Chapter -8 आन्तरगणन और बाह्यगणन
INTERPOLATION-EXTRAPOLATION

बहुविकल्पीय प्रश्न (Multiple choice Questions)

1. आन्तरगणन की सरलतम विधि है।
The simplest method of interpolation is
   a. बाह्यगणन (Extrapolation)
   b. बिन्दुरेखीय (Graphic)
   c. लैगरेन्ज विधि (lagrange method)
   d. उपयुक्त मे से कोई नहीं (none of these)

2. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की रीतिया है
Methods of interpolation and extrapolation are:-
   a. बिन्दुरेखीय रीति (Graphical method
   b. बीजगणितीय रीतियाँ (Algebraic mehtod)
   c. दोनो a और b (Both a & b)
   d. कोई नहीं (none of there)

3. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की मुख्य बीजगणितीय रीतियाँ हैं–
Algebric method of interpolation are :-
   a. द्विपद विस्तार रीति (Binomial expansion method)
   b. न्यूटन–गॉस अग्रगामी रीति (newton's method of advancing difference)
   c. लैगरेंज की रीति (lagrange's method)
   d. सभी (All)

4. जब x श्रेणी में असमान अन्तर हो तो आन्तरगणन के लिए उचित रीति है।
(When there is unequal differece is x series than appropriate method for is interpolation is)
   a. द्विपद विस्तार रीति (Binomial expansion method
   b. लैगरेंज की रीति (lagrange's method)
   c. न्यूटन रीति (newotn's method)
   d. स्टर्लिंग रीति (stirling method)

5. द्विपद विस्तार रीति आधारित हैं। (Binomial expansion is based on)
   a. गुणन प्रमेय पर (multiplication theorem)
   b. योग प्रमेय पर (additive theorem)
   c. द्विपद प्रमेय पर (Binomial theorem)
   d. उपर्युक्त मे से कोई नही (None of these)

6. आन्तरगणन व बाह्यगणन की सर्वश्रेष्ठ रीति, जो किसी भी प्रकार के प्रश्न मे प्रयोग की जा सकती है
(Best method of interpolation that can be used in any type of question)
   a. न्यूटन रीति (Newton's method)
   b. द्विपद–विस्तार रीति (Binomial Expansion)
   c. लैगरेंज रीति (Lagrange's Method)
   d. स्टर्लिंग रीति (Sterling's formula)

7. आन्तरगणन की विधियाँ है (Methods of interpolation are)
   a. 2 b. 3
   d. 4
   d. कोई नहीं None of these

8. भविष्य का पूर्वागमन प्रदान करता है
(Gives forecast for the future)
   a. बाह्यगणन (Extra polation)
   b. आन्तरगणन (Interpolation)
   c. a व b दोनों (Both a and b)
   d. इनमें से कोई नहीं (none of these)

9. सूत्र $(y-1)^3=0$, का द्विपद विस्तार है
Binomial expansion of formula $(y-1)^3=0$)
   a. $y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 0$
   b. $y_3 + 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 0$
   c. $y_3 + 3y_2 - 3y_1 + y_0 = 0$
   d. $y_3 - 3y_2 + 3y_1 + y_0 = 0$

10. आन्तरगणन द्वारा प्राप्त मूल्य
Value obtained by interpolation
   a. वास्तविक मूल्य के बराबर होता हैं
   (Is equal to actual value)
   b. वास्तविक मूल्य से कम होता है
   (Is less than actual value)
   c. वास्तविक मूल्य से अधिक होता है
   (Is more than actual value)
   d. वास्तविक मूल्य का अधिकतम सम्भावित अनुमान होता है ।
   (Is the maximum possible estimate of actual value)

ANSWER

1 - b, 2 - c , 3 - d, 4 - b, 5 - c, 6 - c, 7 - a, 8 - a,9 - a, 10 - d

लघुउत्तरीय प्रश्न (Short Answer Question)

1. आन्तरगणन से आप कया समझते है?
What is interpolation ?

