**प्रश्न 1. कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए :**

(*i*) सभी वृत्त ________ होते हैं। (सर्वांगसम, समरूप)

(*ii*) सभी वर्ग ________ होते हैं। (समरूप, सर्वांगसम)

(*iii*) सभी ________ त्रिभुज समरूप होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)

(*iv*) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (*i*) उनके संगत कोण ________ हों तथा (*ii*) उनकी संगत भुजाएँ ________ हों। (बराबर, समानुपाती)

**हल :** (*i*) सभी वृत्त **समरूप** होते हैं।

(*ii*) सभी वर्ग **समरूप** होते हैं।

(*iii*) सभी **समबाहु** त्रिभुज समरूप होते हैं।

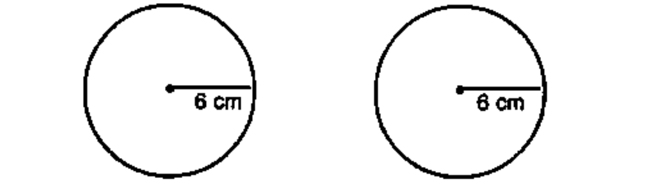
(*iv*) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (*i*) उनके संगत कोण **बराबर** हो तथा (*ii*) उनकी संगत भुजाएँ **समानुपाती** हों।

**प्रश्न 2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए :**

**(*i*) समरूप आकृतियाँ (*ii*) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।**

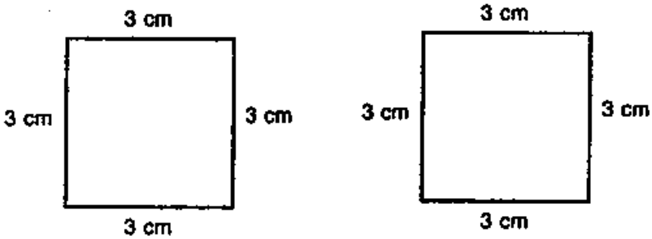
(*i*) समरूप आकृतियाँ

(A)




दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ समान हैं इसलिए वे समरूप हैं।

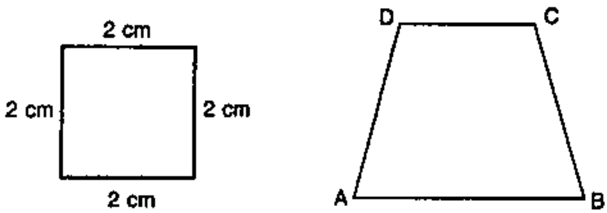
(B)




दोनों वर्गों की भुजाएँ समान हैं इसलिए वे समरूप हैं।

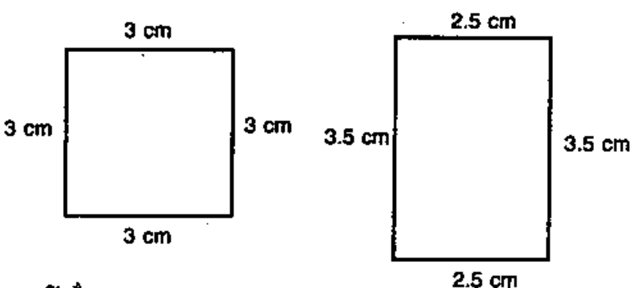
(*ii*) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं

(A)




ये समरूप नहीं है।

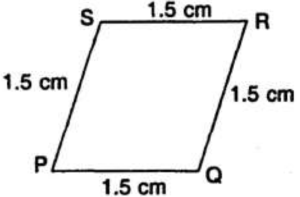
(B)

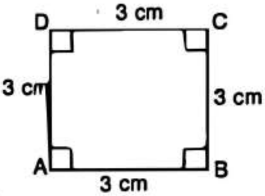



ये समरूप नहीं है।

**प्रश्न 3.** बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं :

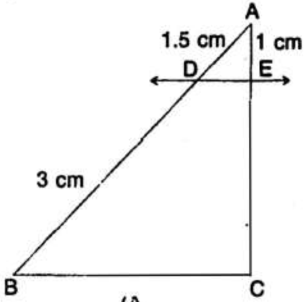
**हल :** ये समरूप नहीं है क्योंकि आकृतियों की भिन्न भुजाएँ हैं।



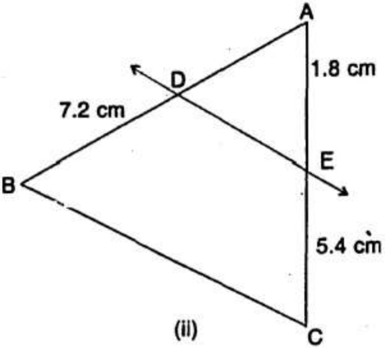



प्रश्न 1. आकृति 6.17 (*i*) और (*ii*) में, DE ∥ BC है। (*i*) में EC और (*ii*) में AD ज्ञात कीजिए :

हल :




(*i*)




(ii)

(*i*) $$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC} \Rightarrow EC \times 1.5 = 3$$

इसलिए, $$EC = \frac{3}{1.5} = 2$$

(*ii*) हमारे पास है $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4} \Rightarrow 5.4 \times AD = 7.2 \times 1.8$$

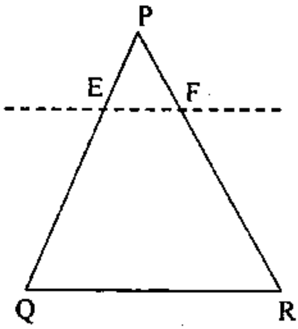
इसलिए, $$AD = \frac{7.2 \times 1.8}{5.4} = 2.4 \text{ cm}$$

**प्रश्न 2. किसी ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमश: बिंदु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF ∥ QR है :**

**(*i*) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm**

**(*ii*) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm**

**(*iii*) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm और PF = 0.36 cm.**




हल : हमको दर्शाना है कि EF ∥ QR जब एक रेखा त्रिभुज की अन्य भुजाओं को एक अनुपात में काटती है तब रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

(*i*) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

अब,

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

इसलिए, $$\frac{3.9}{3} = \frac{3.6}{2.4}$$

$$1.3 \neq 1.5$$

अनुपात समान नहीं है, इसलिए EF, QR के समांतर नहीं है।

(*ii*) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm and RF = 9 cm

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$

इस प्रकार अनुपात समान है इसलिए EF ∥ QR.

(*iii*) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm और PF = 0.36 cm

$$\because \quad \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR} \qquad EQ = PQ - PE \qquad FR = PR - PF$$

$$EQ = 1.28 - 0.18 \qquad FR = 2.56 - 0.36$$

$$EQ = 1.10 \qquad FR = 2.20$$

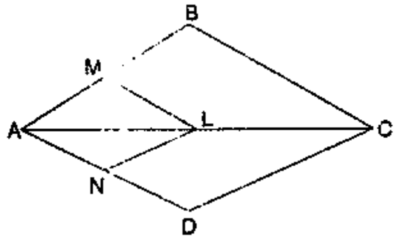
$$\Rightarrow \quad \frac{0.18}{EQ} = \frac{0.36}{FR}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0.18}{1.10} = \frac{0.36}{2.20}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{18}{110} = \frac{36}{220} \qquad \Rightarrow \frac{18}{110} = \frac{18}{110}$$

अनुपात समान है, इसलिए EF ∥ QR.

**प्रश्न 3. आकृति में यदि LM ∥ CB और LN ∥ CD हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है।**




हल : दिया है : चतुर्भुज ABCD

जिसमें LM ∥ BC और LN ∥ CD

त्रिभुज ABC में, LM ∥ BC

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AL}{LC}$$ ...(1) [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय]

ΔADC में, LN ∥ CD

$$\frac{AN}{ND} = \frac{AL}{LC}$$ ..(2) [आधार समानुपातिकता प्रमेय].

समी० (1) और (2) से

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND}$$

या $$\frac{MB}{AM} = \frac{ND}{AN}$$ (पलटने पर)

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

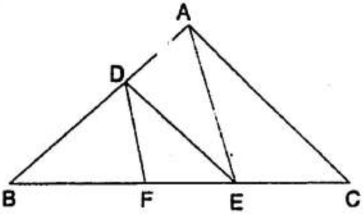
$$\frac{MB}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$$

या $$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{ND + AN}{AN}$$

या $$\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$$

या $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$ (पलटने पर)

**प्रश्न 4. आकृति में DE ∥ AC और DF ∥ AE है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।**




हल : एक त्रिभुज ΔABC दिया है जिसमें DF ∥ AE और DE ∥ AC

ΔABE में, $\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE}$ ...(1) [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय]

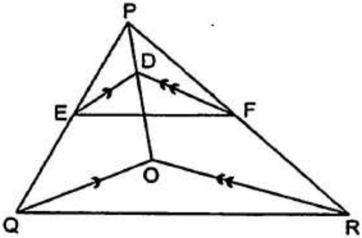
ΔABC में,

$\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$ ...(2) [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय]

समी० (1) तथा (2) से

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

**प्रश्न 5. आकृति में DE ∥ OQ और DF ∥ OR है। दर्शाइए कि EF ∥ QR है।**




हल : ΔAPQ में DE ∥ AQ.

