03

आव्यूह
(Matrix)

3.01 प्रस्तावना (Introduction)

1857 में गणितज्ञ आर्थर केली जब समीकरणों के हल ज्ञात करने का प्रयास कर रहे थे तब ही आव्यूह सिद्धान्त की जानकारी हुई। इसमें एक प्रकार की राशियों अथवा वस्तुओं का एक आयताकार विन्यास बनाया जाता है तथा इन विन्यासों के गुणधर्म के आधार पर विज्ञान एवं विज्ञान से सम्बन्धित अनेक विषयों का अध्ययन सरलता पूर्वक किया जाना संभव हुआ है।

3.02 परिभाषा एवं संकेतन (Definition and notation)

समान राशिओं या संख्याओं के उस व्यवस्थित क्रम को आव्यूह कहते हैं, जिसमें इन्हें पंक्तिओं एवं स्तम्भों के आयताकार या वर्गाकार विन्यास में लिखा जाता है। ये राशियाँ या संख्याएँ वास्तविक अथवा सम्मिश्र हो सकती हैं।

आव्यूह में संख्याएँ किसी भी कोष्ठक में बन्द करके लिखी जा सकती हैं।

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix}$$

सामान्यतः आव्यूह को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों $A, B, C...$ आदि से प्रदर्शित किया जाता है।

टिप्पणीः आव्यूह एक प्रकार की व्यवस्था है इसका मान ज्ञात नहीं होता है।

3.03 आव्यूह का क्रम (Order of matix)

यदि किसी आव्यूह में m पंक्तियां एवं n स्तम्भ हो तो उसे $m \times n$ के क्रम का आव्यूह कहा जाता है।
जैसे

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

यह आव्यूह का व्यापक रूप है।

इसमें $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ आव्यूह के अवयव कहलाते हैं। a_{ij} आव्यूह के i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ में आने वाले अवयव को दर्शाता है। अतः संक्षेप रूप में इस आव्यूह को $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ से व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी : a_{ij} पादांक अक्षरों में प्रथम अक्षर अर्थात् i सदैव पंक्ति संख्या को तथा द्वितीय अक्षर अर्थात् j सदैव स्तम्भ संख्या को व्यक्त करता है।

3.04 आव्यूह के प्रकार (Type of matrix)

1. पंक्ति आव्यूह (Row matrix)

वह आव्यूह जिसमें केवल एक ही पंक्ति हो, पंक्ति आव्यूह कहलाती है। इसका क्रम $1\times n$ होगा, जिसमें n स्तम्भों की संख्या है। जैसे-

(i) $[2\ \ 5\ \ 3]_{1\times 3}$ (ii) $[3\ \ -4\ \ 0\ \ 7\ \ 1]_{1\times 5}$

2. स्तम्भ आव्यूह (Column matrix)

वह आव्यूह जिसमें केवल एक ही स्तम्भ हो, स्तम्भ आव्यूह कहलाता है। इसका क्रम $m\times 1$ होगा, जिसमें m पंक्तिओं की संख्या है। जैसे-

(i) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ (ii) $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}_{5\times 1}$

3. शून्य आव्यूह (Zero or Null matrix)

वह आव्यूह, जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो, शून्य आव्यूह कहलाती है। सामान्यत: इसे 'O' (बडे आकार का शून्य) से व्यक्त करते है। जैसे-

(i) $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

4. वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

आव्यूह जिसमें पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या समान हो, वर्ग आव्यूह कहलाता है। जैसे

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ (iii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

अवयव $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ विकर्ण के अवयव कहलाते हैं तथा इस विकर्ण को मुख्य विकर्ण (Principal diagonal) कहते हैं क्योंकि इस विकर्ण के सभी अवयवों के दोनो पादांक (Subscripts) समान होते हैं।

5. विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix)

वह वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के अवयवों के अतिरिक्त शेष सभी अवयव शून्य हो विकर्ण आव्यूह कहलाता है अर्थात् $a_{ij}=0$ यदि $i\neq j$.

जैसे- (i) $[5]_{1\times 1}$ (ii) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ (iii) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

6. अदिश आव्यूह (Scalar matrix)

वह विकर्ण आव्यूह, जिसमें मुख्य विकर्ण के सभी अवयव समान हो, अदिश आव्यूह कहलाता है। अतः अदिश आव्यूह

$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times m}$ में $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{जब} \quad i\neq j\\ k & \text{जब} \quad i=j; k\neq 0\end{cases}$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}_{3\times 3}$

7. इकाई आव्यूह (Unit or Identity matrix)

वह अदिश आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के सभी अवयव इकाई (एक) हो, इकाई आव्यूह कहलाता है। इसे I से निरूपित करते है अतः इकाई आव्यूह $I_n=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ में $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{जब} \quad i\neq j\\ 1 & \text{जब} \quad i=j\end{cases}$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$