Ans. किसी गणितीय सारणी मे दिए हुए मानो के बीच वाले मानो को ज्ञात करना है।
Interpolation means determining a value from the existing values in a given data set. It is a process of determining the unknown values that lie in between the know data points.

2. बाह्यगणन की परिभाषा?
Definition of extrapolation ?

Ans, जब ज्ञात आँकड़ो के आधाार पर किसी भावी समय के लिए संमको या आँकड़ों का अनुमान लगाना होता हैं।

Extrapolation refers to estimating an unknown value based on extending a known sequence of value or facts.

3. आन्तरगणन एवं बाह्यणन की मान्यताऐं क्या हैं जिन पर आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की रीतियाँ निर्भर करती है?

Write the assumption of interpolation and extrapolation?

Ans. आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की मान्यताऐं निम्नलिखित है :-

(i) पद श्रेणियों का पारस्परिक सम्ब्न्ध (Mutual inter dependence of series)- आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की यह मान्यता है कि पदो-श्रेणियाँ आपस मे सम्बन्धित है। पहली पद-श्रेणी स्वतन्त्र तथा दूसरी पद-श्रेणी आश्रित हैं।

(ii) आकस्मिक उतार-चढ़ाव का न होना (No sudden fluctuations)- दूसरी महत्वपूर्ण मान्यता यह है कि एक समय से दूसरे समय के मध्य समंको मे कोई आकस्मिक उतार-चढ़ाव नहीं है।

(iii) परिवर्तन दर मे एकरूपता एवं नियमितता (Uniformity and regularity in changes) - आन्तरगणन में हमारी यह भी मान्यता होती है कि दो समय विधियों मे समंको मे होने वाले परिवर्तन नियमित और समान दर से होते है।
Assumtion of interpolation and extrapoltion are as follows :-

(i) There are no sudden change in the values of dependent variable from one period to another.

(ii) There is a sort of uniformity in the rise or fall of the values of the dependent variable

(iii) There will be no consecutive missing values in the series .

उपर्युक्त मान्यताएँ पूरी नहीं होती तो आन्तरगणन नही किया जा सकता हैं। यदि किसी काल में आकस्मिक उतार-चढ़ाव है तो पहले उसी का आन्तरगणन किया जाना चाहिए अर्थात् पहले असंगति दूर की जानी चाहिए। इसके बाद आन्तरगान किया जाना चाहिए।

4. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन मे अन्तर लिखिए?

Difference between interpolation and extrapolation?

Ans. उपलब्ध आँकड़ो से भविष्य के किसी समय विशेष के लिए आँकड़ो का अनुमान लगाने के लिए आन्तरगणन एवं बाह्यगणन का उपयोग किया जाता है।

आन्तरणन एवं बाह्यगणन को अन्तर निम्नलिखित है:-

आन्तरगणन	बाह्यगणन
(i) दो सीमान्त बिन्दुओ के मध्य बिन्दु का मूल्य ज्ञात करना 'आन्तरगणन 'कहलाता है। Interpolation means reading a value which lies between two extreme points	(i) दो सीमान्त बिन्दुओ के बाहर के किसी बिन्दु का मूल्य ज्ञात करना 'बाह्यगणन' कहलाता हैं। Extra polation means reading a value which lies outside two extreme values

(ii) आन्तरगणन का उद्देश्य समंक श्रेणी के बीच की रिक्तियों (Gaps) को भरना है। It supplies us the missing link .	(ii) बाह्यगणन का उद्देश्य आँकड़ो के आधार पर भावी आँकडों का अनुमान लगाना होता है। It helps in forecasting

5. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन का क्या महत्व है?

(Write the Importance of Interpolation and Extrapolation ?)

Ans. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की उपयोगिता एवं महत्व निम्नलिखित है:-

(Importance of interpolation and extrapolation are as follows.....)

