cos\theta = cos^2\frac{\theta}{2} - sin^2\frac{\theta}{2} = 2cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + tan^2\frac{\theta}{2}}$

  $tan\theta = \frac{2tan\frac{\theta}{2}}{1 - tan^2\frac{\theta}{2}}$
- $1 + \cos\theta = 2cos^2\frac{\theta}{2}$

  $1 - \cos\theta = 2sin^2\frac{\theta}{2}$
- $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4sin^3\theta$
  $\cos 3\theta = 4cos^3\theta - 3\sin\theta$
  $\tan 3\theta = \frac{3tan\theta - tan^3\theta}{1 - 3tan^2\theta}$
- $sinC + sinD = 2sin\frac{C+D}{2}cos\frac{C-D}{2}$
  $sinC - sinD = 2cos\frac{C+D}{2}sin\frac{C-D}{2}$
  $cosC + cosD = 2cos\frac{C+D}{2}cos\frac{C-D}{2}$
  $cosC - cosD = -2sin\frac{C+D}{2}sin\frac{C-D}{2}$
- $2sinAcosB = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

  $2cosAsinB = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

  $2cosAcosB = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

  $2sinAsinB = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

- $sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, n \in I$
  $cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \in I$
  $tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, n \in I$
- $sin\theta = sina \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in I$
  $cos\theta = cosa \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in I$
  $tan\theta = tana \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha, n \in I$

——00——

रैखिक असमिकाएँ

भूमिका

पूर्व की कक्षाओं में आप एक चर और दो चर राशियो में समीकरणों का तथा शाब्दिक प्रश्नों को समीकरणों में परिवर्तित करके हल करना सीख चुके है, पर हमें कुछ ऐसे भी उदाहरण देखने को मिलते है जब हम शाब्दिक प्रश्नों को समीकरणों के रूप में नहीं बदल पाते हैं जैसे कि दो संख्याओं का योग कम से कम 10 हो। हमें ऐसे कथन मिलते है जिसमें $<, >, \leq, \geq$ चिन्ह प्रयुक्त होते हैं ये कथन असमिकाएँ कहलाते हैं। इस अध्याय में हम एक एवं दो चरो में रैखिक असमिकाओं का अध्ययन करेंगे जिनका उपयोग विज्ञान, सांख्यिकी, इष्टतमकारी इत्यादि से संबंधित समस्याओं को हल करने में किया जाता है।

असमिकाएँ

- एक असमिका, दो वास्तविक संख्याओं या दो बीजीय व्यंजको में $<, >, \leq,$ और $\geq$ के चिन्ह के प्रयोग से बनती है। $3 > 5,\ 7 > 4$ इत्यादि संख्यांक असमिका के उदाहरण हैं। $x < 5\ , 7 > y,\ x + y. \geq 51$ इत्यादि शाब्दिक (चरांक) असमिका के उदाहरण हैं। एक चर राशि के रैखिक असमिकाओं का बीजगणितीय हल और उनका आलेखीय निरूपम।

- एक असमिका $3x < 10$ पर विचार करते हैं, जहाँ x कोई पूर्ण संख्या है। इस असमिका को सत्य कथन करने वाले x के मान केवल $0,1,2,3$ हैं जबकि यदि x के स्थान पर 4 लिया जाए तो असमिका एक असत्य कथन हो जाती है। x के वे मान जो असमिका को एक सत्य कथन बनाते है, असमिका के हल कहलाते हैं।

प्रश्न. $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$ को हल कीजिये तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हलः– $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$

$\Rightarrow \quad \frac{3x-4}{2} \geq \frac{x-3}{4}$

$\Rightarrow \quad 4(3x-4) \geq 2(x-3)$

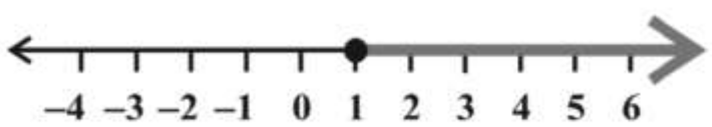
$\Rightarrow \quad 12x - 16 \geq 2x - 6$

$\Rightarrow \quad 12x - 2x \geq -6 + 16$

$\Rightarrow \quad 10x \geq 10$

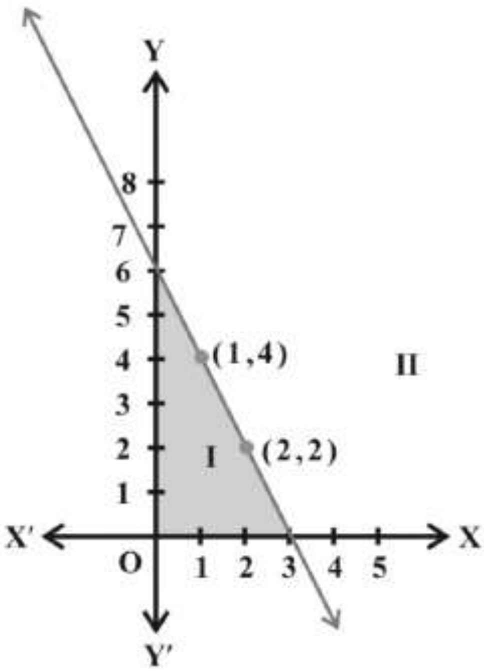
$\Rightarrow \quad x \geq 1$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं।



दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का आलेखीय हल

यहाँ हम एक असमिका $2x + y \leq 6$ पर विचार करते हैं। इस असमिका के संगत समीकरण $2x + y = 6$ का आलेख खींचते हैं।



यह एक सरल रेखा है जो कार्तीय तल को अर्ध–तल I व अर्ध तल II में विभाजित करती है। असमिका $2x + y \leq 6$ का आलेख खींचने के लिए हम अर्ध–तल I में एक बिन्दु $(0,0)$ मान लेते हैं और यह जाँचते है कि x और y के मान असमिका को संतुष्ट करते हैं या नहीं। आप यह देखेंगे कि $x = 0, y = 0$ असमिका को संतुष्ट करते हैं। इस प्रकार हम कहते हैं कि असमिका का आलेख, अर्ध–तल I है।

——00——

क्रमचय और संचय

भूमिका

मान लीजिए कि आपको 5 सदस्यों में से 3 सदस्यो को लेकर एक टीम गणित करना है, यहाँ टीम बनाने के कुल कितने प्रकार हो सकते है? यह समस्या संचय विन्यास के अंतर्गत आती है।

अब मान लीजिए कि आपके पास 5 किताबे हैं जिन्हे आप अपनी बुकसेल्फ में क्रम से लगाना चाहते हैं। आप चाहते हैं कि उनमे से 3 किताबें जिनका आप अधिक प्रयोग करते हैं, तक पहुँच आसान हो बाकी दो तक पहुँच कम हो। इस स्थिति में किताबों का क्रम महत्वपूर्ण है। ये हम कितने प्रकार से कर सकते हैं? यह समस्या 'क्रमचय विन्यास' के अंतर्गत आती है।

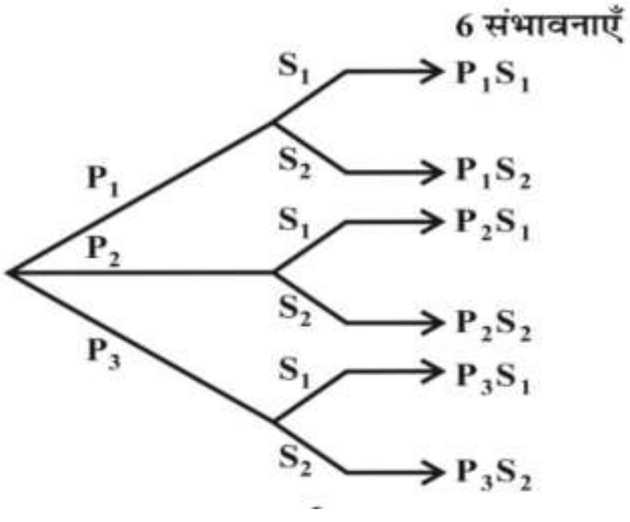
इस अध्याय में हम कुछ सरल विधियों का अध्ययन करेंगे जिनके प्रयोग से उपरोक्त वर्णित समस्याओं का सरल रूप से गणन कर सके।

गणना का आधारभूत सिद्धांत

आइयें हम एक समस्या पर विचार करते हैं:

मोहन के पास तीन P_1, P_2, P_3 पेंट तथा S_1, S_2 दो कमीजे हैं।

उसके पास पहनने के लिए पेंट तथा कमीज के कितने भिन्न–भिन्न जोड़े हैं? यहां एक पेंट चुनने के लिए 3 तरीके हैं क्योकि चयन के लिए 3 पेंट उपलब्ध है। इसी प्रकार एक कमीज का चयन 2 तरह से किया जा सकता है। पेंट के प्रत्येक चयन के लिए कमीज के चयन के 2 विकल्प संभव हैं। अतः पेंट तथा कमीज के जोड़ो के चयन की संख्या $3 \times 2 = 6$ है। इस तथ्य को आकृति से स्पष्ट किया गया है।



वस्तुतः उपर्युक्त प्रकार की समस्याओं को निम्नलिखित सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सरल किया जाता है, जिसे गणना का आधारभूत सिद्धांत अथवा केवल गणन सिद्धांत कहते है इसका कथन इस प्रकार है: "यदि एक घटना m भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, इसके बाद एक अन्य घटना n भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है,तो दिए हुए क्रम में दोनो घटनाओं के भिन्न तरीकों के घटित होने की कुल संख्या $m \times n$ है।

उदाहरण

शब्द ROSE के अक्षरो से बनने वाले 4 अक्षरों वाले, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए, जबकि अक्षरों के पुनरावृत्ति की अनुमति हो।