∴ $\frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO}$ ... (*i*) (BPT से)

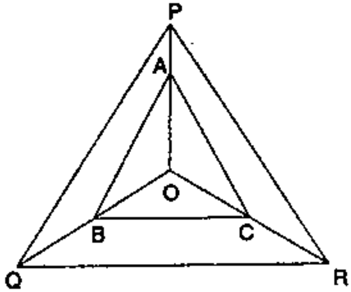
ΔAPR में DF ∥ OR

∴ $\frac{PD}{DO} = \frac{PF}{FR}$ ...(*ii*) (BPT से)

(*i*) तथा (*ii*) से $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

∴ EF ∥ QR (BPT के विलोम से)

**प्रश्न 6. आकृति में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिंदु A, B और C इस प्रकार हैं कि AB || PQ और AC || PR है। दर्शाइए कि BC || QR है।**




हल : दिया है : ΔPQR में O एक बिंदु है। A, PO पर कोई बिंदु है तथा B, OQ पर कोई बिंदु है तथा C, OR पर कोई बिंदु है तथा A || PQ और AC || PR.

सिद्ध करना है : BC || QR

उपपति : ΔPOQ में, AB || PQ

$\therefore \quad \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$ ...(1) [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय]

ΔPOR में, AC || PR

$\therefore \quad \frac{OA}{AP} = \frac{OC}{OR}$ ...(2) [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय]

समी० (1) तथा (2) से

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{OR}$$

परंतु हम जानते हैं कि

ΔOQR में, यदि $\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$

तब हम कह सकते हैं BC || QR. [थेल्स प्रमेय का विलोम] इति सिद्धम्

---

**प्रश्न 7. प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए कि आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)**

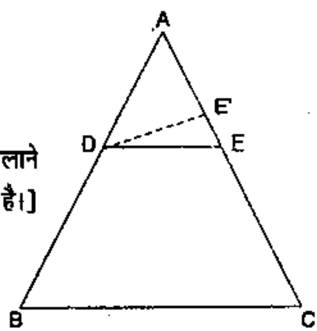
हल : दिया है : ΔABC में, D, AB का मध्य-बिंदु है और DE || BC

सिद्ध करना है : E, AC का मध्य-बिंदु है।

उपपति : माना E', AC का मध्य-बिंदु

∴ DE' || BC

[त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।]




परंतु DE || BC [दिया है]

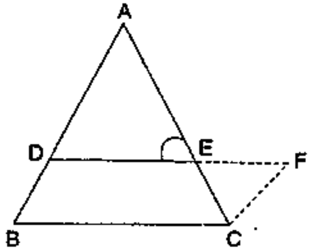
यह तभी संभव है जब E' तथा E संपाती हो।

∴ E, AC का मध्य-बिंदु है।

प्रश्न 8. प्रमेय 6.2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है। (याद कीजिए कि आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं)।

हल : दिया है : $\Delta ABC$ जिसमें D तथा E क्रमश: AC और AC के मध्य-बिंदु है।

सिद्ध करना है : $DE \parallel BC$




रचना : रेखाखंड DE को F तक बढ़ाया जिससे कि DE = EF. FC को मिलाया।

उपपति : $\Delta AED$ तथा $\Delta CEF$ में,

$$AE = CE$$

[E, AC का मध्य-बिंदु है।]

$$\angle AED = \angle CEF$$

[शीर्षाभिमुख कोण]

या $DE = EF$

SAS सर्वांगसमता नियम

$$\Delta AED \cong \Delta CEF$$

$\Rightarrow$ $AD = CF$ ...(1)

[सर्वांगरूप त्रिभुजों के संगत भाग]

और $\angle ADE = \angle CEF$ ...(2)

अब, D, AB का मध्य-बिंदु है।

$$AD = DB$$

$DB = CF$ ...(3) [समी. (1) से]

$\angle ADE = \angle CFE$ [समी. (2) से]

एकांतर कोण बराबर होते हैं।

$\therefore$ $AD \parallel FC$

$DB \parallel CF$ ...(4)

समी॰ (3) तथा (4) DBCF एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी भुजाओं का एक जोड़ा बराबर तथा समांतर है।

$\therefore$ DBCF एक $\parallel^{gm}$ है।

$\Rightarrow DF \parallel BC$ और $DF = BC$ [$\parallel^{gm}$ की विपरीत भुजाएँ]

परंतु D, E तथा F सरेखीय है और DE = EF

$\therefore$ $DE \parallel BC$

प्रश्न 9. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

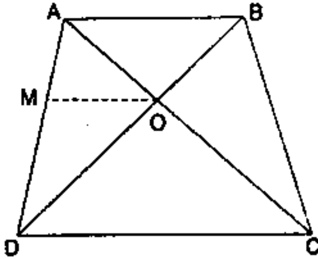
हल : AB ∥ DC (दिया है)

ΔADC में,

$$MO \parallel DC$$

$$\therefore \quad \frac{AO}{OC} = \frac{AM}{MD}$$

...(1) [जहाँ MO ∥ DC, AD को M पर मिलता है] (रचना से)




(आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

ΔBAD में, हमारे पास है MO ∥ AB

$$\therefore \quad \frac{OB}{DO} = \frac{AM}{MD}$$ ...(2) [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय]

समी० (1) तथा (2) से

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

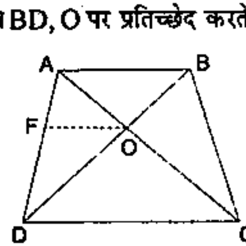
या, $$\frac{AO}{OB} = \frac{OC}{OD}$$ इति सिद्धम्

---

प्रश्न 10. एक चतुर्भुज **ABCD** के विकर्ण परस्पर बिंदु **O** पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि **ABCD** एक समलंब है।

हल : दिया है : एक चतुर्भुज ABCD जिसमें विकर्ण AC तथा BD, O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$




रचना : OF ∥ AB बनाया, जो AD को F पर मिलता है।

सिद्ध करना है : चतुर्भुज ABCD एक समलंब है।

उपपति : ABD में, हमारे पास है OF ∥ AB

$$\therefore \quad \frac{DF}{FA} = \frac{DO}{OB}$$ ...(1) [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय]

परंतु $$\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}$$ ...(2) (दिया है)

समी० (1) तथा (2) से

$$\frac{DF}{FA} = \frac{CO}{OA}$$

$\Delta DCA$ में, O और F, CA और AD पर इस प्रकार बिंदु है कि

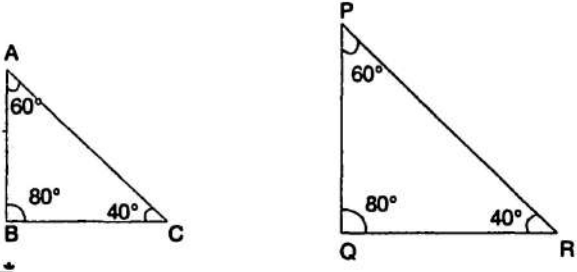
$\therefore \quad OF \parallel AB$

$\therefore \quad AB \parallel CD$

$$\frac{DF}{FA} = \frac{CO}{OA}$$

$\therefore$ ABCD, एक समलंब है। इति सिद्धम्

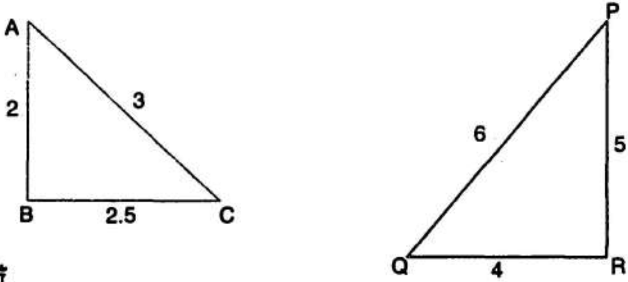
प्रश्न 1. बताइए कि आकृति 6.34 में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।




हल : (*i*) हाँ,

ΔABC और ΔPQR में, यदि ∠A = ∠P, ∠B = ∠Q, ∠C = ∠R, तब हम कह सकते हैं ΔABC ~ ΔDEF.

सभी कोण बराबर है इसलिए (AAA समरूपता)



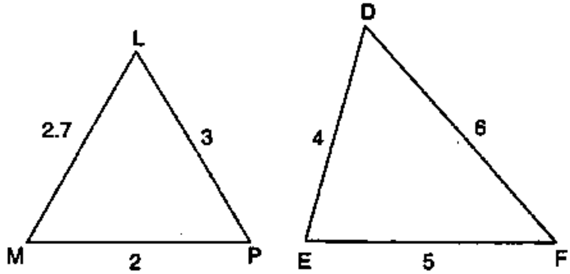

(*ii*) हाँ,

ΔABC और ΔQRP में,

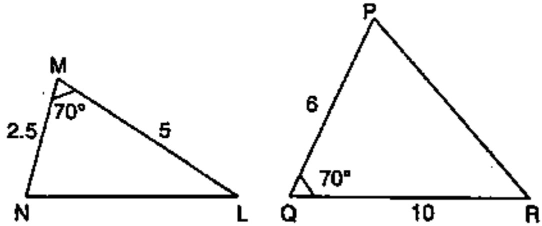
$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{CA}{PQ}$$

∴ ΔABC ~ ΔQRP (SSS) समरूपता

(*iii*) समरूप नहीं है। ΔLMP और ΔDEF में संगत भुजाएँ बराबर नहीं है इसलिए वे समरूप नहीं है।

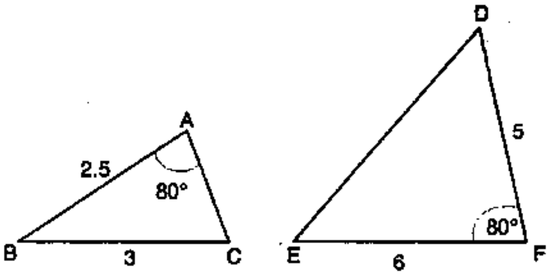



(*iv*)