(i) पूर्वानुमान करने के लिए
(for the prediction of future data)

(ii) तुलनात्मक अध्ययन के लिए
(for comparative study)

(iii) व्यवसायी एवं उद्योगपतियो को लाभ
(Benefit to traders and industrialist)

(iv) आँकड़ो का अभाव
(Lack of data)

6. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की रीतियों को कितने भागो मे विभाजित किया जा सकता है?

Ans. आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की रीतियों को दो वर्गो मे विभाजित किया जा सकता है:-

(i) बिन्दुरेखीय रीति (Graphical method)

(ii) बीजगणितीय रीतियाँ (Algebraic method)

लघुउत्तरीय प्रश्न (Short Answer Question)

7. निम्न से अज्ञात संख्या का आन्तरगणन कीजिए?
Find out the interpolation of unknown number in the following

x	25	30	35	40	45	50
y	55	60	?	72	75	80

Ans.

x	25	30	35	40	45	50
y	55 y_0	60 y_1	? y_2	72 y_3	75 y_4	80 y_5

द्विपद प्रसार द्वारा As per binomial expansion

$(y-1)^5=0$

$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$.....(1)

मान को समी (i) मे रखने पर,

$= 80 - 5 \times 75 + 10 \times 72 - 10 \times y_2 + 5 \times 60 - 55 = 0$

$\Rightarrow \quad 1100 - 430 - 10y_2 = 0$

$\Rightarrow \quad 670 = 10y_2$

$\Rightarrow \quad y_2 = \frac{670}{10}$ or $y_2 = 67$

8. निम्नलिखित सारणी से y_2 ज्ञात कीजिए
Find out y_2 from the following

x	1	2	3	4	5
y	2,0000	?	2.0646	2.0954	2.1253

Ans.

x	1	2	3	4	5
y	2,0000 y_0	? y_1	2.0646 y_2	2.0954 y_3	2.1253 y_4

यहाँ पर प्रश्न मे y के 4 पद मूल्य प्राप्त है।

द्विपद विस्तार (As per binomial expansion)

$(y - 1)^4 = 0$

$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$

मान रखने पर (Keeping value)

$2.1253 - (4 \times 2.0954) + (6 \times 2.0646) - 4y_1 + 2.000 = 0$

or

$2.1253 - 8.3816 + 12.3876 - 4y_1 + 2.0000 = 0$

$2.1253 - 8.3816 + 12.3876 + 2.000 = 4y_1$

or $\quad 8.1313 = 4y_1$

or $\quad y_1 = \frac{8.1313}{4}$

or $\quad y_1 = 2.0328$

दीर्घउत्तरीय प्रश्न (Long Answer Question)

1. द्विपद विस्तार विधि से अज्ञात अंक ज्ञात करें

(By Binomial expansion method find the missing figure

year वर्ष	profit in lac लाभ
2004	50
2005	45
2006	x
2007	38
2008	35
2009	30

Ans.

5वाँ द्विपद प्रसार करेगे :- Binomial expansion

$(y-1)^5 = 0$

or

$y_5 - 5y_4 + 10_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$

मान रखने पर (Putting values)

$30 - 5 \times 35 + 10 \times 38 - 10 \times x + 5 \times 45 - 30 = 0$

or $30 - 175 + 380 - 10x + 225 - 30 = 0$

or $635 - 205 - 10x = 0$

or $430 - 10x = 0$

or $-10x = -430$

or $x = \frac{430}{10}$ or $x = 43$

2. एक जिले की विभिन्न वर्षो की जनसंख्या निम्न है। 2015 की जनसंख्या का अनुमान लगाइये

The population of a district for different years is given below. estimate the population for 2015

वर्ष (year)	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2020
जनख्या (population in thousand)	20	22	26	85	35	?	43

Ans. 2005 की जनसंख्या मे आकस्मिक चढ़ाव है जो कि नही होना चाहिएं अतः सवंप्रथम 2005 की जनसंख्या का आन्तरगणन करना होगा।

