13

सांख्यिकी

(Statistics)

अध्याय एक दृष्टि में

- वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निम्न प्रकार से ज्ञात करते हैं–

(i) प्रत्यक्ष विधि से— $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) कल्पित माध्य विधि से—$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) पग-विचलन विधि से—$\bar{x} = A + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

इसमें हम यह मानकर चलते हैं कि प्रत्येक वर्ग की बारम्बारता उसके मध्य बिन्दु अर्थात् वर्ग चिह्न पर स्थित है।

- वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है— बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

जहाँ संकेत अपना स्वभाविक अर्थ रखते हैं।

- किसी बारम्बारता बंटन में किसी वर्ग की संचयी बारम्बारता उस वर्ग से पहले वाले सभी वर्गों की बारम्बारताओं का योग होती है।
- वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं—

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

बहुविकल्पीय प्रश्न 1 अंक

1. यदि 5, 10, 15, R, 20, 35 और 40 का समान्तर माध्य 21 हो, तो R का मान होगा— **[UP 2019 AW]**

(a) 18 (b) 22
(c) 25 (d) 30

2. किसी बारम्बारता बंटन में किसी वर्ग की संचयी बारम्बारता उस वर्ग से पहले वाले सभी वर्गों की बारम्बारताओं का होती है—

(a) अन्तर (b) गुणनफल (c) योग (d) भागफल

3. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने की कल्पित विधि के लिए सूत्र है—

(a) $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ (b) $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(c) $a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = \bar{x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने के लिए सूत्र होता है—

(a) $l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$ (b) $l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

(c) (a) व (b) दोनों (d) इनमें से कोई नहीं

5. आँकड़ों 2, 6, 4, 2, 0, 2, 1, 3, 2, 3 का बहुलक है—
(a) 4 (b) 0 (c) 2 (d) 3

6. वर्ग अन्तराल 15-20 का वर्ग चिह्न है—
(a) 10 (b) 25 (c) 35 (d) 17.5

7. निम्न में से समान्तर माध्य को प्रदर्शित किया जाता है—
(a) $\bar{x}$ से (b) $\Sigma f_i x_i$ से (c) Σf_i से (d) x से

8. आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करने के लिए सूत्र है—
(a) $\dfrac{\frac{n}{2}-cf}{f}$ (b) $l+\left(\frac{n}{2}-cf\right)\times h$
(c) $l+\left(\dfrac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right)$ (d) $l+\left(\dfrac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right)h$

9. प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का माध्य है—
(a) 5.6 (b) 5.5 (c) 5 (d) 4

10. आँकड़ों 2, 8, 4, 6, 5 की माध्यिका है—
(a) 4 (b) 6 (c) 5 (d) 8

11. 2 से 12 तक की विषम संख्याओं का समान्तर माध्य होगा— [UP 2021 HJ]
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

12. यदि α, (α + 2), (α + 4), (α + 6) तथा (α + 8) का समान्तर माध्य 11 है तो α का मान होगा— [UP 2016]
(a) 7 (b) 5 (c) 4 (d) 1

13. बहुलक चर का वह मान होता है जिसकी .... है।
(a) अधिकतम बारम्बारता
(b) न्यूनतम बारम्बारता
(c) माध्य बारम्बारता
(d) सर्वाधिक माध्य बारम्बारता

14. बहुलक ज्ञात करने का सूत्र है—
(a) बहुलक $= l+\left(\dfrac{f_1-f_0}{f_1-f_0-2f_2}\right)$ (b) बहुलक $= l+\left(\dfrac{2f_1-f_0}{f_1-f_0-2f_2}\right)$
(c) बहुलक $= l+\left(\dfrac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)$ (d) बहुलक $= l+\left(\dfrac{f_1-f_0}{2f_1+f_0-f_2}\right)$

15. 100 परिवारों के बच्चों की संख्या निम्न सारणी में दी गई है। इसका बहुलक होगा— [UP 2018]

बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
परिवारों की संख्या	15	30	25	19	8	2	1

(a) 6 (b) 30 (c) 1 (d) 25

16. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक होगा— [UP 2018]
19, 38, 25, 36, 38, 25, 18, 38, 25, 19
(a) 19 (b) 25 (c) 36 (d) 38