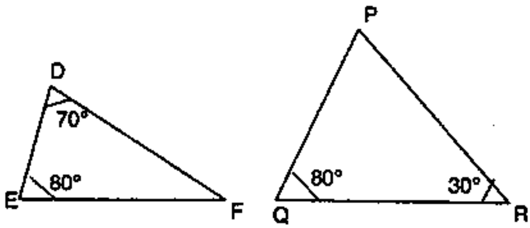

हाँ, ΔMNL ~ ΔQPR (SAS समरूपता)

(*v*)




ΔABC और ΔDEF समरूप नहीं हैं क्योंकि संगत भुजाएँ तथा कोण बराबर नहीं है।

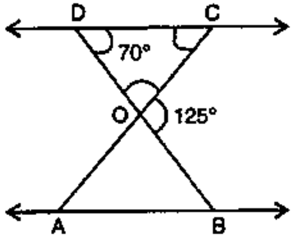
(*vi*)




हाँ, (AA समरूपता) ΔDEF ~ ΔPQR क्योंकि ∠D = ∠P, और ∠F = 180 − (80 + 70)

∴ ∠F = ∠R = 30°

**प्रश्न 2. आकृति 6.35 में, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ और $\angle CDO = 70°$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।**




हल : दी गई आकृति में, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$,

DOB रैखिक युग्म है और COB = 125° (दिया है)

$\therefore \quad \angle COD = 180° - 125° = 55°$

$\therefore \quad \angle COD = 55°$

और $\quad \angle DCO = 180° - (70° + 55°)$

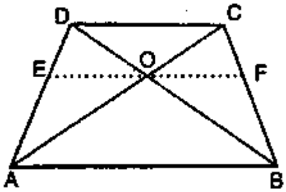
$= 180° - (125°) = 55°$

$\therefore \quad \angle DCO = 55°$

$\therefore \quad \angle OAB = 55°$ एकांतर कोण [$\because \angle C = \angle A$]

$\angle DCO = \angle OAB$ एकांतर कोण

**प्रश्न 3. समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।**




हल : EF को मिलाया, जिसमें कि EF || AB और EF || CD. EF, O से गुजरती है।

$\Delta ABC$ में,

OF || AC तथा OF, AC को O पर तथा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है।

$$\therefore \quad \frac{OA}{OC} = \frac{BF}{FC}$$

..(*i*) (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

इसी तरह, $\Delta BCD$ में,

OF || CD तथा OF, BD को O पर और BC को F पर प्रतिच्छेद करती है।

$$\therefore \quad \frac{OB}{OD} = \frac{BF}{FC}$$

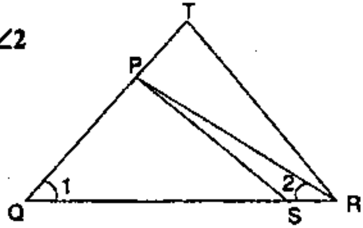
...(*ii*) (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

समी० (*i*) तथा (*ii*) से

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

इति सिद्धम्

**प्रश्न 4.** आकृति में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाइए कि $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ है।




हल : हमारे पास है,

$$\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS}$$ [दिया है]

$$\therefore \quad \frac{QT}{QR} = \frac{PR}{QS} \qquad ...(i)$$

अब, $\angle 1 = \angle 2$ [दिया है]

$\therefore$ $PQ = PR$ (बराबर भुजाओं के बराबर कोण) ...(*ii*)

$$\therefore \quad \frac{QT}{QR} = \frac{PQ}{QS}$$ [समी० (*i*) तथा (*ii*) से] ...(*iii*)

अब, $\Delta PQS$ और $\Delta TQR$ में, हमारे पास है

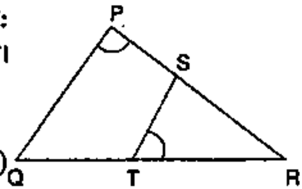
$$\frac{PQ}{QS} = \frac{QT}{QR}$$ [समी० (*iii*) से]

और, $\angle Q = \angle Q$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ [SAS समरूपता]

---

**प्रश्न 5.** $\Delta PQR$ की भुजाओं PR और QR पर क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ है।




हल : $\Delta PQR$ एक त्रिभुज है तथा $\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

$\Delta RPQ$ और $\Delta RTS$ में,

हमारे पास है,

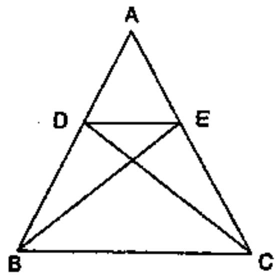
$\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

$\angle R = \angle R$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ [AA समरूपता]

---

**प्रश्न 6.** आकृति में, यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।




हल : दिया है : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$,

$\Delta ABE$ और $\Delta ACD$ में

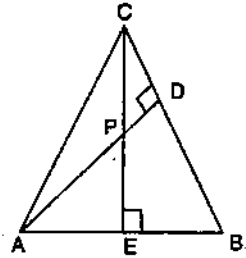
$\angle A$ उभयनिष्ठ है, $AD = AE$

और $AC = AB$ [SAS समरूपता]

अत: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

[$\because$ सर्वांगरूप त्रिभुज समरूप भी होते हैं]

**प्रश्न 7. आकृति में, $\Delta ABC$ के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि :**




**(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$**

**(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$**

**(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$**

**(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$**

हल : (i) $\Delta AEP$ और $\Delta CDP$ में

$\angle AEP = \angle CDP = 90°$ [प्रत्येक 90°]

$\angle APE = \angle CPD$ [शीर्षाभिमुख]

अत: $\Delta AEP \sim \Delta CDP$ [AA समरूपता]

(ii) $\Delta ABD$ और $\Delta CBE$ में

$\angle ADB = \angle CEB$ [प्रत्येक 90°]

$\angle B = \angle B$ [उभयनिष्ठ]

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CBE$ [AA समरूपता]

(iii) $\Delta AEP$ और $\Delta ADB$ में

$\angle AEP = \angle ADB = 90°$

$\angle EAP = \angle DAP$ [उभयनिष्ठ

$\Delta AEP \sim \Delta ADB$. [AA समरूपता]

(iv) $\Delta PDC$ और $\Delta BEC$ में

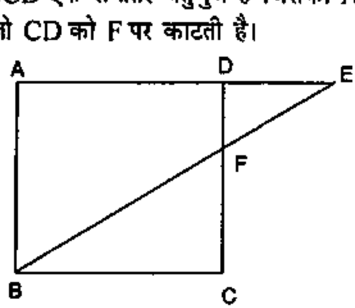
$\angle PDC = \angle BEC$ [प्रत्येक 90°]

$\angle PCD = \angle ECB$ [उभयनिष्ठ]

अत: $\Delta PDC \sim \Delta BEC$. [AA समरूपता]

**प्रश्न 8. समांतर चतुर्भुज ABCD की बढ़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ है।**

हल : दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज हे जिसकी AD भुजा E तक बढ़ाई गई है। BE को मिलाया गया है जो CD को F पर काटती है।




सिद्ध करना है : $\Delta ABE \sim \Delta CFB$

उपपति : $\Delta ABE$ और $\Delta CFB$ में

$\angle A = \angle C$ [||$^{gm}$ की विपरीत भुजाएँ]

$$\angle AEB = \angle EBC$$ [एकांतर कोण]

AA-समरूपता नियम से

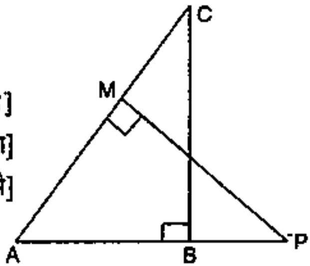
$\Delta ABE \sim \Delta CFB$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 9. आकृति 6.39 में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि :**

**(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$**

**(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$**

हल : (i) $\Delta ABC$ और $\Delta AMP$ में




$\angle ABC = \angle AMP$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle A = \angle A$ [उभयनिष्ठ]

अत: $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ [AA समरूपता]

(ii) हमारे पास है, $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ [समी० (i) से]

इसलिए $$\frac{CA}{BC} = \frac{PA}{MP}$$

$$\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 10. CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः $\Delta ABC$ और $\Delta FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं। यदि $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ है, तो दर्शाइए कि :**

**(i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$**

**(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$**

**(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$**

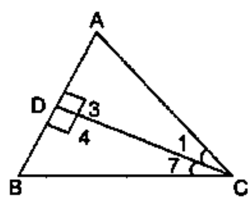
हल :

(i) चूंकि $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ [दिया है]

$\therefore$ $\angle A = \angle F$

और $\angle B = \angle F$

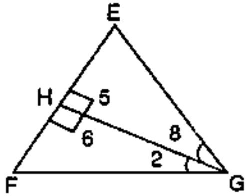
और $\angle C = \angle G$




$\Rightarrow$ $$\frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G$$

$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$

ΔADC और ΔFHG में




$\angle B = \angle F$ [ऊपर से]

और $\angle 1 = \angle 2$ [ऊपर से]

∴ ΔADC ~ ΔFHG [AA समरूपता]

∴ $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(*ii*) ऊपर से हमें प्राप्त होता है

चूंकि ΔADC और ΔFHG

∴ $\angle 3 = \angle 6$ [समरूप भाग]

∴ $\angle 4 = \angle 5$ [रैखिक युग्म में यदि एक कोण बराबर होता है तब दूसरा कोण भी बराबर होता है।]

ΔDCB और ΔHGE में

$\angle 4 = \angle 5$ [ऊपर से]

$\angle 7 = \angle 8$ [∵ ΔABC ~ ΔFEG CD और GH कोण समद्विभाजक है]

∴ ΔDCB = ΔHGE [AA समरूपता]

(*iii*) ΔDCA और ΔHGF में

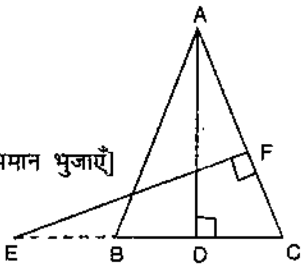
$\angle 3 = \angle 4$ [देखें (*ii*) भाग]

$\angle DAC = \angle GEH$ (∵ ΔABC ~ ΔFEG)

ΔDCA ~ ΔHGF. [AA समरूपता]

**प्रश्न 11. आकृति में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिंदु है। यदि AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है तो सिद्ध कीजिए कि ΔABD ~ ΔECF है।**

हल : दिया है : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, E, बढ़ाई गई BC पर कोई बिंदु है तथा AD ⊥ BC.