वर्ष (year)	x_0 1990	x_1 1995	x_2 2000	x_3 2005	x_4 2010	x_5 2015	x_6 2020
जनख्या (population in thousand)	20 y_0	22 y_1	26 y_2	? y_3	35 y_4	? y_5	43 y_6

y श्रेणी के 5 मूल्य ज्ञात है और 2 अज्ञात है। इसलिए 5वाँ द्विपद का विस्तार दो बार किया जाएगा।

$\Delta^5_0 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$ ...(i)

$\Delta^5_1 = y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 + 5y_2 - y_1 = 0$...(ii)

मान को दोनो समीकरणे पर रखने पर :-

$y_5 - (5\times35) + (10\times y_3) - (10-26) + (5\times22) - 20 = 0$

$\Rightarrow y_5 - 175 + 10y_3 - 260 + 110 - 20 = 0$

$\Rightarrow y_5 + 10y_3 - 455 + 110 = 0$

$\Rightarrow y_5 + 10y_3 = 345$.....(iii)

दूसरे समीकरण मान स्थापित करने पर :-

$43 - 5y_5 + (10\times35) - 10y_3 + (5\times26) - 22 = 0$

$\Rightarrow 43 - 5y_5 + 350 - 10y_3 + 130 - 22 = 0$

$\Rightarrow -5y_5 - 10y_3 + 523 - 22 = 0$

$\Rightarrow -5y_5 - 10y_3 = -501$.....(iv)

समीकरण (iii) और (iv) जोड़ने पर :-

$$\begin{array}{rr} y_5 + 10y_3 & = 345 \\ -5y_5 - 10y_3 & = -501 \\ \hline -4y_5 & = -156 \end{array}$$

or $y_5 = \frac{156}{4}$

or $y_5 = 39$

∴ population is 2015 = 39 thousand

अब y_3 का मूल्य निकालने के लिए y_5 का मान समीकरण (iii) में रखने पर :-

$y_5 + 10y_3 = 345$

$\Rightarrow 39 + 10y_3 = 345$

$\Rightarrow 10y_3 = 345 - 39$

$10y_3 = 306$

or, $y_3 = \frac{306}{10}$

or, $y_3 = 30.6$

∴ population is 2005 = 30.6 thousand

3. विभिन्न वर्षो के लिए किसी जिले कि जनसंख्या नीचे दी गई है। 2023 के लिए जनसंख्या ज्ञात कीजिए.

The population of a district is given below for different years . find the population for 2023

वर्ष year	2018	2019	2020	2021	2022
जनसंख्या (population in millon)	7	9	36	14	16

Ans. प्रश्न में 2020 की जनसंख्या में आकस्मिक चढ़ाव है। अतः पहले 2020 की जनसंख्या का आन्तरगणन किया जाता

वर्ष year	x_0 2018	x_1 2019	x_2 2020	x_3 2021	x_4 2022	x_5 2023
जनसंख्या (population is millon)	7 y_0	9 y_1	? y_2	14 y_3	16 y_4	? y_5

4 मूल्य ज्ञात है $(y-1)^4 = 0$ का द्विपद विस्तार

(Biromial expansion)

$(y-1)^4 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$

मूल्य रखने पर (putting value)

$16 - (4 \times 14) + 6y_2 - (4 \times 9) + 7 = 0$

$\Rightarrow 16 - 56 + 6y_2 - 36 + 7 = 0$

$\Rightarrow 6y_2 = 56 + 36 - 16 - 7$

$\Rightarrow 6y_2 = 69$

$= y_2 = \frac{69}{6}$

or$_1$ $y_2 = 11.5$ million

अब 2023 के लिए बाह्यगणन

now extrapolation for 2023

$(y-1)^5 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$

मूल्य रखने पर (putting value)

$y_5 - (5 \times 16) + (10 \times 14) - (10 \times 11.5) + (5 \times 9) - 7 = 0$

$\Rightarrow y_5 - 80 + 140 - 115 + 45 - 7 = 0$

$\Rightarrow y_5 = 202 - 185$

or $y_5 = 17$ millon

अत : 2023 की जनसंख्या 17 million होगी।

so , 2023 popultion is 17 million