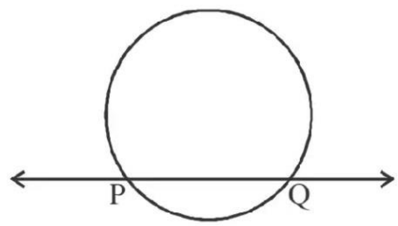
वृत्त

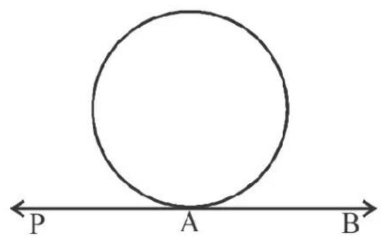
महत्त्वपूर्ण बिंदुः

1. वृत्त उन बिन्दुओं के समूह से बनता है जो एक निश्चित बिन्दु से अचर दूरी पर होते हैं। निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है और अचर दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

2. **छेदक रेखा**—यदि कोई रेखा किसी वृत्त को दो अभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो तो वह छेदक रेखा कहलाती है।



3. **वृत की स्पर्श रेखा**—वृत की स्पर्श रेखा वह रेखा होती है जो वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। जिस बिन्दु पर स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है उसे स्पर्श बिन्दु कहते हैं।



4. **स्पर्श रेखा की संख्याएं**—किसी वृत पर अंसख्य स्पर्श रेखाएं बनाई जा सकती हैं।

5. **छेदक रेखा की संख्याएं**—किसी वृत्त पर असंख्य छेदक रेखाएं बनाई जा सकती हैं।

6. निम्न प्रमेय सिद्ध करने के लिए पूछी जा सकती है—

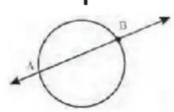
(*i*) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

(*ii*) किसी बाहय बिन्दु से वृत्त पर बनी स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।

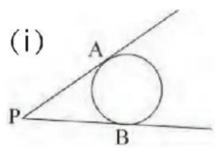
वृत्त (Circle)

छेदक रेखा (Secants)

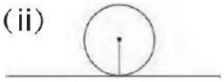
वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है।



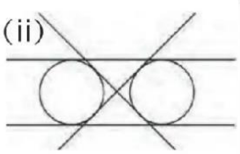
(i)



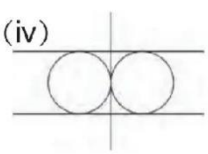
(ii)



(ii)



(iv)



स्पर्श रेखा (Tangent)

वृत्त को एक ही बिन्दु पर काटती है या स्पर्श करती है और वह बिन्दु स्पर्श बिन्दु (Point of Contact) कहलाती है

(i) किसी वाह्य बिन्दु से वृत्त पर अधिकतम दो सपर्श रेखा खींची जा सकती है और दोनों की लम्बाईयाँ बराबर होती हैं। अर्थात $PA = PB$

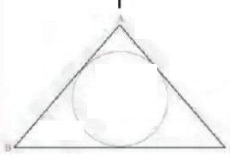
(ii)वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

(iii) दो वृत्त जो एक दूसरे को स्पर्श नहीं करते उनपर 4 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

(iv) वाह्य स्पर्शी वृत्त पर तीन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

अन्तः वृत्त (In-circle)

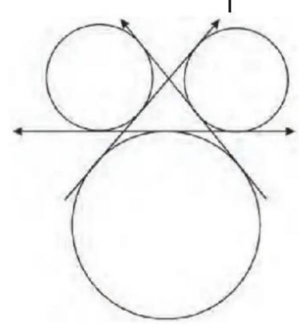
त्रिभुज के तीनों भुजाओं को स्पर्श करती है।



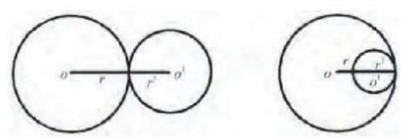
बर्हिवृत्त (Ex-circle)

(i) त्रिभुज के एक भुजा को स्पर्श करती है।

(i)प्रत्येक त्रिभज के तीन बर्हिवृत्त हो सकते हैं।



यदि दो वृत्त एक दूसरे को आंतरिकतः या वाह्यतः स्पर्श करते हों तो स्पर्श बिन्दु केन्द्रों से होकर जाने वाली रेखा पर स्थित होता है।



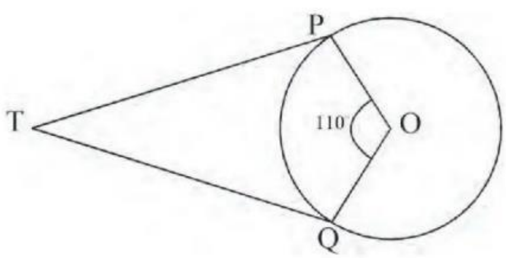
प्रश्न 1. दिये गये चित्र में, यदि TP और TQ केन्द्र 'O' वाले एक वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $\angle POQ = 110^\circ$ तो $\angle PTQ$ को मान क्या होगा।

उत्तर:- चूँकि TP और TQ वृत्त की स्पर्श रेखा है।

(प्रमेय से) $OP \perp PT, OQ \perp QT$

$\therefore \angle OQT = 90^\circ = \angle OPT$

पुनः "$PTQO$" एक चतुर्भुज है।



$\therefore \angle PTQ + \angle OPT + \angle OQT + \angle POQ = 360^\circ$

$\therefore \angle PTQ + 90^\circ + 90^\circ + 110^\circ = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle PTQ = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ$

प्रश्न 2. ΔABC का अन्तः वृत्त भुजाओं BC, CA और AB को क्रमशः D, E और F पर स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि

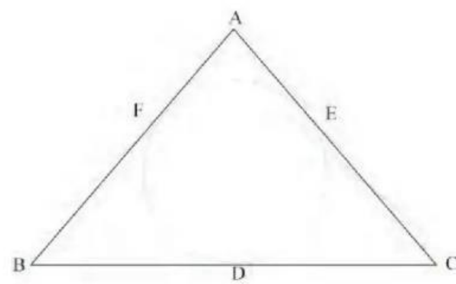
$$AF + BD + CE = AE + CD + BF = \frac{1}{2}(\Delta ABC \text{ का परिमाप})$$

उत्तर:- (प्रमेय से) किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयाँ समान होती है।

$\therefore AF = AE$

$BD = BF$

$CE = CD$



उपरोक्त संगत पक्षों को जोड़ने पर

$AF + BD + CE = AE + BF + CD ....(i)$

पुनः, $\frac{1}{2}(\Delta ABC \text{ का परिमाप}) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

$$= \frac{1}{2}(AF + FB + BD + DC + CE + EA)$$

$$= \frac{1}{2}[(AF + BD + CE) + (AE + BF + CD)]$$

$$= \frac{1}{2}[(AF + BD + CE) + (AF + BD + CE)] \qquad [(i)\text{से}]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (AF + BD + CE) = AF + BD + CE$$

$$= AE + BF + CD \qquad [(i)\text{से}]$$

प्रश्न3. 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के किसी बिन्दु P पर PQ स्पर्श रेखा है। वृत्त का केन्द्र O से गुजरने वाली रेखा को Q पर काटती है ताकि $OQ = 12$ सेमी। PQ की लम्बाई है।

उत्तरः- $PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2}$

$= \sqrt{12^2 - 5^2}$

$= \sqrt{119}$