सिद्ध करना है : ΔABD ~ ΔECF

उपपति : ΔABD और ΔECF, हमारे पास हैं

AB = AC

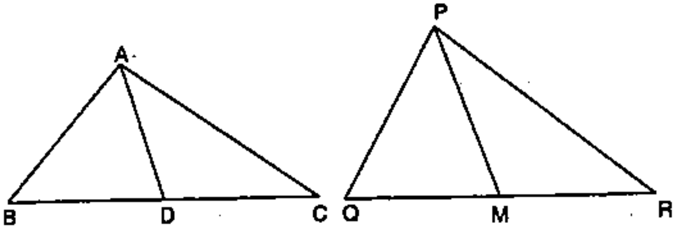
इसलिए, $\angle B = \angle C$ [समान कोणों की समान भुजाएँ]

$\angle EFC = \angle ADB$ [प्रत्येक 90°]

AA समरूपता नियम से

ΔABD ~ ΔECF इति सिद्धम्

**प्रश्न 12.** एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति 6.41)। दर्शाइए कि ΔABC ~ ΔPQR है।




**हल :** **दिया है :** ΔABC और ΔPQR जिसमें

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AD}{PM}$$

**सिद्ध करना है :** ΔABC ~ ΔPQR.

**उपपति :** $$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AD}{PM}$$ (दिया है)

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR}=\frac{AD}{PM}$$ [$\because BD=\frac{1}{2}BC$ और $QM=\frac{1}{2}QR$]

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BD}{QM}=\frac{AD}{PM}$$

∴ ΔABD ~ PQM (SSS समरूपता)

∴ $\angle B=\angle Q$

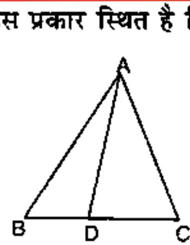
अब, ΔABC और ΔPQR में

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$$

और $\angle B=\angle Q$

ΔABC ~ ΔDEF [SAS समरूपता]

**प्रश्न 13.** एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि ∠ADC = ∠BAC है। दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है।




हल : ΔABC और ΔADC में

$\angle BAC=\angle ADC$ (दिया है)

$\angle C=\angle C$

$\angle C=\angle C$ [उभयनिष्ठ]

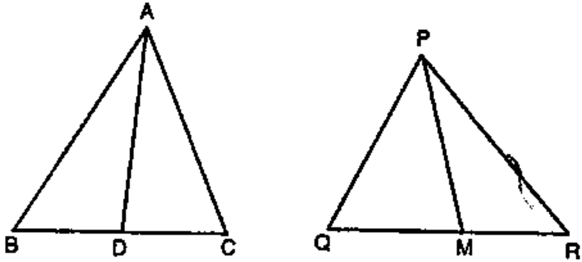
$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADC$ [AA समरूपता]

$\therefore \quad \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$

$\Rightarrow \quad CA^2 = CD.CB$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 14. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।**

हल : $\Delta ABC$ और $\Delta PQR$ में, जहाँ AD तथा PM त्रिभुज की माध्यिकाएँ हैं।




$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$$ (दिया है)

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta PQM$ (*SSS* समरूपता)

$$\angle B = \angle Q$$

$\Delta ABC$ और $\Delta PQR$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

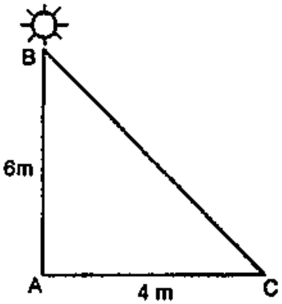
और $\angle B = \angle Q$

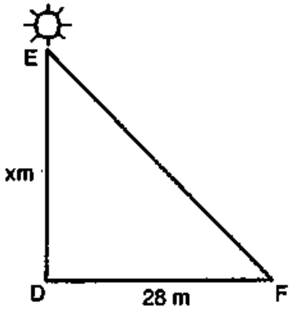
अतः $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.[SAS समरूपता] इति सिद्धम्

**प्रश्न 15. लंबाई 6m वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 4m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28m है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

हल : माना AB एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ है तथा AC इसकी छाया है। DE मीनार है तथा DF इसकी छाया है। BC तथा EF को मिलाया।

माना $DE = x$ m




$\Delta ABC$ और $\Delta DEF$ में

हमारे पास है

$$\angle A = \angle D = 90$$

और $\angle C = \angle F$ (किरणों का उन्नयन कोण)

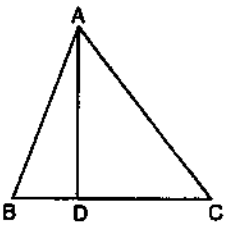
इसलिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

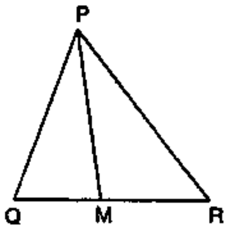
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{6}{x} = \frac{4}{28}$$

$$\Rightarrow \qquad x = 42 \text{ m.}$$

**प्रश्न 16. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।**

हल :




$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया है)

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

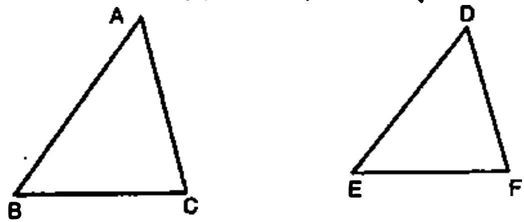
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{2BD}{2QM} \qquad \left(BC = \frac{1}{2}BD, QR = \frac{1}{2}QM\right)$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$$

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta PQM$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 1.** मान लीजिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है और इनके क्षेत्रफल क्रमश: $64 cm^2$ और $121 cm^2$ हैं। यदि $EF = 15.4 cm^2$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए।




हल :

हमारे पास है ABC और DEF दो त्रिभुज

$\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= 64\ cm^2$

$\Delta DEF$ का क्षेत्रफल $= 121\ cm^2$

और $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

और $EF = 154\ cm.$

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(BC)^2}{(EF)^2}$$

$$\frac{64}{121} = \frac{(BC)^2}{(15.4)^2}$$

$$(BC)^2 = \frac{64 \times 15.4 \times 15.4}{121}$$

$$(BC)^2 = 125.44$$

दोनों तरफ वर्गमूल लेने पर

हम प्राप्त करते हैं

$$BC = \sqrt{125.44}$$

$$BC = 11.2\ cm.$$

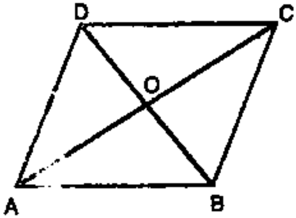
---

**प्रश्न 2.** एक समलंब ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2\ CD$ हो तो त्रिभुजों AOB और COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : $CD = x$ इकाई

इसलिए $AB = 2CD = 2x$ इकाई

हमारे पास है



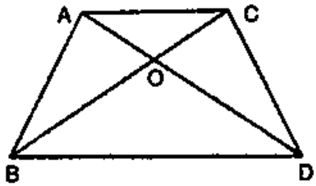

$$\frac{\text{क्षे॰ } (\Delta AOB)}{\text{क्षे॰ } (\Delta COD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$$

$$\frac{2x^2}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2} = \frac{4}{1} = 4:1$$

अत: $= \frac{4}{1}$ या $4:1$

**प्रश्न 3. आकृति में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं। यदि AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि**

$$\frac{\text{क्षे॰ (ABC)}}{\text{क्षे॰ (DBC)}} = \frac{AO}{DO} \text{ है।}$$




हल : $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times BC \times DO$$

अब,

$$\frac{\text{क्षे॰ } \Delta ABC}{\text{क्षे॰ } \Delta DBC} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AO}{\frac{1}{2} \times BC \times DO}$$

$$\frac{\text{क्षे॰ } \Delta ABC}{\text{क्षे॰ } \Delta DBC} = \frac{AO}{DO}$$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 4. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।**

हल : दिया है : दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हैं।
सिद्ध करना है : त्रिभुज सर्वांगसम है।
उपपति : $\Delta ABC$ और $\Delta PQR$ में

[समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 3 नयी संगत भुजाओं के वर्ग के अनुपात के बराबर होता है।]

$$\therefore \quad = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{CA^2}{PR^2}$$