8. त्रिभुजाकार आव्यूह (Triangular matrix)

(*i*) ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह (Upper triangular matrix)

वह वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हों ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाती है।

अतः $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ में $a_{ij}=0$ जब $i>j$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}9 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3\times 3}$

(*ii*) निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह (Lower triangular matrix)

वह वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हो निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाती है। अतः $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ में $a_{ij}=0$ जब $i<j$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 6 & 7 & 0\\ 9 & 2 & -4\end{bmatrix}_{3\times 3}$

3.05 आव्यूह के गुणधर्म (Properties of matrx)

1. परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)

यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाय तो प्राप्त आव्यूह मूल आव्यूह का परिवर्त आव्यूह कहलाता है।

आव्यूह A के परिवर्त आव्यूह को A^T या A' से निरूपित किया जाता है।

अतः $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तो $A^T=A'=[a_{ji}]_{n\times m}$

जैसे- (i) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 3 & -4\\ 3 & 8 & 6\end{bmatrix}_{3\times3} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 0 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}_{3\times3}$ (ii) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}_{3\times2} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}_{2\times3}$

2. समभित एवं विषम समभित आव्यूह (Symmetric and skew symmetric matrix)

(*i*) समभित आव्यूह (Symmetric matrix)

एक वर्ग आव्यूह A, समभित आव्यूह कहलाता है, यदि और केवल यदि $A=A^T$ हो।

जैसे- (i) $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}$; $A^T=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}$

अतः A एक समभित आव्यूह है।

(ii) $A=\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}_{3\times3}$; $A^T=\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}_{3\times3}$

टिप्पणी : समभित आव्यूह में सभी अवयव मुख्य विकर्ण के सापेक्ष समान दूरी पर समान होते हैं अर्थात् $a_{ij}=a_{ji}$.

(*ii*) विषम समभित आव्यूह (Skew-symmetric matrix)

एक वर्ग आव्यूह A, विषम समभित आव्यूह कहलाता है, यदि और केवल यदि हो $A^T=-A$ हो।

जैसे- (i) $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$; $A^T=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=-A$

(ii) $A=\begin{bmatrix}0 & h & g\\ -h & 0 & -f\\ -g & f & 0\end{bmatrix}$; $A^T=\begin{bmatrix}0 & -h & -g\\ h & 0 & f\\ g & -f & 0\end{bmatrix}=-A$

टिप्पणी: (a) विषम समभित आव्यूह में सभी अवयव मुख्य विकर्ण के सापेक्ष समान दूरी पर परिमाण में समान किन्तु एक दूसरे के ऋणात्मक होते हैं अर्थात् $a_{ij}=-a_{ji}$.

(b) विषम समभित आव्यूह के मुख्य विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं, क्योंकि परिभाषा से $a_{ij}=-a_{ji}$ में यदि $i=1, j=1$ तो

$$a_{11}=-a_{11}$$

$$\Rightarrow \quad 2a_{11}=0$$

अतः $$a_{11}=0=a_{22}=\ldots a_{nn}$$

(c) यदि दो आव्यूह A तथा B योग व गुणन के लिए अनुकुलनीय हो, तो

(i) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$ (ii) $(KA)^T=KA^T$, जहाँ K एक अदिश राशि है। (iii) $(AB)^T=B^TA^T$

(d) यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तो–

(i) $A+A^T$ एक समभित आव्यूह होता है। (ii) $A-A^T$ एक विषम समभित आव्यूह होता है।

(iii) AA^T तथा A^TA समभित आव्यूह होता है। (iv) $\left(A^T\right)^T=A$

(e) प्रत्येक वर्ग आव्यूह को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right),$$

जहाँ A एक वर्ग आव्यूह है।

$A + A^T$ एक सममित आव्यूह है।

तथा $A - A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(f) एक ही क्रम के दो आव्यूह समान आव्यूह कहलाते हैं यदि उनके संगत अवयव समान हैं।

जैसे- $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

समान आव्यूह है तो संगत अवयव भी समान होंगे

अर्थात् $b_{11} = 2,\ b_{12} = -2,\ b_{13} = 0$

$b_{21} = 3,\ b_{22} = -4,\ b_{23} = 2$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. आव्यूह A का क्रम 3×5 है तथा R, A की पंक्ति आव्यूह है तो आव्यूह R का क्रम लिखिए।

हल: $\because$ आव्यूह A का क्रम 3×5 है।

$\therefore$ A की प्रत्येक पंक्ति में 5 अवयव है।

अतः आव्यूह R का क्रम 1×5 है।

उदाहरण-2. एक 2×3 क्रम की आव्यूह $A = [a_{ij}]$ लिखिए जिसके अवयव (i) $a_{ij} = 2i + j$; (ii) $a_{ij} = i^2 - j^2$ हैं।