हलः– रचित शब्दों की संख्या, 4 रिक्त स्थानों– – – – को 4 अक्षरों से उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है, जबकि इस बात का ध्यान रखा जाए कि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। पहले स्थान को 4 अक्षर R,O,S, और E में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, दूसरे स्थान को शेष तीन अक्षरों में से किसी एक द्वारा 3 विनिमय तरीकों से भरा जा सकता है इसके उपरांत तीसरें स्थान को 2 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है और अंत में चौथे स्थान को केवल 1 तरीके से भरा जा सकता है इस प्रकार गुणन सिद्धांत द्वारा चारों स्थानों को भरने वाले तरीकों की संख्या $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ है। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या 24 है।

क्रमचय

क्रमचय एक निश्चित क्रम में बना विन्यास है, जिसको दी हुई वस्तुओं में से एक समय में कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है।

- क्रमचय, जब सभी वस्तुएॅ भिन्न–भिन्न हैः

  n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या को प्रतीक ^np_r से निरूपित करते है जहॉ $0 < r \le n$ तथा किसी भी क्रमचय में वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति नही है।

  $^np_r=n(n-1)(n-2)_________(n-r+1).$

- क्रमगुणित संकेतनः

  संकेतन n! प्रथम–n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को व्यक्त करता है अर्थात्

  $n!=1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times (n-1) \times n$

  तदनुसार

  $1!=1$

  $2!=1\times2=2$

  $3!= 1 \times 2 \times 3 = 6$ इत्यादि।

  हम परिभाषित करते हैं कि $0!=1.$

  ^np_r के लिए सूत्र

  $^np_r=\frac{n!}{(n-r)!}, 0 \le r \le n$

- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या, जबकि वस्तुओं के पुनरावृत्ति की अनुमति हो n^r होती है।

- क्रमचय, जब सभी वस्तुएॅ भिन्न–भिन्न नहीं हैः

  n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{P_1!P_2!\ldots\ldots\ldots P_K!}$ है जहॉ P_1 वस्तुएॅ एक प्रकार की, P_2 वस्तुएॅ दूसरे प्रकार की, ... P_K वस्तुएॅ Kवॉ प्रकार की और शेष (यदि कोई हैं) विभिन्न प्रकार की हैं।

  उदाहरणः– ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः— यहॉ पर 9 अक्षर है, जिनमें A, 4 बार आया है, 2 बार L आया है तथा शेष विभिन्न प्रकार के हैं। अतः विन्यासों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{9!}{4!2!}$$

$$= \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1}$$

$$= 7560$$

संचयः—

मान लीजिए कि 3 लॉन टेनिस खिलाड़ियों X,Y,Z का एक समूह है। 2 खिलाड़ियों की एक टीम बनायी है। इसको हम कितने प्रकार से कर सकते हैं। क्या X और Y की टीम Y तथा X की टीम से भिन्न है? यहाँ पर खिलाड़ियों का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। वास्तव में टीम बनाने के केवल तीन ही संभव तरीके हैं। यह XY,YZ तथा ZX हैं।

यहाँ पर, प्रत्येक चयन, 3 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 को लेकर बना हुआ, संचय कहलाता है। किसी संचय में चयनित वस्तुओं का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है।

$^{n}p_{r} = {}^{n}c_{r}\, r!\,,\ 0 \leq r \leq n$

$^{n}c_{r} + {}^{n}c_{r-1} = {}^{n+1}c_{r}$

उदाहरणः 2 पुरूषों और 3 महिलाओं के एक समूह से 3 व्यक्तियों की एक समिति बनानी है। यह कितने प्रकार से किया जा सकता है? इनमें से कितनी समितियॉ ऐसी हैं, जिनमें 1 पुरूष तथा 2 महिलाएँ हैं?

हलः— यहाँ क्रम का महत्व नहीं है। अतः हमें संचयों की गणना करनी है। यहॉ पर समितियों की संख्या उतनी ही है, जितनी 5 विभिन्न व्यक्तियों में से एक समय में 3 बार को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या है। इसलिए समिति बनाने के तरीकों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{5}c_{3}$$

$$= \frac{5!}{3!2!}$$

$$= \frac{4\times5}{2}$$

$$= 10$$

पुनः 2 पुरूषों में से 1 को चुनने के $^{2}c_{1}$ तरीके हैं तथा 3 महिलाओं में से 2 चुनने के $^{3}c_{2}$ तरीके हैं। इसलिए, इस प्रकार की समितियों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{2}c_{1} \times {}^{3}c_{2}$$

$$= \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!}$$

$$= 6$$

——00——

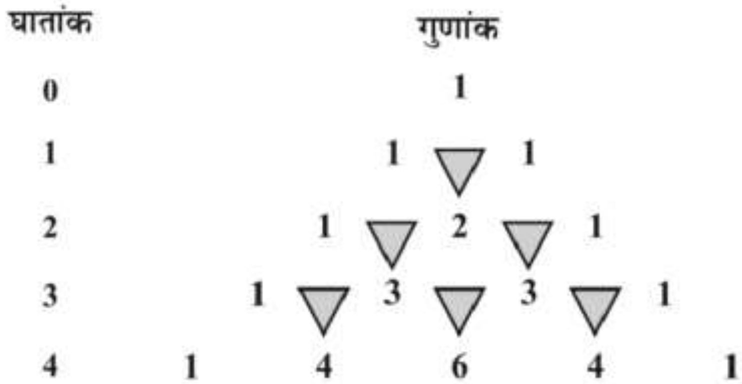
द्विपद प्रमेय

भूमिका

पिछली कक्षाओं में हम $a+b$ तथा $a-b$ जैसे द्विपदों का वर्ग एवं घन ज्ञात करना सीख चुके हैं, पर इन द्विपदों की घात यदि अधिक हो तो गणना, क्रमिक गुणनफल द्वारा अधिक जटिल हो जाती है। इस जटिलता को द्विपद प्रमेय द्वारा दूर किया गया है।