परंतु क्षे. $(\Delta ABC)$ = क्षे. $(\Delta PQR)$ (दिया है)

$$\therefore \quad \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{CA^2}{PR^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR} = 1$$

$$\therefore \quad AB = PQ, BC = QR, CA = PR$$

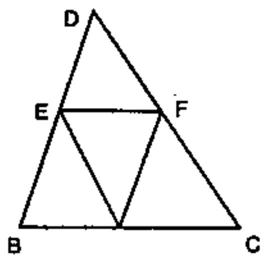
अत: SSS सर्वांगसम नियम से

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 5. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिंदु क्रमश: D, E और F है। ΔDEF और ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।**

हल : ΔABC में, D, E और F क्रमश: AB, BC और CA के मध्य-बिंदु है।

मध्य-बिंदु प्रमेय से ΔDEF की प्रत्येक भुजा ΔABC की प्रत्येक भुजा की आधी होगी।



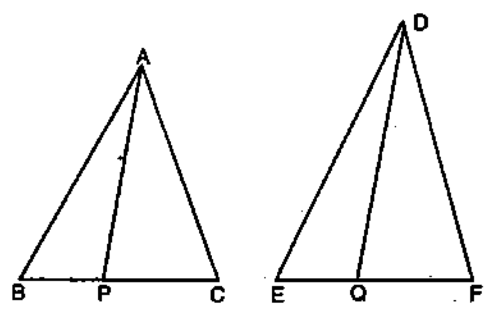

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$$= \frac{AB^2}{\left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{4}{1}$$

**ΔDEF का क्षेत्रफल : ΔABC का क्षेत्रफल = 1 : 4.**

**प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।**

हल : दिया है : ΔABC ~ ΔDEF, और AP तथा DQ माध्यिकाएँ हैं।




सिद्ध करना है : $$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AP^2}{DQ^2}$$

उपपति : चूंकि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (दिया है)

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}EF}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BP}{EQ}$$

और $\angle B = \angle E$ $(\because \Delta ABC \sim \Delta DEF)$

$\therefore \Delta APB \sim \Delta DQE$

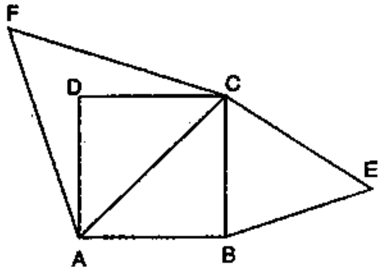
$$\therefore \quad \frac{BP}{EQ} = \frac{AP}{DQ} = \frac{AB}{DE}$$

$$\therefore \quad \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AP^2}{DQ^2}$$

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AP^2}{DQ^2}$$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।**

हल : दिया है : एक वर्ग ABCD जिसमें $\Delta BCE$ और $\Delta ACF$ क्रमशः भुजा BC तथा विकर्ण AC पर बने समबाहु त्रिभुज हैं।




सिद्ध करना है : क्षेत्रफल($\Delta BCE = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ($\Delta ACF$)

उपपति : चूंकि $\Delta BCE$ और $\Delta ACF$ समबाहु हैं इसलिए वे समानकोणिक होंगे।

$\Delta BCE \sim \Delta ACF$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{क्षे० }(\Delta BCE)}{\text{क्षे० }(\Delta ACF)} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{क्षे० }(\Delta BCE)}{\text{क्षे० }(\Delta ACF)} = \frac{BC^2}{(\sqrt{2}BC)^2} \qquad [\because AC = \sqrt{2}\,BC]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{क्षे० }(\Delta BCE)}{\text{क्षे० }(\Delta ACF)} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ **क्षेत्रफल ($\Delta$BCE) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ($\Delta$ACF).** **इति सिद्धम्**

**सही उत्तर चुनिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :**

**प्रश्न 8. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है :**

**(A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4**

हल : C (4 : 1)

**प्रश्न 9. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है :**

**(A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81**

हल : D (16 : 81)

**प्रश्न 1. कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।**

**(*i*) 7 cm, 24 cm, 25 cm.**

**(*ii*) 3 cm, 8 cm, 6 cm.**

**(*iii*) 50 cm, 80 cm, 100 cm.**

**(*iv*) 13 cm, 12 cm, 5 cm.**

हल : (*i*) त्रिपुज ABC में

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ [पाइथोगोरस प्रमेय]

$(25)^2 = (24)^2 + (7)^2$

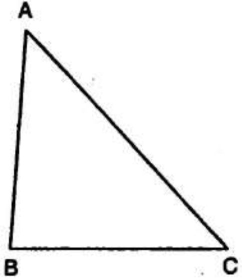
$625 = 576 + 49$

$625 = 625$

L. H. S = R. H. S

**अतः ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।**

और त्रिभुज का कर्ण 25 है।



(*ii*) त्रिभुज की भुजाएँ दी गई हैं : 3 cm, 8 cm, 6 cm.

पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$(8)^2 = (3)^2 + (6)^2$$
$$64 = 9 + 36$$
$$64 \neq 45$$

L. H. S. ≠ R. H. S

अतः त्रिभुज, समकोण त्रिभुज नहीं है।

(*iii*) हमारे पास है

50 cm, 80 cm, 100 cm.

पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$(100)^2 = (80)^2 + (50)^2$$
$$10000 = 6400 + 2500$$
$$10000 \neq 8900$$

L. H. S ≠ R. H. S

अतः त्रिभुज, समकोण त्रिभुज नहीं है।

(*iv*) हमारे पास है

13 cm, 12 cm, 5 cm. पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$(13)^2 = (5)^2 + (12)^2$$
$$169 = 25 + 144$$
$$169 = 169$$

L. H. S. = R. H. S

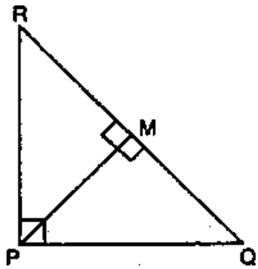
अतः त्रिभुज, एक समकोण त्रिभुज है।

और कर्ण 13 cm है।

**प्रश्न 2. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर विंदु M इस प्रकार स्थित है कि PM ⊥ QR है। दर्शाइए कि $PM^2 = QM.MR$ है।**

हल : हमारे पास है : ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है तथा PM ⊥ QR.

ΔPQR तथा ΔPMR में




$$\angle QPR = \angle PMR = 90°$$
$$\angle R = \angle R \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$\Delta PQR \sim \Delta PMR$ ...(*i*)

ΔPQR और ΔPQM में

$$\angle QPR = \angle QMP$$
$$\angle Q = \angle Q \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$\Delta PQR \sim \Delta PQM$ ...(*ii*)

समी० (*i*) तथा (*ii*) से

$\Delta PQM \sim \Delta PMR$

$$\frac{PM}{QM} = \frac{MR}{PM}$$

$PM^2 = MR. QM$

$PM^2 = QM. MR.$ इति सिद्धम्

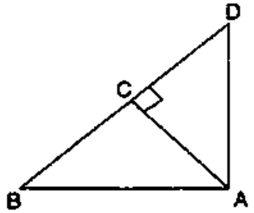
**प्रश्न 3. आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है।**

**दर्शाइए कि**

**(i) $AB^2 = BC. BD.$**

**(ii) $AC^2 = BC. DC$**

**(iii) $AD^2 = BD. CD.$**




हल : ΔABD और ΔABC में

$$\angle BAD = \angle ACB = 90°$$

$$\angle B = \angle B \text{ [उभयनिष्ठ]}$$

$\Delta BAD \sim \Delta ABC$ ...(i)

ΔABD और ΔACD में

$$\angle BAD = \angle ACD$$

$$\angle D = \angle D \text{ [उभयनिष्ठ]}$$

$\Delta BAD \sim \Delta ACD$ ...(ii)

समी० (i) तथा (ii) से

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ ...(iii)

समी० (i) से

$\Delta BAD \sim \Delta ABC$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$

$AB^2 = BC. BD.$ इति सिद्धम्

समी० (ii) से

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$

$$\frac{BC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

$AC^2 = BC. DC.$ इति सिद्धम्

$\Delta BAD \sim \Delta ACD.$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$AD^2 = BD. CD.$ इति सिद्धम्

**प्रश्न 4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।**

हल : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जो C पर समकोण है इसलिए AC = BC

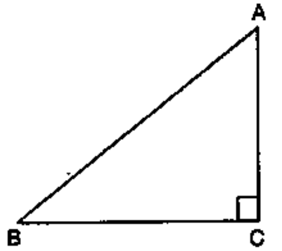
पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

परंतु $AC = BC$

इसलिए $AB^2 = AC^2 + AC^2$

$AB^2 = 2AC^2$




**प्रश्न 5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।**

हल : $\Delta ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ तथा दिया है :

$$AB^2 = 2AC^2$$

अब हमारे पास है

$$AB^2 = 2AC^2$$

$$AB^2 = AC^2 + AC^2$$

परंतु $AC = BC$ (दिया है)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

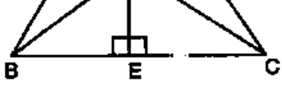
अतः पाइथोगोरस प्रमेय के विलोम से $\Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें AB कर्ण है।

**प्रश्न 6. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

हल : $\Delta ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा $2a$ है तथा AE, CD और BF शीर्षलंब है।