हल: (i) $a_{ij} = 2i + j$ दिया गया आव्यूह 2×3 क्रम का है अतः $i = 1,\ 2$ तथा $j = 1,\ 2,\ 3$

$\therefore$ $a_{11} = 2 + 1 = 3,\ a_{12} = 2 + 2 = 4,\ a_{13} = 2 + 3 = 5$

$a_{21} = 4 + 1 = 5,\ a_{22} = 4 + 2 = 6,\ a_{23} = 4 + 3 = 7$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ है।

(ii) $a_{ij} = i^2 - j^2$ दिया गया आव्यूह 2×3 क्रम का है अतः $i = 1,\ 2$ तथा $j = 1,\ 2,\ 3$.

$\therefore$ $a_{11} = 1^2 - 1^2 = 0,\ a_{12} = 1^2 - 2^2 = -3,\ a_{13} = 1^2 - 3^2 = -8$

$a_{21} = 2^2 - 1^2 = 3,\ a_{22} = 2^2 - 2^2 = 0,\ a_{23} = 2^2 - 3^2 = -5$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ है।

उदाहरण-3. x, y तथा z के किन मानों के लिए आव्यूह A तथा B समान आव्यूह हैं, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & x+3 \\ y-4 & 4 & 6 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 2z \end{bmatrix}$$

हल: $\because$ A तथा B समान आव्यूह हैं तथा इनका क्रम भी समान है।

$\therefore$ संगत अवयव बराबर होंगे।

अतः $x + 3 = 6,\ y - 4 = -2,$ तथा $2z = 6$

$\Rightarrow$ $x = 3,\ y = 2$ तथा $z = 3$

उदाहरण-4. यदि $\begin{bmatrix} 2x+y & 3 & x-2y \\ a-b & 2a+b & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ हो तो x, y, a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\because$ दोनों आव्यूह समान क्रम के समान आव्यूह हैं, अतः इनके संगत अवयव समान होंगे।

$\therefore$ $$2x+y=3 \quad (1)$$

$$x-2y=4 \quad (2)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

$$x=2, \; y=-1$$

पुनः $$a-b=4 \quad (3)$$

$$2a+b=-1 \quad (4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$a=1, \; b=-3$$

$\therefore$ $$x=2, \; y=-1, \; a=1, \; b=-3$$

प्रश्नमाला 3.1

1. यदि आव्यूह $A=[a_{ij}]_{2\times 4}$ हो, तो A में अवयवों की संख्या लिखिए।
2. 4×4 का इकाई आव्यूह लिखिए।
3. यदि $\begin{bmatrix} k+4 & -1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ तो a का मान ज्ञात कीजिए।
4. 6 अवयवों वाले आव्यूह के सम्भावित क्रम क्या होंगे?
5. 2×2 क्रम का आव्यूह $A=[a_{ij}]$ ज्ञात कीजिए जिसके अवयव

   (i) $a_{ij}=\dfrac{2i-j}{3i+j}$ (ii) $a_{ij}=\dfrac{(i+2j)^2}{2i}$ (iii) $a_{ij}=2i-3j$

6. एक 2×3 क्रम का आव्यूह $A=a_{ij}$ ज्ञात कीजिए जिसके अवयव $a_{ij}=\dfrac{1}{2}|2i-3j|$ हैं।
7. यदि $\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & ab \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।
8. यदि $\begin{bmatrix} 2x & 3x+y \\ -x+z & 3y-2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ हो, तो x, y, z व p के मान ज्ञात कीजिए।
9. a, b व c के किन मानों के लिए आव्यूह A तथा B समान आव्यूह हैं। जहाँ

$$A=\begin{bmatrix} a-2 & 3 & 2c \\ 12c & b+2 & bc \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} b & c & 6 \\ 6b & a & 3b \end{bmatrix}$$

3.06 आव्यूह पर संक्रियाएं (Operations on matrix)

1. योग (Addition)

दोनों आव्यूह A व B योग के लिए अनुकूलनीय होती हैं यदि वे एक ही क्रम के हो। इनका योग भी एक आव्यूह होता है, जिसके अवयव आव्यूह A व B के संगत अवयवों के योग के बराबर होते हैं। इसे $A+B$ से व्यक्त करते हैं। अतः यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ हों, तो $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

जैसे- (i) यदि $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ तथा $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ हो, तो

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ हों, तो

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+4 & 5+2 & -3-1 \\ 4+1 & 0+3 & 6+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

2. व्यवकलन (Subtraction)