द्विपद प्रमेय से $(a+b)^n$ के प्रसार की आसान विधि प्राप्त होती है जहाँ घातांक n एक पूर्णांक या परिमेय संख्या है। इस अध्याय में हम केवल धन पूर्णांको के लिए द्विपद प्रमेय का अध्ययन करेंगे।

पास्कल त्रिभुज



आकृति में दी गई सारणी को अपनी रूचि के अनुसार किसी भी घात तक बढ़ा सकते हैं। यह संरचना एक ऐसे त्रिभुज की तरह लगती है जिसके शीर्ष पर 1 लिखा है और दो तिरछी भुजाएँ नीचे की ओर जा रही हैं। संख्याओं का व्यूह फ्रांसीसी गणितज्ञ Blaise Pascal के नाम पर पास्कल त्रिभुज के नाम से प्रसिद्ध है। इसे पिंगल के मेरूप्रस्त्र के नाम से भी जाना जाता है।
आइये हम पास्कल त्रिभुज का प्रयोग कर $(a+b)^5$ का विस्तार करते हैंः

घात 5 की पंक्ति हैः

1 5 10 10 5 1

अतः $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + b^5$

अब यदि हम $(a+b)^{11}$ का प्रसार ज्ञात करना चाहे तो पहले हमें घात 11 की पंक्ति ज्ञात करनी है। यह थोड़ी–सी लंबी विधि है।

परन्तु इन प्रेक्षणों के परीक्षणों से एक द्विपद के किसी ऋणेतर पूर्णाकं n के लिए प्रसार दिखाया जा सकता है।

धन पूर्णांक n के लिए द्विपद प्रमेय

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + ...{}^nC_n a^0 b^n$$

व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}.b^r$

उदाहरणः–

$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4, x \neq 0$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।

हलः– द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके हमें प्राप्त होता हैः

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = 4_{C_0}(x^2)^4 + 4_{C_1}(x^2)^3.\left(\frac{3}{x}\right) + 4_{C_2}(x^2)^2.\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 4_{C_3}(x^2)^1.\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 4_{C_4}\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4.x^6.\frac{3}{x} + 6.x^4.\frac{9}{x^2} + 4.x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

——00——

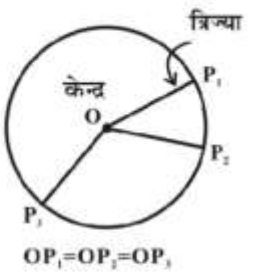
शंकु परिच्छेद

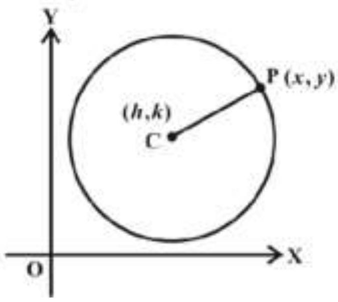
भूमिका

पिछली कक्षाओं में आप एक रेखा के समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में हम कुछ वक्रों का अध्ययन करेंगे जो एक लंब वृत्तीय द्विशंकु और एक समतल के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किये जा सकते हैं। ये वक्र वृत, परवलय, दीर्घ वृत्त और अतिपरवलय होते हैं जिन्हे शंकु परिच्छेद या शांकव कहा जाता है।

वृत्त

वृत्त तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय होता है जो तल के एक स्थिर बिंदु से समान दूरी पर होते हैं।



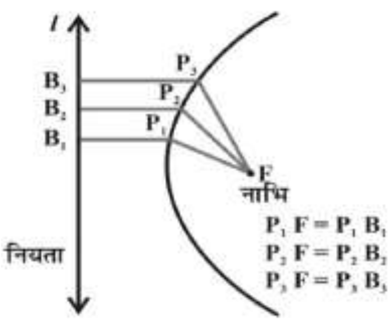


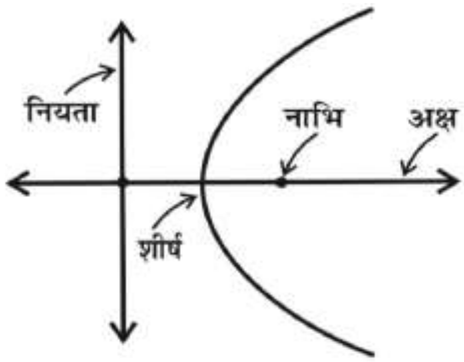
वृत्त से संबंधित सूत्र

- उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र (h,k) त्रिज्या 'a' हो
  $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$
- वृत्त का व्यापक समीकरण
  $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$
  जिसमें त्रिज्या $= \sqrt{g^2+f^2-c}$
  तथा केन्द्र (-g,-f) होता है।