$\Delta ABE$ में

$$\angle E = 90°$$




पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$

$$AE^2 = AB^2 - BE^2$$

$$AE^2 = (2a)^2 - (a)^2$$

(क्योंकि $AB = 2a$ दिया है और E, BC का मध्य-बिंदु है $BE = \frac{1}{2}BC$)

$$AE^2 = 4a^2 - a^2$$

$$AE^2 = 3a^2$$

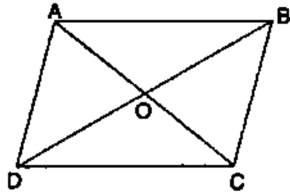
$$AE = a\sqrt{3}$$

और $BF = a\sqrt{3}$

अतः $\Delta ABC$ का प्रत्येक शीर्षलंब $a\sqrt{3}$ है।

**प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।**

हल : माना ABCD है तथा विकर्ण AC और BD, O पर प्रतिच्छेद करते हैं।




हमको सिद्ध करना है

$$AB^2 + AC^2 + CD^2 DA^2 = AC^2 + BD^2$$

यहाँ, $AC \perp BD, OA = OC$

और $OB = OD$

[समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।]

$\Delta AOB$ से

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \text{ [पाइथोगोरस प्रमेय]}$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4AB^2 = AC^2 + BD^2 \quad ...(i)$$

परंतु $4AB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ [$\because$ ABCD एक समचतुर्भुज]...(*ii*)

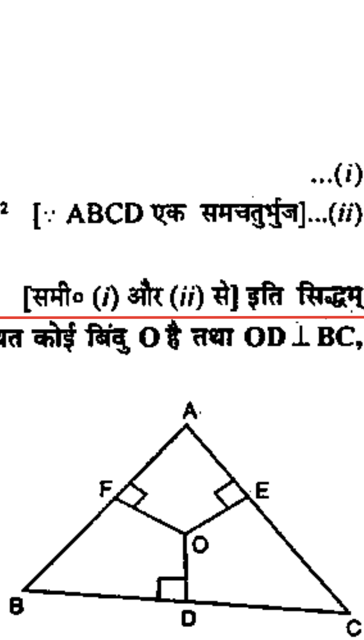
इस कारण, हम प्राप्त करते हैं।

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ [समी० (*i*) और (*ii*) से] इति सिद्धम्

**प्रश्न 8. आकृति में $\Delta ABC$ के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है। दर्शाइए कि**

**(*i*) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$**

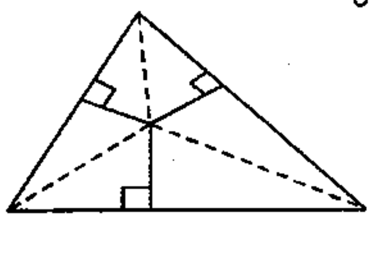
**(*ii*) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.**




हल : (*i*) दिया है : $\Delta ABC$, जिसमें O एक बिंदु है, बिंदु O से OD, OE और OF क्रमशः BC, AC और AB पर लम्ब है।

सिद्ध करना है : $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

रचना : OA, OB और OC को मिलाया।



उपपति : $\Delta OFA$, F पर समकोण है।

$OA^2 = AF^2 + OF^2$ ..(*i*) (पाइथोगोरस प्रमेय)

इसी तरह $\Delta ODB$ तथा OEC से,

$$OB^2 = BD^2 + OD^2 \quad ...(ii)$$

$$OC^2 = CE^2 + OE^2 \quad ...(iii)$$

(*i*), (*ii*) तथा (*iii*) को जोड़ने पर

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = AF^2 + OF^2 + BD^2 + OD^2 + CE^2 + OE^2$

or $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CF^2$

(*ii*) त्रिभुज $\Delta ODB$ और $\Delta ODC$ में,

$$OB^2 = OD^2 + BD^2$$

$$OC^2 = OD^2 + CD^2$$

$$\therefore \quad OB^2 - OC^2 = (OD^2 + BD^2) - (OD^2 + CD^2)$$

$$\Rightarrow \quad OB^2 - OC^2 = BD^2 - CD^2 \quad ...(iv)$$

इसी तरह हमारे पास है

$$OC^2 - OA^2 = CE^2 - AE^2 \quad ...(v)$$

और $$OA^2 - OB^2 = AF^2 - BF^2 \quad ...(vi)$$

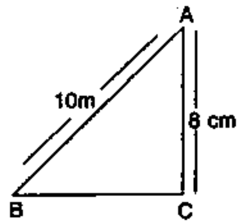
(*iv*), (*v*) और (*vi*) जोड़ने पर

$$OC = (BD^2 - CD^2) + (CE^2 - AE^2) + (AF^2 - BF^2)$$

$$\Rightarrow \quad OA = (BD^2 + CE^2 + AF^2) - (AE^2 + CD^2 + BF^2)$$

$$\Rightarrow \quad AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$$

**प्रश्न 9. 10m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।**




हल : पाइथोगोरस प्रमेय से

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow \quad BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$BC^2 = (10)^2 - (8)^2$$

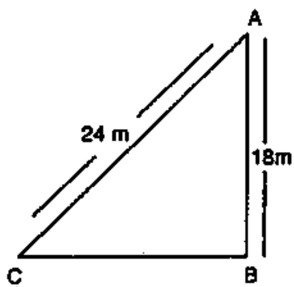
$$BC^2 = 100 - 64$$

$$BC^2 = 36$$

अत: सीढ़ी की दीवार से दूरी 6 m है।

**प्रश्न 10. 18m ऊँचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूंटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूंटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24m है।**

हल : माना AB, खंभे 18 cm की लंबाई है तथा AC खूंटे से बाँधे जाने वाली तार की लंबाई है जो कि 24मी है। BC खंभे खूंटे की दूरी है।




पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow \quad BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$BC^2 = (24)^2 - (18)^2$$

$$BC^2 = (24 + 18)(24 - 18)$$

$$(\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$BC^2 = \sqrt{7 \times 6 \times 6}$$

$$BC = 6\sqrt{7} \text{ m}$$

**प्रश्न 11. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 km/hr की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी ?**

हल : दूसरे हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$ घंटे में तय की गई दूरी है।

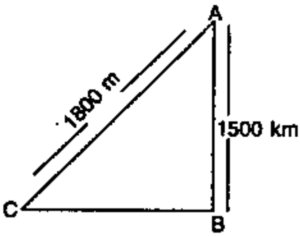
$$= 1200 \times 1\frac{1}{2} = 1200 \times \frac{3}{2} = 1800 \text{ km.}$$

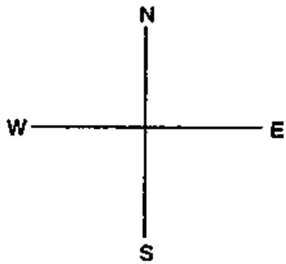
पहले हवाई जहाज द्वारा तय की गई दूरी

$1\frac{1}{2}$ घंटे में $= 1000 \times \frac{3}{2} = 1500$ km.

पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$




$$AC^2 = (1500)^2 + (1800)^2$$
$$AC^2 = 225000 + 3240000$$
$$AC^2 = 5490000$$
$$AC = 300\sqrt{61} \text{ km.}$$

**प्रश्न 12. दो खंभे जिनकी ऊँचाईयाँ 6m और 11m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी 12m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।**

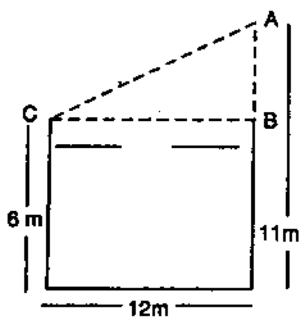
हल : हमारे पास दो खंभे हैं।

हमारे पास है

$$BC = 12 \text{ m}$$
$$AB = 11 - 6$$
$$AB = 5 \text{ m}$$

$\Delta ABC$ में पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



$$AC^2 = (12)^2 + (5)^2$$
$$AC^2 = 144 + 25$$
$$AC^2 = 169$$
$$AC = 13 \text{ m}$$

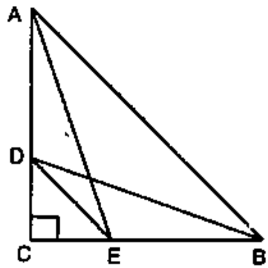
**अतः दोनों के ऊपरी सिरों के बीच की दूरी 13 m है।**

---

**प्रश्न 13. एक त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित हैं।**

**सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$.**

हल : दिया है : ΔABC, ∠C पर समकोण है तथा D और E, भुजाओं CA और CB पर बिंदु है।




सिद्ध करना है : $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

उपपति : समकोण ΔACE में

$$AE^2 = AC^2 + CE^2$$
...(*i*) (पाइथोगोरस प्रमेय)

समकोण ΔDBC में

पाइथोगोरस प्रमेय से

$$BD^2 = CB + CD^2 \quad ...(ii)$$

समकोण ΔDCE में

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 \quad ...(iii)$$

समकोण ΔABC में

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad ...(iv)$$

(*i*) और (*ii*) को जोड़ने पर

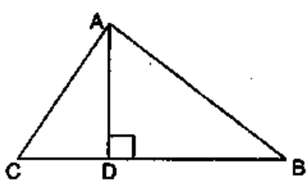
$$AE^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 + CB^2 + CD^2$$
$$= (AC^2 + CB^2) + (CE^2 + CD)^2$$
$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$ [(*iii*) और (*iv*) से]

---

**प्रश्न 14. किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लम्ब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि DB = 3 CD है।**

**(देखिए आकृति). सिद्ध कीजिए कि $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है।**

हल : हमारे पास है




$$BD = 3CD$$
$$\therefore \quad BC = BD + DC$$
$$\Rightarrow \quad BC = 3CD + CD$$
$$\Rightarrow \quad BC = 4CD$$
$$\Rightarrow \quad CD = \frac{1}{4}BC \quad ...(i)$$

और $BD = 3CD$

$\Rightarrow$ $BD = \frac{3}{4}BC$ ...(*ii*)

चूँकि $\Delta ABD$ एक समकोण त्रिभुज है जोकि $\angle D$ पर समकोण है।

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ ...(*iii*)

इसी तरह $\Delta ACD$, कोण D पर समकोण त्रिभुज है।

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ ...(*iv*)

(*iii*) में से (*iv*) को घटाने पर

हम प्राप्त करते हैं

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

$$AB^2 - AC^2 = \left[\frac{3}{4}BC^2 \times \frac{1}{4}BC\right]^2$$

[(*i*) और (*ii*) से]

$$\Rightarrow AB^2 - AC^2 = \frac{9}{16}BC^2 - \frac{1}{16}BC^2$$

$$2AB^2 - 2AC^2 = BC^2$$

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC$$ इति सिद्धम्

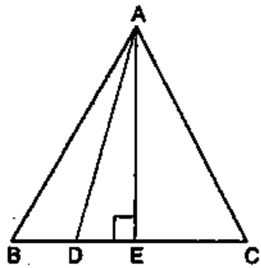
**प्रश्न 15. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है।**

हल : दिया है : समबाहु $\Delta ABC$,

BC पर, बिंदु D इस प्रकार है कि $BD = \frac{1}{3}BC$.