दो आव्यूह A व B व्यवकलन के लिए अनुकूलनीय होते हैं यदि वे एक ही क्रम के हो। इनका व्यवकलन भी एक आव्यूह होता है, जिसके अवयव आव्यूह A व B के संगत अवयवों के व्यवकलन के बराबर होते हैं इसे $A-B$ से व्यक्त करते है।

अतः यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ हों, तो $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

जैसे– (i) यदि $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ तथा $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ हो, तो

$$A-B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ हों, तो

$$A-B=\begin{bmatrix} 5-2 & 3-4 & 7-6 \\ 6-3 & 2-4 & 1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

3. गुणन (Multiplication)

दो आव्यूह A व B गुणन के लिए अनुकूलनीय होते हैं यदि आव्यूह A के स्तम्भों की संख्या B के पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। इनका गुणन भी एक आव्यूह होता है, जिसके पंक्ति व स्तम्भ के अवयव A की i वीं पंक्ति तथा B के j वें स्तम्भ के संगत अवयवों के गुणनफल के योग के बराबर होता है। इसे AB से व्यक्त करते हैं।

आव्यूह AB का क्रम $=A$ की पंक्तियों की संख्या $\times B$ के स्तम्भों की संख्या

अतः $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ तथा $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ हो, तो

AB का क्रम $m\times \boxed{p \quad\quad p}\times n=m\times n$ होगा।

जैसे- (i) यदि $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ तथा $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ हों, तो

AB का क्रम $2\times \boxed{2 \quad\quad 2}\times 3=2\times 3$ होगा।

$$\therefore \quad AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}$ तो $B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 6 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}$

AB का क्रम $2\times\boxed{2 \quad 2}\times2=2\times2$ होगा।

अतः $AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 4\\ 6 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2\times5+3\times6 & 2\times4+3\times0\\ -1\times5+4\times6 & -1\times4+4\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10+18 & 8+0\\ -5+24 & -4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28 & 8\\ 19 & -4\end{bmatrix}_{2\times2}$$

4. अदिश गुणन (Scalar multiplication)

आव्यूह A को किसी अशून्य अदिश संख्या n से गुणा करने पर प्राप्त आव्यूह nA अदिश गुणन आव्यूह कहलाता है। इसका प्रत्येक अवयव आव्यूह A का n गुना होता है।

अतः $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ हो, तो $nA=[na_{ij}]_{m\times n}$

जैसे- (i) यदि $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}_{2\times3}$ हो, तो

$$nA=n\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}na_{11} & na_{12} & na_{13}\\ na_{21} & na_{22} & na_{23}\end{bmatrix}$$

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -5\end{bmatrix}_{2\times2}$ तो $3A=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 3 & -15\end{bmatrix}_{2\times2}$

तथा $-5A=\begin{bmatrix}-10 & -15\\ -5 & 25\end{bmatrix}_{2\times2}$

3.07 आव्यूह योग–गुणधर्म (Properties of matrix addition)

(i) क्रम विनिमेयता (Commutativity)

यदि A तथा B दो समान क्रम के आव्यूह हों तो $A+B=B+A$

माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ तो स्पष्टतः $A+B$ तथा $B+A$ समान क्रम के आव्यूह हैं।

$$[A+B]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}$$
$$=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$
$$=[b_{ij}+a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{(योग क्रम विनिमेय गुणधर्म से)}$$
$$=[b_{ij}]_{m\times n}+[a_{ij}]_{m\times n}$$
$$=[B+A]_{m\times n}$$

$\therefore \quad A+B=B+A$

(ii) साहचर्यता (Associativity)

यदि A, B तथा C तीन समान क्रम के आव्यूह हों, तो $(A+B)+C = A+(B+C)$

माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$; $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ तथा $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ स्पष्टतः $(A+B)+C$ तथा $A+(B+C)$ समान क्रम के आव्यूह हैं।

$$\left[(A+B)+C\right]_{m\times n} = \left([a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}\right)+[c_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n}$$

$$=\left[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$=\left[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right]_{m\times n} \qquad \text{(साहचर्यता गुणधर्म से)}$$

$$=[a_{ij}]_{m\times n}+([b_{ij}]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n})$$

$$=\left[A+(B+C)\right]_{m\times n}$$

$\therefore \qquad (A+B)+C = A+(B+C)$

(iii) योज्य तत्समक (Additive identity)

एक $m\times n$ क्रम का शून्य आव्यूह O, $m\times n$ क्रम के आव्यूह A का तत्समक आव्यूह कहलाता है। क्योंकि

$$A+O=A=O+A$$

(iv) योज्य प्रतिलाम (Additive inverse)

आव्यूह $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ के लिए $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ है, तो आव्यूह $-A$ आव्यूह A का योज्य प्रतिलोम आव्यूह कहलाता है।

क्योंकि $\qquad A+(-A)=O=(-A)+A$, जहाँ O, $m\times n$ का शून्य आव्यूह है।

माना $\qquad A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तो $-A=-[a_{ij}]_{m\times n}=[-a_{ij}]_{m\times n}$