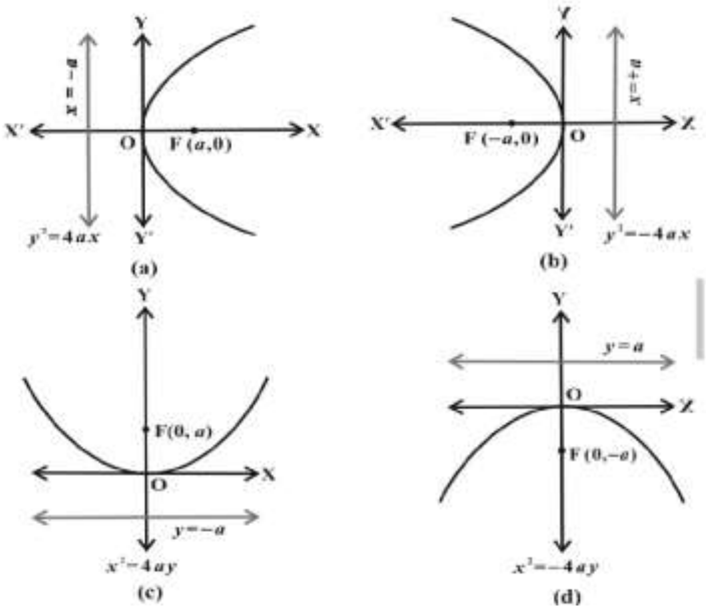
परवलय

एक परवलय तल के उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जो एक निश्चित सरल रेखा और तल के एक निश्चित बिंदु (जो रेखा पर स्थित नही है) से समान दूरी पर है।





- **परवलय के प्रमाणिक समीकरण**



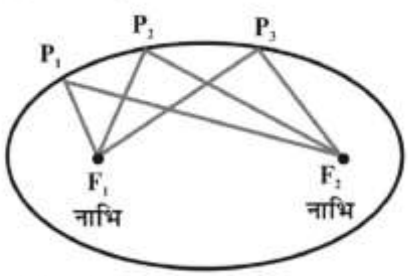
परवलय के सूत्र

- परवलय $y^2 = 4ax$ में
  नाभि क निर्देशांक = (a,o)
  परवलय की अक्ष = x-अक्ष
  नियता का समीकरण: x = -a
  नाभिलंब जीवा की लंबाई = 4a

- परवलय $x^2 = 4ay$ में
  नाभि के निदेशांक =(o,a).
  परवलय की अक्ष =y-अक्ष
  निमता का समीकरण: y= -a
  नाभिलंब जीवा की लंबाई = 4a

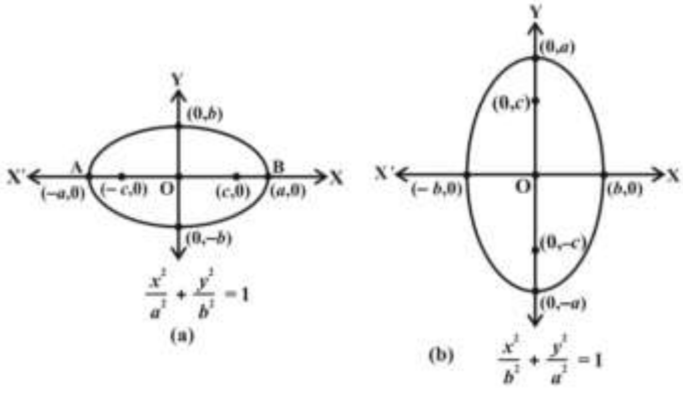
दीर्घ वृत्त

एक दीर्घ वृत्त तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय है जिनका तल में दो स्थिर बिन्दुओं से दूरी का योग अचर होता है। दो स्थिर बिन्दुओं को दीर्घवृत्त की नाभियाँ कहते है।



$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

दीर्घ वृत्त का मानक समीकरण



दीर्घ वृत्त के सूत्र

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$ में

दीर्घ–अक्ष की लंबाई =2a

लघु–अक्ष की लंबाई =2b

उत्केन्द्रताः $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

नाभि के निदेशांक =(ae,o)

नाभिलंब जीवा की लंबाई $=\frac{2b^2}{a}$.

- $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, a>b$ में

दीर्घ–अक्ष की लंबाई =2a

लघु–अक्ष की लंबाई =2b

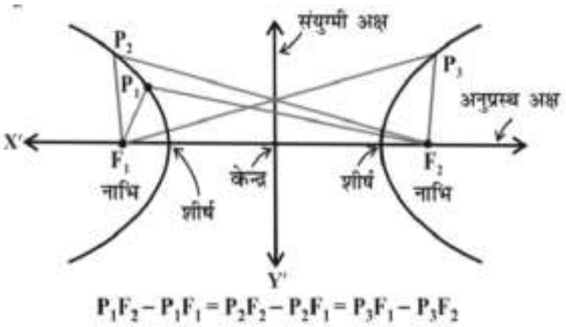
उत्केन्द्रताः $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

नाभि के निदेशांक =(o,ae)

नाभिलंब जीवा की लंबाई $=\frac{2b^2}{a}$.