सिद्ध करना है : $9AD^2 = 7AB^2$

रचना : $AE \perp BC$ खींचा। AD को मिलाते हैं।




उपपत्ति : $BD = \frac{1}{3}BC$; $DC = \frac{2}{3}BC$ और

$BE = CE \frac{1}{2} = BC$

(समबाहु त्रिभुज का शीर्षलंब विपरीत भुजा को समद्विभाजित करता है।)

समकोण $\Delta AEB$ में

$AB^2 = AE^2 + BE^2$ ...(*i*)

समकोण $\Delta AED$ में

$AD^2 = AE^2 + ED^2$ ...(*ii*)

(*i*) और (*ii*) से

$$AB^2 - AD^2 = BE^2 - ED^2 \qquad (a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$$
$$= (BE + ED)(BE - ED)$$
$$= (BE + BE - BD)(BD)$$
$$= (2BE - BD)(BD)$$
$$= [BC - \frac{1}{2}BC]\left[\frac{1}{3}BC\right] = \left[\frac{2}{3}BC\right]\left[\frac{1}{3}BC\right]$$

$$AB^2 - AD^2 = \frac{2}{9}BC^2$$

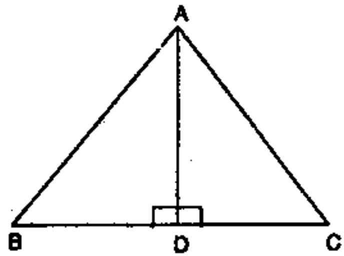
$$AB^2 - \frac{2}{9}AB^2 = AD^2 \, (\because AB = BC)$$

$$\frac{7}{9}AB^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow \quad 9AD^2 = 7AB^2.$$

**प्रश्न 16. किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।**

**हल :** माना $\Delta ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा $x$ है तथा AD एक शीर्षलंब है।




इसलिए, $AB = BC = CA = x$

और $BD = DC = \frac{1}{2}BC = \frac{x}{2}$

$\Delta ADC$ में $\angle D = 90°$

AD = लंब, DC = आधार और

AC = कर्ण

पाइथोगोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = DC^2 + AD^2$$
$$\Rightarrow \quad AD^2 = AC^2 - DC^2$$
$$= x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{4x^2 - x}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad AD = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

इसलिए प्रत्येक भुजा की लम्बाई $x$ तथा शीर्षलंब $\frac{\sqrt{3}x}{2}$ है।

प्रत्येक भुजा का तीन गुना = $3 \times (x)^2 = 3x^2$ ... (*i*)

और शीर्षलंब के वर्ग का चार गुना = $4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$

$$= 4 \times \frac{3}{4}x^2 = 3x^2 \quad \text{... }(ii)$$

समी० (*i*) तथा (*ii*) से यह पता चलता है कि

भुजा का तीन गुना = शीर्षलंब के वर्ग का चार गुना

**प्रश्न 17. सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए : $\Delta ABC$ में, AB $6\sqrt{3}$ = cm, AC = 12 cm और BC = 6 cm है। कोण B है :**

**(A) 120°** **(B) 60°**

**(C) 90°** **(D) 45°**

हल : (C) सही उत्तर है।

जब त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है तब पाइथोगोरस प्रमेय से

$$(12) = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + (6)^2$$

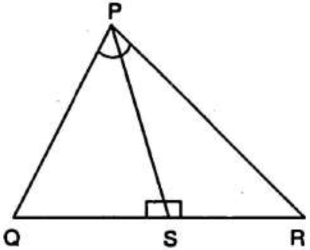
$$144 = 36 \times 3 + 36$$

$$144 = 144$$

L. H. S = R. H. S

अतः उत्तर (C) है।

प्रश्न 1. आकृति में PS कोण QPR का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ है।




हल : $\Delta PQS$ और $\Delta PRS$ में

$$\angle QRS = \angle SPR$$
$$\angle QSP = \angle RSP$$

$\Delta PQS \sim \Delta PRS$

इसलिए $$\frac{QS}{PQ} = \frac{SR}{PR}$$

$$\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$$

इति सिद्धम्

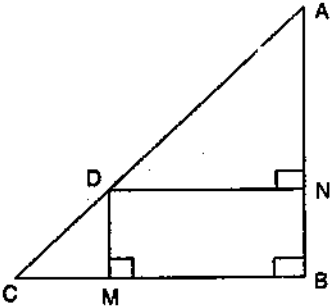
**प्रश्न 2. आकृति में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिंदु है तथा DM ⊥ BC और DN ⊥ AB है। सिद्ध कीजिए कि**

**(*i*) $DM^2 = DN. MC.$**

**(*ii*) $DN^2 = DM. AN.$**

हल : दिया है : $\Delta ABC$, $\angle B$ पर समकोण है, $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$ है।

रचना : BD को मिलाया।




सिद्ध करना है : (*i*) $DM^2 = DN. MC$.

(*ii*) $DN^2 = DM. AN.$

उपपति : (*i*) माना $\Delta BDC$

$$\angle BDC = 90^\circ$$

$\Rightarrow \quad BDM + MDC = 90^\circ \quad ...(i)$

$\Delta MCD$ में

$\angle MCD + \angle MDC = 90^\circ \quad ...(ii)$

($\because DMB = 90^\circ$ बहिष्कोण प्रमेय द्वारा)

समी० (*i*) तथा (*ii*) से $\angle MCD = \angle BDM$ ...(*iii*)

BMD और CMD में

$\angle CMD = \angle BMD$ (प्रत्येक $90^\circ$)

$\angle MCD = \angle MDB$ [समी० (*iii*) से]

$\therefore BMD \sim DMC$ (AA समरूपता)

$$\Rightarrow \quad \frac{BM}{MD} = \frac{DM}{MC}$$

$\Rightarrow \quad DM^2 = BM. MC = DN. MC \qquad (\because BM = DN)$

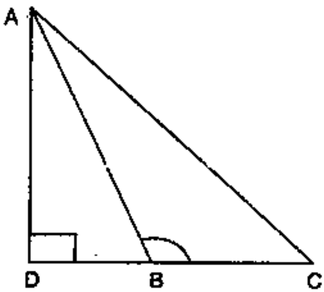
$\Rightarrow \quad DM^2 = DN. MC.$ इति सिद्धम्

उपपति : (*ii*) : समरूप त्रिभुजों BND तथा AND को लेते हुए हमारे पास है,

$$\frac{DN}{DM} = \frac{AN}{DN}$$

$DN^2 = DM. MN$ (BN = DM प्रयोग करते हुए)

**प्रश्न 3. आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90^\circ$ है तथा $AD \perp CB$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है।**




हल : समकोण $\Delta ADC$ में $\angle D = 90^\circ$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

[पाइथोगोरस प्रमेय से]

या $\quad AC^2 = AD^2 + (BD + BC)^2$

$(DC = BD + BC)$.

या, $AC^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BD.\ BC$ ...(*i*)

$([a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab)]$

$\Delta ADC$ में

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ [पाइथोगोरस प्रमेय]

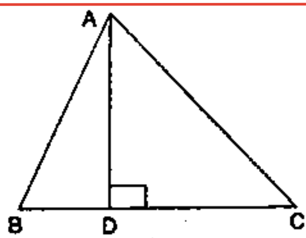
$AD^2 = AB^2 - BD^2$ ...(*ii*)

समी० (*i*) तथा (*ii*) से

$AC^2 = AB^2 - BD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BC.BD$

$\Rightarrow$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.\ BD.$

**प्रश्न 4. आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC < 90°$ है तथा $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.\ BD$ है।**




हल : $\Delta ADC$ में $\angle D = 90°$

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

[पाइथोगोरस प्रमेय]

$AC^2 = AD^2 + (BC - BD)$

$(DC = BC - BD)$

$AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2.BC.\ BD$ ...(*i*)

$\Delta ABD$ में $\angle ADB = 90°$ [पाइथोगोरस प्रमेय]

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

या $AD^2 = AB^2 - BD^2$ ...(*ii*)

समी० (*i*) और (*ii*) से

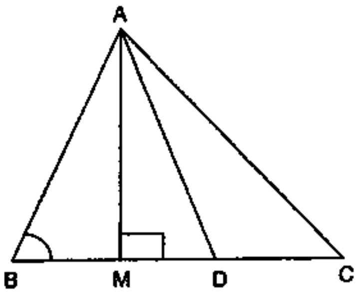
$AC = AB^2 + BC^2 - 2.\ BC.\ BD.$

**प्रश्न 5. आकृति में AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है तथा $AM \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि**

**(*i*) $AC^2 = AD^2 + BC.\ DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$**

**(*ii*) $AB^2 = AD^2 - BC.\ DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$**

**(*iii*) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$**




हल : दिया है : $\Delta ABC$ जिसमें, AD एक माध्यिका है तथा $AM \perp BC$.