$\therefore \qquad A+(-A)=[a_{ij}]_{m\times n}+[-a_{ij}]_{m\times n}=0$

तथा $\qquad (-A)+A=A+(-A)$ $\qquad$ (मैट्रिक्स योग क्रम विनिमेय से)

$$A+(-A)=O=(-A)+A$$

(v) निरसन नियम (Cancellation law)

यदि A, B तथा C एक ही क्रम के तीन आव्यूह हैं, तो

$A+B=A+C \Rightarrow B=C$ $\qquad$ (वाम निरसन नियम)

तथा $\qquad B+A=C+A \Rightarrow B=C$ $\qquad$ (दक्षिण निरसन नियम)

3.08 आव्यूह गुणन–गुणधर्म (Properties of matrix multiplication)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity)

सामान्यतया आव्यूह गुणन के लिए क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन नहीं करते हैं। इस हेतु निम्न स्थितियों पर विचार कीजिए–

(a) यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात किया जा सकता हैं परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि ये बराबर हों।

जैसे $\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ हों, तो

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

तथा $$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अतः $AB \neq BA$

(b) यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ हो, तो आव्यूह AB ज्ञात किया जा सकता है परन्तु BA ज्ञात करना सम्भव नहीं है अतः क्रमविनिमेयता का प्रश्न ही नहीं है।

(c) यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात किया जा सकता है परन्तु इनके क्रम समान नहीं होंगे अतः $AB \neq BA$

टिप्पणीः उपर्युक्त स्थितियों से यह निष्कर्ष कदापि नहीं लिया जा सकता है कि $AB = BA$ सदैव असंभव हो किसी विशेष परिस्थिति में $AB = BA$ भी हो सकता है।

(ii) साहचर्यता (Associativity)

यदि आव्यूह A, B तथा C आवश्यक गुणन AB तथा BC के लिए अनुकूलनीय हों, तो आव्यूह गुणन के लिए साहचर्य नियम का पालन करते हैं

अर्थात् $$(AB)C = A(BC)$$

(iii) तत्समकता (Identity)

इकाई आव्यूह ही आव्यूह गुणन के लिए तत्समक आव्यूह कहलाता है अर्थात् यदि A एक $m \times n$ क्रम का आव्यूह है, तो

$$I_m A = A = AI_n$$

जहाँ I_m, m क्रम का इकाई आव्यूह तथा I_n, n क्रम का इकाई आव्यूह है।

टिप्पणीः वर्ग आव्यूह A के लिए उसी क्रम का इकाई आव्यूह तत्समक आव्यूह का कार्य करता है तथा इस स्थिति में $AI = A = IA$

(iv) बंटनता (Distributivity)

यदि आव्यूह A, B तथा C आवश्यक योग एवं गुणन के लिए अनुकूलनीय हो तो आव्यूह गुणन के लिए बंटन नियम का पालन करता है।

(a) $A(B+C) = AB + AC$

(b) $(A+B)C = AC + BC$

3.09 आव्यूह–अदिश गुणन–गुणधर्म (Properties of scalar multiplication of a matirx)

यदि A तथा B दो समान क्रम की आव्यूह हैं तथा k व ℓ दो अदिश राशियाँ है, तो

(i) $(k+\ell)A = kA + \ell A$ (ii) $k(A+B) = kA + kB$

(iii) $k(\ell A) = \ell(kA) = (\ell k)A$ (iv) $1.A = A$

(v) $(-1)A = -A$

3.10 गुणन प्रतिलोमी आव्यूह (Multiplicative inverse matrix)

यदि समान क्रम के दो वर्ग आव्यूह A तथा B का गुणन इकाई आव्यूह हो तो B को A का गुणन प्रतिलोमी आव्यूह तथा A को B का गुणन प्रतिलोमी आव्यूह कहते हैं। अर्थात्

यदि $AB = I = BA$ हो, तो A तथा B परस्पर गुणन प्रतिलोम कहलाते हैं। जैसे–

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ हों, तो

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&5&4\\3&7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&2\\-2&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-4+2&-4+2+2&2+0-2\\6-10+4&-8+5+4&4+0-4\\9-14+5&-12+7+5&6+0-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}=I_3$$

तथा
$$BA=\begin{bmatrix}3&-4&2\\-2&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&5&4\\3&7&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-8+6&6-20+14&6-16+10\\-2+2+0&-4+5+0&-4+4+0\\1+2-3&2+5-7&2+4-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}=I_3$$

अतः $AB=I_3=BA$ अर्थात् A तथा B परस्पर गुणन प्रतिलोमी आव्यूह हैं।

3.11 शून्य के भाजक (Zero divisors)