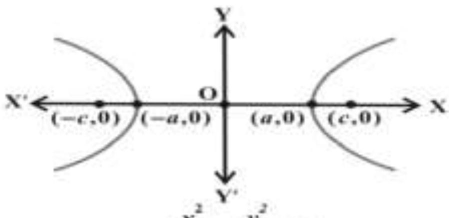
अतिपरवलय

एक अतिपरवलय, तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरीयों का अंतर अचर होता है।



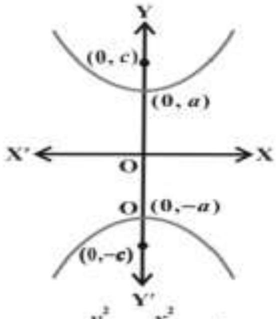
$P_1F_2-P_1F_1=P_2F_2-P_2F_1=P_3F_1-P_3F_2$

अतिपरवलय का मानक समीकरण



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(a)



$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

(b)

अतिपरवलय के सूत्र

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ में
  अनुप्रस्त्र अक्ष की लंबाई = 2a
  संयुग्मी अक्ष की लंबाई = 2b
  उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
  नााभि के निर्देशांक =(ae, o)
  नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a}$

- $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ में
  अनुप्रस्त्र अक्ष की लंबाई =2a
  संयुग्मी अक्ष की लंबाई =2b
  उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
  नाभि के निदेशांक = (o, ae)
  नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a}$

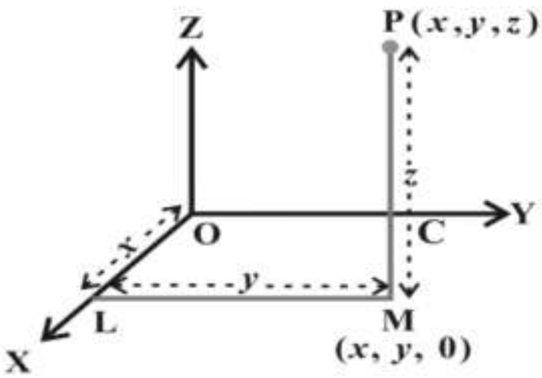
——00——

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

भूमिका

किसी तल में स्थित एक बिन्दु की स्थिति निर्धारण करने के लिए उस में दो परस्पर लंब एवं प्रतिच्छेदी रेखाओं से लांबिक दूरियों की आवश्यकता होती है जिन्हे हम उस बिन्दु के निर्देशांक कहते है। उसी प्रकार बिंदु यदि अंतरिक्ष में लिया जाये तो उसकी स्थिति निर्धारण करने के लिए हमें तीन परस्पर लंब एवं प्रतिच्छेदी रेखाओं से लांबिक दूरियों की आवश्यकता होती है।

अंतरिक्ष में एक बिन्दु के निर्देशांक



आंतरिक्ष में दिए गए बिन्दु P से xy- तल पर PM लंब खीचते हैं जिसका पाद M है। तब M से x-अक्ष पर ML लंब खीचिए, जो उससे L पर मिलता है। मान लीजिए OL = x, LM = y और PM = z तब (x, y, z) बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते है। इसमें x, y, z को क्रमशः बिंदु P के x-निर्देशांक, y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक, कहतें हैं। आकृति में हम देखते हैं कि बिंदु P(x, y, z) अष्टांक्ष XOYZ में स्थित है, अतः x, y और z सभी धनात्मक हैं।

एक बिंदु के निर्देशांकों के चिन्ह उस अष्टांश को निर्धारित करते हैं जिसमें बिन्दु स्थित होता है। निम्नलिखित सारणी आठों अष्टांशों में निर्देशांको के चिन्ह दर्शाती है।

अष्टांश / निर्देशांक	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

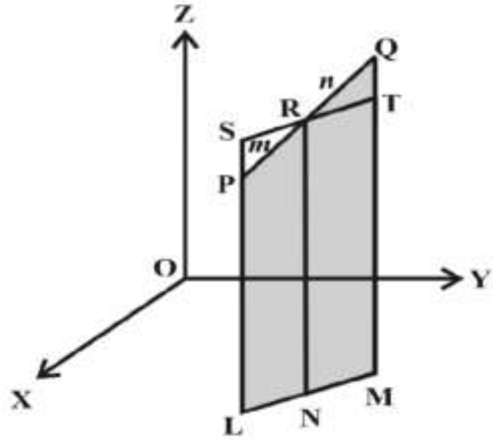
जिस प्रकार द्विविभीय ज्यामिति में बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ होती है।

उसी प्रकार त्रिविभीय ज्यामिति में बिन्दुओं P (x_1 ,y_1, z_1) और Q (x_2 ,y_2, z_2) के बीच की दूरी

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - x_1)^2}$ होती है।

विभाजन सूत्र



बिंदु R जो बिंदु P (x_1 ,y_1, z_1) और Q (x_2 ,y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखंड को m:n के अनुपात में अतः विभाजित करता है, के निर्देशांक $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$.