सिद्ध करना है : (*i*) $AC^2 = AD^2 + BC.\ DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(*ii*) $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(*iii*) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

**उपपति : (*i*) :** समकोण $\Delta AMC$ में

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \quad \text{(पाइथोगोरस प्रमेय से)}$$

$$AC^2 = AM^2 + (MD + DC)^2$$

$$= AM^2 + MD^2 + DC^2 + \quad MD.DC \quad ...(i)$$

$\Delta AMD$ में

$$AD^2 = AM^2 + MD^2 \quad \text{(पाइथोगोरस प्रमेय)}$$

$$AM^2 = AD^2 - MD^2 \quad ...(ii)$$

समी० (*i*) तथा (*ii*) से

$$AC^2 = AD^2 - MD^2 + MD^2 + DC^2 + 2MD.DC$$

$$= AD^2 + DC^2 + 2MD.DC$$

$$= AD^2 + 2MD.\left(\frac{1}{2}BC\right) + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 \quad [DC = \frac{1}{2}BC)$$

$$AC^2 = AD^2 + BC.MD + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

**उपपति : (*ii*) :** $\Delta AMD$ में,

$$AD^2 = AM^2 + MD^2 \quad ...(i) \text{ (पाइथोगोरस प्रमेय)}$$

समकोण $\Delta AMB$ में

$$AB^2 = BM^2 + AM^2$$

$$= (BD - ED)^2 + AM^2$$

$$= BD^2 + MD^2 - 2BD.MD + AM^2$$

$$AB^2 = BD^2 + MD^2 + AM^2 - 2BD.MD \quad ...(ii)$$

समी० (*i*) तथा (*ii*) से

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.MD$$

$$AB^2 = AD^2 - 2MD + \left(\frac{1}{2}BC\right) + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \quad (BD = \frac{1}{2}BC)$$

$$AB^2 = AD^2 - MD.BC + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

इति सिद्धम्

(*iii*) समकोण $\Delta AMD$ में,

$$AD^2 = AM^2 + MD^2 \quad ...(i) \text{ (पाइथोगोरस प्रमेय)}$$

समकोण $\Delta AMB$ में

$$AB^2 = BM^2 + AM^2 \quad \text{(पाइथोगोरस प्रमेय)}$$
$$= (BD - MD)^2 + AM^2$$
$$= BD^2 + MD^2 - 2BD.\ MD + AM^2$$
$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.\ MD \quad ...(ii) \text{ [समी० (i) से]}$$

समकोण $\Delta AMC$ में

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \quad \text{(पाइथोगोरस प्रमेय)}$$
$$= AM^2 + (MD + DC)^2$$
$$= AM^2 + MD^2 + DC^2 + 2MD.\ DC$$
$$AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2MD.BD \quad ...(iii)$$

(*i*) तथा (*iii*) को जोड़ने पर

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$
$$= 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$$
$$= 2AD^2 + 2.\ \frac{1}{4}BC^2$$
$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

इति सिद्धम्

---

**प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।**

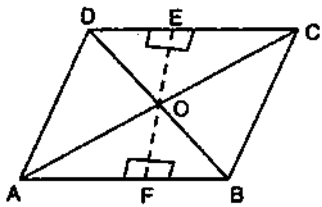
हल : ABCD एक ||$^{gm}$ है तथा AC और BD इसके विकर्ण हैं।

||$^{gm}$ के गुणधर्म से

$\Delta ODC \sim \Delta OAB$

$\Delta OAD \sim \Delta OCB$

और




$OD = OB,\ OA = OC,\ AB = CD,\ AD = BC$

$$OD^2 = OE^2 + DE^2 \quad ...(i)$$
$$OC^2 = OE^2 + EF^2 \quad ...(ii)$$

$$OD = \frac{1}{2}DB \text{ और } OC = \frac{1}{2}AC$$

तब, $\frac{1}{4}DB^2 = OE^2 + DE^2 \quad ...(iii)$

$$\frac{1}{4}AC^2 = OE^2 + EC^2 \quad ...(iv)$$

(*iii*) और (*iv*) को जोड़ने पर

$$\frac{1}{4}(DB^2 + AC^2) = 2OE^2 + DE^2 + EC^2$$

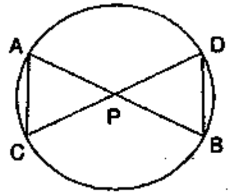
$$DB^2 + AC^2 = 8OE^2 + 4DE^2 + 4EC^2$$

$$\mathbf{DB^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}$$

**प्रश्न 7. आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि**

**(*i*) ΔAPC ~ ΔDPB**

**(*ii*) AP. PB = CP. DP**




हल : दिया है : AB और CD जीवाएँ हैं जो P पर काटती हैं।

सिद्ध करना है : (*i*) ΔAPC ~ ΔDPB

(*ii*) AP. PB = CP. DP

उपपत्ति : (*i*) ΔPAC और ΔPDB में हमारे पास है

∠PAC = ∠PDB (एक ही वृत्तखंड में बने कोण)

∠APC = ∠BPD (शीर्षाभिमुख कोण)

∴ ΔAPC ~ ΔDPB इति सिद्धम्

(*ii*) ΔAPC ~ ΔDPB

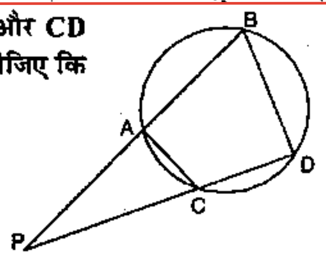
इसलिए $$\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{PB}$$

⇒ AP. PB = CP. DP इति सिद्धम्

**प्रश्न 8. आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि**

**(*i*) ΔPAC ~ ΔPDB**

**(*ii*) PA. PB = PC. PD**




हल : (*i*) ΔPAC और ΔPDB में

∠APC = ∠DPB (उभयनिष्ठ)

∠PCA = ∠PBD (बहिष्कोण प्रमेय)

∴ ΔPAC ~ PDB इति सिद्धम्

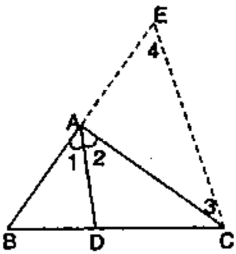
(*ii*) भाग (*i*) से

ΔPAC ~ ΔPDB

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

⇒ PA . PB = PC. PD इति सिद्धम्

**प्रश्न 9.** आकृति में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।




**हल :** दिया है : एक ΔABC जिसमें D भुजा BC पर स्थित कोई बिंदु इस प्रकार है कि

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

सिद्ध करना है : AD, ∠BAC का कोण समद्विभाजक है।

रचना : BA को E तक इस प्रकार बढ़ाया गया कि AE = AC, EC को मिलाया।

उपपति : ΔACE में, हमारे पास है

$AE = AC$ (रचना से)

$\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$ ...(*i*) (समान भुजाओं के समान कोण)

अब $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ (AE = AE)

ΔBCE में, हमारे पास है

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

∴ थेल्स प्रमेय के विलोम से, DA ∥ CE

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 4$ ...(*ii*) (संगत कोण)

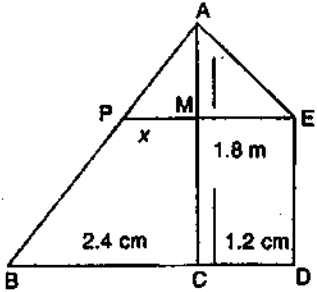
और $\angle 2 = \angle 3$ ...(*iii*) (एकांतर कोण)

परंतु $\angle 3 = \angle 4$ [समी० (*i*) से]

∴ $\angle 1 = \angle 2$ [(*ii*) और (*iii*) से]

**प्रश्न 10.** नाज़िमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है। उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाज़िमा से दूरी 3.6m है और

छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिंदु से उसकी दूरी 2.4m है। यह मानते हुए कि उसकी डोरी ( उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक ) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है ( देखिए आकृति 6.64 ) ? यदि वह डोरी को 5cm/s की दर से अंदर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाज़िमा की काँटे से क्षैतिज दूरी कितनी होगी ?




हल : ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जो C पर समकोण है।

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad \text{[पाइथोगोरस प्रमेय]}$$

$$AB^2 = (1.8)^2 + (2.4)^2$$

$$AB^2 = 9$$

$$AB = 3\text{m}.$$

अतः दूरी 3m है।

5cm/sec की दर से 12sec में खींची गई डोरी = 5 × 12 = 60cm = 0.60m

∴ बची डोरी = (3 – 0.6)m = 2.4m

$$\Delta ABC \sim \Delta APM$$

$$\frac{x}{2.4} = \frac{1.2}{1.8}$$

$$x = \frac{2.4 \times 1.2}{1.8}$$

$$\Rightarrow \qquad x = 1.6 \text{ m}$$

अब

∴ काँटे से क्षैतिज दूरी

$$= x + 1.2$$

$$= 1.6 + 1.2 = 2.8 \text{ m}.$$