यदि दो अशून्य आव्यूह A तथा B का गुणन AB एक शून्य आव्यूह हो तो A तथा B शून्य के भाजक कहलाते हैं। जैसे–

अतः $A=\begin{bmatrix}1&3\\1&3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ शून्य के भाजक हैं।

$$AB=\begin{bmatrix}1&3\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+1&1-1\\-3+3&3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$$

अतः A तथा B शून्य के भाजक हैं।

3.12 वर्ग आव्यूह की धन पूर्णांक घात (Positive integral power of a square matrix)

एक वर्ग आव्यूह A को स्वयं से गुणा करने पर गुणनफल को A^2 से, A^2 को पुनः A से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को A^3 से तथा इसी प्रकार आव्यूह A^{n-1} को जब A से गुणा करते है तो प्राप्त आव्यूह को A^n से व्यक्त करते हैं अर्थात्

$$AA=A^2 \qquad A^2A=A^3$$

तथा $A^{n-1}A=A^n$

जैसे $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$ हों, तो

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 3+12\\2+8 & 6+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 15\\10 & 22\end{bmatrix}$$

तथा $$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}7 & 15\\10 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7+30 & 21+60\\10+44 & 30+88\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 81\\54 & 118\end{bmatrix}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-5. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & 3 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो $2A - 3B$ ज्ञात कीजिए।

हलः $\because$ $$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$2A=2\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8 & -2\\6 & 4 & 10\end{bmatrix} \qquad (1)$$

तथा $$3B=3\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\-3 & 9 & 12\end{bmatrix}$$

$$-3B=\begin{bmatrix}-6 & -3 & 0\\3 & -9 & -12\end{bmatrix}$$

अतः $2A-3B=2A+(-3B)$

$$=\begin{bmatrix}4 & 8 & -2\\6 & 4 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & -3 & 0\\3 & -9 & -12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4-6 & 8-3 & -2+0\\6+3 & 4-9 & 10-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -2\\9 & -5 & -2\end{bmatrix}$$

उदाहरण-6. यदि $B=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\7 & 1 & 6\end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A ज्ञात कीजिए जहाँ $2A-3B+5C=O$, जहाँ $O, 2\times 3$ क्रम का शून्य आव्यूह है।

हलः $\because$ $$2A-3B+5C=O$$

$\therefore$ $$2A=3B-5C+O$$

$$=3\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}+(-5)\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\7 & 1 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-6 & 6 & 0\\9 & 3 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10\\-35 & -5 & -30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-6-10+0 & 6+0+0 & 0+10+0\\9-35+0 & 3-5+0 & 12-30+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16 & 6 & 10\\ -26 & -2 & -18\end{bmatrix}$$

अतः $$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-16 & 6 & 10\\ -26 & -2 & -18\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-8 & 3 & 5\\ -13 & -1 & -9\end{bmatrix}$$

उदाहरण-7. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}6 & -7 & 0\\ -1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो AB, BA अथवा दोनों, जिनका भी अस्तित्व हो, ज्ञात कीजिए।

हलः $\because$ A का क्रम 2×3 तथा B का क्रम 3×3 है।

$\therefore$ AB का अस्तित्व है जबकि BA का नहीं।

अतः $$AB=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -7 & 0\\ -1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24-2-5 & -28+4+0 & 0+10-15\\ 6-0+3 & -7+0+0 & 0+0+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & -24 & -5\\ 9 & -7 & 9\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

उदाहरण-8. x के किन मानों के लिए

$$\begin{bmatrix}1 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 15 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ x\end{bmatrix}=O$$

जहाँ $O, 1\times 1$ क्रम की शून्य आव्यूह है।

हलः $$\begin{bmatrix}1 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 15 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ x\end{bmatrix}=O$$

या $$\begin{bmatrix}1+2x+15 & 3+5x+3 & 2+x+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ x\end{bmatrix}=O$$

या $$\begin{bmatrix}2x+16 & 5x+6 & x+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ x\end{bmatrix}=O$$

या $$\begin{bmatrix}2x+16+10x+12+x^2+4x\end{bmatrix}=O$$

या $\left[x^2+16x+28\right]=0$

या $x^2+16x+28=0$

या $(x+2)(x+14)=0$

$\Rightarrow x+2=0$ या $x+14=0$

$\Rightarrow x=-2$ या $x=-14$

उदाहरण-9. यदि $A-2I=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो AA^T ज्ञात कीजिए, जहाँ I, 3×3 क्रम का इकाई आव्यूह है।

हल: $\because$ $$A-2I=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

अतः $$AA^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+4+9 & 2-6-3 & -3-2+6\\ 2-6-3 & 4+9+1 & -6+3-2\\ -3-2+6 & -6+3-2 & 9+1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -7 & 1\\ -7 & 14 & -5\\ 1 & -5 & 14\end{bmatrix}$$