——00——

सीमा और अवकलज

भूमिका

यह अध्याय कलन की एक भूमिका है, कलन गणित की वह शाखा है जिसमें मुख्यतः प्रांत में बिंदओं के परिवर्तन से फलन के मान में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन करेंगे। हम सीमा और अवकलन की सहज परिभाषा देने के उपरांत इनके बीजगणित का कुछ अध्ययन करेंगे।

सीमा

फलन $f(x) = x^2$ पर विचार कीजिए। जैसे - जैसे x को शून्य के अधिक निकट मान देते हैं, f(x) का मान भी 0 की ओर अग्रसर होता जाता हैं। इसे हम $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ से दर्शाते हैं।

व्यापक रूप से, जब $x\to a$, $f(x)\to l$, तब l को फलन f(x) की सीमा कहा जाता है और इसे $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ से लिखा जाता है।

$\lim_{x\to \bar{a}} f(x), x = a$ पर f(x) का आपेक्षित मान है, जिसमें x के बाई ओर निकट मानो के लिए f(x) को मान दिए है। इस मान को a पर f(x) की बाएँ पक्ष की सीमा कहते हैं।

$\lim_{x\to a^+} f(x), x = a$ पर f(x) का आपेक्षित मान है, जिसमें x के a के दाई ओर के निकट मानों के लिए f(x) के मान दिए गए है। इस मान को a पर f(x) की दाएँ पक्ष की सीमा कहते हैं।

यदि दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हों तो हम इस उभयनिष्ठ मान को x = a पर f(x) की सीमा कहते हैं और इसे $\lim_{x\to a} f(x)$ से निरूपित करते हैं।

अर्थात्

$$\lim_{x\to \bar{a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

सीमाओं का बीजगणित

मान लीजिए कि f और g दो फलन ऐसे है ंकि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व हैं। तब

1. दो फलनों के योग की सीमा फलनों की सीमाओं का योग होता है, अर्थात्
$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

2. दो फलनों के अंतर की सीमा फलनो की सीमाओं का अंतर होता है, अर्थात्
$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

3. दो फलनों के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का गुणन होता है, अर्थात् $\lim_{x \to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x)$

4. दो फलनो के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का भागफल होता है, (जबकि हर शून्येतर होता है) , अर्थात्
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

- किसी धन पूर्णाक n के लिए
$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x} = 0$

अवकलज

मान लीजिए f एक वास्तविक मानीय फलन है और इसकी परिभाषा के प्रांत में एक बिंदु a है। a पर f का अवकलज

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

से परिभाषित है बशर्ते कि इस सीमा का अस्तित्व हो। $\dot{a}$ पर f(x) का अवकलज f(a) से निरूपित होता है।

फलनों के अवकलज का बीजगणित

मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन है कि उनके उभयनिष्ठ प्रांत में उनके अवकलन परिभाषित है, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलन उन फलनों के अवकलनों का योग है, अर्थात् $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)} + \mathrm{g(x)}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) + \frac{d}{d(x)} g(x)$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलन उन फलनों के अवकलनों का योग है, अर्थात् $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलन निम्नलिखित गुणन नियम से दिया गया है अर्थात्

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)}.\mathrm{g(x)}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x).g(x) + f(x).\frac{d}{dx} g(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलन निम्नलिखित भागफल नियम से दिया गया है (जहाँ हर शून्येतर है)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}f(x).g(x) - f(x).\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

- अवकलन में उपयोग होने वाले महत्वपूर्ण सूत्र

(i) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$

(iii) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

(iv) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

(v) $\frac{d}{dx}a^x = a^x.\log_e a$

(vi) $\frac{d}{dx}\mathrm{sinx} = \mathrm{cosx}$

(vii) $\frac{d}{dx}\mathrm{cosx} = -\mathrm{sinx}$

(viii) $\frac{d}{dx}\mathrm{tanx} = \sec^2 x$

(ix) $\frac{d}{dx}\mathrm{cosecx} = -\mathrm{cosecx}.\mathrm{cotx}$

(x) $\frac{d}{dx}\mathrm{secx} = \mathrm{secx}.\mathrm{tanx}$

(xi) $\frac{d}{dx}\mathrm{cotx} = -\mathrm{cosec}^2 x$

——00——

प्रायिकता

भूमिका

किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हम घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या का कुल परिणामों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात करते हैं। प्रायिकता के इस सिद्धांत को प्रायिकता का पुरातन सिद्धांत कहा जाता है।

हम प्रायिकता को प्रेक्षण और संकलित ऑकड़ों के आधार पर ज्ञात करना सीख चुके हैं। इसे प्रायिकता का सांख्यिकीय दृष्टिकोण कहते हैं।

इन दोनों सिद्धांतों में कुछ गंभीर समस्याएँ हैं। उदाहरणतः इन सिद्धांतो को उन क्रियाकलापों /प्रयोगों पर नहीं लगाया जा सकता है जिनमें संभावित परिणामों की संख्या अपरिमित होती है।