उदाहरण-10. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:

(i) $A^2=2A$ (ii) $A^3=4A$

हल: (i) वाम पक्ष $A^2=AA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & -1-1\\ -1-1 & 1+1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=2A=\text{दक्षिण पक्ष}$$

(ii) वाम पक्ष $A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & -2-2 \\ -2-2 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4A = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण-11. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए

$$A(B+C) = AB + AC$$

हलः वाम पक्ष $= A(B+C)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-12 & 2+18 & 16+15 \\ 3-8 & 1+12 & 8+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 20 & 31 \\ -5 & 13 & 18 \end{bmatrix} \quad (1)$$

दक्षिण पक्ष $= AB + AC$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-9 & -4+6 & 4+12 \\ 1-6 & -2+4 & 2+8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4-3 & 6+12 & 12+3 \\ 2-2 & 3+8 & 6+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 & 16 \\ -5 & 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 20 & 31 \\ -5 & 13 & 18 \end{bmatrix} \quad (2)$$

(1) व (2) से वाम पक्ष $=$ दक्षिण पक्ष

प्रश्नमाला 3.2

1. यदि $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो $A+B$ व $A-B$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $A+B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ तथा $A-B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A व B ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह C ज्ञात कीजिए, जहाँ $A+2B+C=O$ जहाँ O शून्य आव्यूह है।

4. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ हो, तो $3A^2-2B$ ज्ञात कीजिए।

5. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो दिखाओं कि $AB\neq BA$

6. यदि $f(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तो प्रदर्शित कीजिए: $f(A)f(B)=f(A+B)$

7. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}6 & -7 & 0\\ -1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ हों, तो सिद्ध कीजिए : $(AB)^T=B^TA^T$

8. सिद्ध कीजिए: $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\left[ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx\right]$

9. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा I तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^2-3A+9I=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 4\\ 2 & 8 & -3\end{bmatrix}$$

10. यदि $\begin{bmatrix}a & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ 4\\ 1\end{bmatrix}=O$, जहाँ O शून्य आव्यूह है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & 1\\ b & -1\end{bmatrix}$ तथा $(A+B)^2=A^2+B^2$ हो, तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\frac{x}{2}\\ \tan\frac{x}{2} & 0\end{bmatrix}$ तथा I, 2×2 क्रम का इकाई आव्यूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I+A=(I-A)\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$$

13. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो K का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^2=8A+KI$

14. यदि $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 3\\ -2 & -10 & 6\\ 13 & 20 & -9\end{bmatrix}$ हो, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{bmatrix}$, जहाँ n धन पूर्णांक है।

विविध प्रश्नमाला–3

1. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो A^2 ज्ञात कीजिए।

2. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो $(A-2I).(A-3I)$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5\\ -1\end{bmatrix}$ हो, तो AB ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A=\begin{bmatrix}-i & o\\ o & i\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}o & i\\ i & o\end{bmatrix}$, जहाँ $i=\sqrt{-1}$ हों, तो BA ज्ञात कीजिए।

5. यदि $A-B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ तथा $A+B=\begin{bmatrix}3 & 5 & -7\\ -1 & 1 & 4\\ 11 & 8 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A तथा B ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ -y-2 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

7. आव्यूह A का क्रम 3×4 है तथा B इस प्रकार का आव्यूह है कि A^TB एवं AB^T दोनों ही परिभाषित हैं तो B का क्रम लिखिए।

8. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 7 & 4\\ 1 & -x & -3\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

9. एक 3×3 क्रम का आव्यूह $B=[b_{ij}]$ लिखिए जिनके अवयव $b_{ij}=(i)(j)$ हैं।

10. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -5 & -6\end{bmatrix}$ हों, तो $A+B^T$ ज्ञात कीजिए।

11. आव्यूह A को सममित व विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ $A=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ है।

12. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $A+A^T$ एक सममित आव्यूह है।

(iii) $A-A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(iv) AA^T तथा A^TA सममित आव्यूह है।

13. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $3A-2B+C$ एक शून्य आव्यूह है तो आव्यूह C लिखिए।

14. एक 2×3 क्रम का आव्यूह $B=[b_{ij}]$ लिखिए जिसके अवयव $b_{ij}=\dfrac{(i+2j)^2}{2}$ हैं।

15. यदि $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 7\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह ABC के प्रथम पंक्ति के अवयव ज्ञात कीजिए।

16. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ हो, तो AA^T ज्ञात कीजिए।

17. यदि $\begin{bmatrix}1 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=O$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

18. यदि $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि: $B^2-(a+d)B=(bc-ad)I_2$, जहाँ $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

19. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो $(aA+bB)(aA-bB)$ को आव्यूह A के रूप में ज्ञात कीजिए।

20. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि: $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$

21. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ तथा $A^2=kA-2I_2$, हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $A=\begin{bmatrix}i & o\\ o & -i\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}o & i\\ i & o\end{bmatrix}$ जहाँ $i=\sqrt{-1}$ हो, तो निम्नलिखित सम्बन्धों का सत्यापन कीजिए:

(i) $A^2=B^2=C^2=-I_2$

(ii) $AB=-BA=-C$

23. यदि $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $f(A)=A^2-5A+7I$ हो, तो $f(A)$ ज्ञात कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए किः

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \propto & \cos \propto \sin \propto \\ \cos \propto \sin \propto & \sin^2 \propto \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}=O$$

जबकि $\propto - \beta = (2m-1)\frac{\pi}{2}; m \in N$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. बन्द कोष्ठक में पंक्ति तथा स्तम्भों के आयताकार या वर्गाकार विन्यास में लिखी हुयी संख्याओं के व्यवस्थित क्रम को आव्यूह कहते हैं।
2. **आव्यूह के प्रकारः** पंक्ति आव्यूह, स्तम्भ आव्यूह, शून्य आव्यूह, वर्ग आव्यूह, विकर्ण आव्यूह, अदिश आव्यूह, इकाई आव्यूह, ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह, निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह, परिवर्त आव्यूह, सममित आव्यूह, विषम सममित आव्यूह इत्यादि।
3. **आव्यूह का योग एवं व्यवकलनः** दो समान क्रम के आव्यूहों का योग अथवा व्यवकलन इनके ही क्रम के आव्यूह होते हैं, जो इनके संगत अवयवों को क्रमशः जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होते हैं।
4. **आव्यूह का गुणनः** आव्यूह A तथा B का गुणन AB सम्भव होगा यदि A के स्तम्भों की संख्या, B की पंक्तिओं की संख्या के समान हो तथा AB आव्यूह का अवयव $(AB)_{ij}$ आव्यूह A की i वी पंक्ति के अवयवों को आव्यूह B के j वें स्तम्भ के संगत अवयवों से गुणा कर उनके योग से प्राप्त होता है।
5. **अदिश गुणनः** आव्यूह A को किसी अशून्य अदिश संख्या n से गुणा करने पर प्राप्त आव्यूह nA अदिश गुणन आव्यूह कहलाता है। इसका प्रत्येक अवयव आव्यूह A का n गुणा होता है।
6. आव्यूह योग के लिए क्रमविनिमेय एवं साहचर्य गुणधर्म का पालन करते हैं जबकि व्यवकलन में नहीं।
7. आव्यूह गुणन के लिए समान्यतया क्रमविनिमेय गुणधर्म पालन नहीं करते हैं जबकि साहचर्य गुणधर्म का पालन करते हैं।
8. **परिवर्त आव्यूहः** यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तो $A^T=[a_{ji}]_{n\times m}$
9. **सममित आव्यूहः** $A^T=A$
10. **विषम सममित आव्यूहः** $A^T=-A$
11. यदि A एक वर्ग आव्यूह है, तो
    (i) $A+A^T$ एक सममित आव्यूह होता है।
    (ii) $A-A^T$ एक विषम सममित आव्यूह होता है।
    (iii) AA^T एवं A^TA सममित आव्यूह होता है।
    (iv) $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$
12. यदि दो आव्यूह A तथा B योग व गुणन के लिए अनुकूलनीय हो, तो
    (i) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$
    (ii) $(A^T)^T=A$
    (iii) $(AB)^T=B^T.A^T$
    (iv) $(kA)^T=k.A^T$, जहाँ $k\neq 0$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. 8

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $a = 6$

4. $1\times6,\ 6\times1,\ 2\times3,\ 3\times2$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/7 & 1/4 \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} 9/2 & 25/2 \\ 9/4 & 9 \end{bmatrix}$; (iii) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$

7. $a = 4, b = 2$ या $a = 2, b = 4$

8. $x = 2, y = -1, z = -2, p = 0$

9. $a = 1, b = 6, c = 3$

प्रश्नमाला 3.2

1. $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\ A-B = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 38 & -11 \end{bmatrix}$

10. $a = -1, -2$

11. $a = 1, b = 4$

13. $k = -7$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

विविध प्रश्नमाला–3

1. $A^2 = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. O

3. $\begin{bmatrix} 3 \\ -11 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

6. $x = -4, y = -7$

7. 3×4

8. -4

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 6 & 7/2 \\ 7/2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -16 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 9/2 & 25/2 & 49/2 \\ 8 & 18 & 32 \end{bmatrix}$

15. 8

16. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ या I_2

17. $-9/8$

19. $(a^2 + b^2)A$

21. $k = 1$

23. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$