इस अध्याय में हम प्रायिकता के इसी दृष्टिकोण जिसे प्रायिकता का अभिग्रहीतीय दृष्टिकोण कहते हैं, का अध्ययन करेंगे। इस दृष्टिकोण को समझने के लिए कुछ मूल शब्दों को जानना आवश्यक है, जैसे कि यादृच्छिक परीक्षण, प्रतिदर्श समष्टि घटनाएँ इत्यादि।

यादृच्छिक परीक्षण

एक परीक्षण को यादृच्छिक परीक्षण कहा जाता है यदि निम्नलिखित दो प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है:—

(i) इसके एक से अधिक संभावित परिणाम हों।
(ii) परीक्षण के पूर्ण होने से पहले परिणाम बताना संभव न हो।

उदाहरणतः एक पांसे को उछालनें का परीक्षण एक यादृच्छिक परीक्षण है। किसी यादृच्छिक परीक्षण के किसी संभावित नतीजे को परिणाम कहते है ।

किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संभावित परिणामों का समुच्चय उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है। प्रतिदर्श समष्टि को संकेत S द्वारा प्रकट किया जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव एक प्रतिदर्श बिंदु कहलाता है। एक पांसे को उछालने के परीक्षण में प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

S का प्रत्येक अवयव प्रतिदर्श बिंदु है।

घटना

प्रतिदर्श समष्टि के किसी उप समुच्चय के संगत एक घटना होती है और किसी घटना के संगत प्रतिदर्श समष्टि का एक उपसमुच्चय होता है। अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक घटना कही जाती है। एक पांसे को फैंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। मान लीजिए ''पांसें पर 3 से छोटी संख्या प्रकट होना'' को E से निरूपित किया जाता है। यदि वास्तव में संख्या 2 प्रकट हो जाती है तो हम कहते हैं कि घटना E घटित हुई। वस्तुतः संख्या 1, 2 या 3 प्रकट होती है तो हम कहते हैं कि घटना E घटित हुई।

असंभव व निश्चित घटनाएँ

रिक्त समुच्चय $\emptyset$ और प्रतिदर्श समष्टि S भी घटनाओ को व्यक्त करते हैं। अर्थात् पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि को निश्चित घटना कहते हैं। वास्तव में $\emptyset$ को असंभव घटना और S अर्थात पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि को निशचित घटना कहते हैं।

एक पांसे के उछालने के परीक्षण में पासे पर प्रकट संख्या 7 का गुणज होने की घटना असंभव है और पासें पर प्राप्त संख्या सम या विषम होने की घटना निश्चित घटना है।

सरल घटना

यदि किसी घटना E में केवल एक ही प्रतिदर्श बिंदु हो, तो घटना E को सरल या प्रारम्भिक घटना कहते हैं।

मिश्र घटना

यदि किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु होते हैं, तो उसे मिश्र घटना कहते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण में निम्नलिखित घटनाएँ मिश्र घटनाएँ हैः

E: तथ्यतः एक चित प्रकट होना

F: न्यूनतम एक चित प्रकट होना

G: अधिकतम एक चित प्रकट होना, इत्यादि।

पूरक घटना

पूरक घटना A के सापेक्ष एक अन्य घटना A’ होती है जिसे घटना A की पूरक घटना कहते हैं। A’ को घटना ‘A-नहीं’ भी कहा जाता हैं।

उदाहरण के लिए ‘दो सिक्कों’ को उछालने का परीक्षण लें। इसका प्रतिदर्श समष्टि

S= $\{HH, HT, TH, TT\}$ है।

माना कि A=$\{HT, TT\}$ एक घटना है तो इसकी पूरक घटना

‘A-नहीं’ = A’ = $\{ HH, TH\}$

घटना ‘A या B’

जब समुच्चय A और B किसी प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हों तों $'A \cup B'$ घटना A या B या दोनों का निरूपित करता है।

घटना A या B=$' A \cup B'$=$\{A: x \in x \in A \text{ or } x \in B\}$

घटना ''A-किन्तु B-नहीं''

समुच्चय 'A-B' घटना ''A-किन्तु B-नहीं'' को व्यक्त कर सकता है।

$$A - B = 'A \cap B'$$

परस्पर अपवर्ती घटनाएॅ

दो घटनाएॅ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएॅ कही जाती हैं।, यदि इनमें से किसी एक का घटित होना दूसरी के घटित होने को अपवर्जित करता है अर्थात् वे एक साथ घटित नहीं हो सकती है। एक प्रतिदर्श समष्टि भी सरल घटनाएॅ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं।

निःशेष घटनाएॅ

यदि $E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएॅ हैं और यदि

$$E_1 U E_2, U E_3 \ldots\ldots\ldots\ldots U E_n = \underbrace{n}_{i=1} E_i = s.$$

सम सम्भाव्य परिणामों की प्रायिकता

मान लीजिए कि प्रतिदर्श समष्टि S की कोई एक घटना E, इस प्रकार है कि n(s)=n और n(E)=m यदि प्रत्येक परिणाम सम संभाव्य है तो यह अनुसारित होता है कि

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}}$$

घटना'A या B'की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

घटना 'A –नहीं' की प्रायिकता

$$P(A \text{ –नहीं}') = P(A') = 1 - P(A)$$

——00——