17. 2, 3, 7, 2, 7, 5, 3, 7 का बहुलक है— (UP 2018)
(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 7

18. यदि आँकड़े 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, α तथा 2 का बहुलक 7 है, तो α का मान होगा— [UP 2017]
(a) 2 (b) 5 (c) 7 (d) इनमें से कोई नहीं

19. यदि माध्य $= \dfrac{3\text{ माध्यक} - K\text{ बहुलक}}{2}$, तब $K =$
(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं

20. किसी आँकड़े के माध्य और माध्यक क्रमश: 20 और 22 हैं। बहुलक का मान है—
(a) 20 (b) 26 (c) 22 (d) 21

21. 1 से 10 तक की धनात्मक सम संख्याओं का समान्तर माध्य होगा— [UP 2019, 22 AW, 23 DW]
(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 5

22. n प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को a से बढ़ा दिया जाए तो नया माध्य होगा — [UP 2022 AX]
(a) $\bar{x}+a$ (b) $\bar{x}+\frac{a}{2}$ (c) $\bar{x}-a$ (d) $\bar{x}-\frac{a}{2}$

23. एक बारम्बारता बंटन के लिए माध्य, माध्यिका और बहुलक के बीच सम्बन्ध है– [UP 2022 AY, 23 DV]
(a) बहुलक = 3 माध्य − 2 माध्यिका
(b) बहुलक = 2 माध्यिका − 3 माध्य
(c) बहुलक = 3 माध्यिका − 2 माध्य
(d) बहुलक = 3 माध्यिका + 2 माध्य

24. 1 से 9 तक की प्राकृतिक संख्याओं का माध्य होगा— [UP 2022 BA]
(a) 3 (b) 5 (c) 8 (d) 9

25. यदि किसी बारम्बारता बंटन का माध्य 20.5 तथा माध्यिका 20 है तो इसका बहुलक होगा— [UP 2022 BA]
(a) 21.5 (b) 17 (c) 19 (d) 20.5

26. निम्न सारणी का माध्य होगा-

वर्ग-अन्तराल	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
बारम्बारता	3	1	5	4	7

[UP 2023 DV]
(a) 4.2 (b) 5.4 (c) 6 (d) 6.1

27.

वर्ग-अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	11	21	23	14	5

उपर्युक्त बारम्बारता बंटन में बहुलक वर्ग होगा- [UP 2023 DV]
(a) 10-20 (b) 20-30 (c) 30-40 (d) 40-50

28. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्यिका वर्ग होगा-

वर्ग-अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	4	5	13	20	8

[UP 2023 DX]
(a) 40-50 (b) 30-40 (c) 20-30 (d) 10-20

29. केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप है– [UP 2023 EA]

(a) बारम्बारता (b) संचयी बारम्बारता

(c) वर्ग-अन्तराल (d) बहुलक

30. प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं की माध्यिका होगी– [UP 2023 ER]

(a) 5 (b) 5.2 (c) 5.4 (d) 5.5

उत्तरमाला

1.	(b)	2.	(c)	3.	(b)	4.	(b)	5.	(c)
6.	(d)	7.	(a)	8.	(d)	9.	(b)	10.	(c)
11.	(d)	12.	(a)	13.	(a)	14.	(c)	15.	(c)
16.	(d)	17.	(a)	18.	(c)	19.	(a)	20.	(b)
21.	(b)	22.	(a)	23.	(c)	24.	(b)	25.	(c)
26.	(d)	27.	(b)	28.	(b)	29.	(d)	30.	(d)

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न 2 अंक

प्रश्न 1. 10 व्यक्तियों के भार का समान्तर माध्य 45.6 किग्रा है। उनके भारों का योगफल ज्ञात कीजिए। [UP 2019 AW, 21 HJ, 23 EA]

हल: यहाँ, समान्तर माध्य = $\frac{\text{भारों का योगफल}}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$

$$45.6 = \frac{\text{भारों का योगफल}}{10}$$

∴ भारों का योगफल = 45.6 × 10 = **456** उत्तर

प्रश्न 2. आँकड़ों 3, 4, 6 तथा x का माध्य 5 है, तब x का मान ज्ञात कीजिए। [UP 2018, 22 AV, 23 EA]

हल: ∵ समान्तर माध्य = 5

∴ माध्य = $\frac{\text{संख्याओं का योग}}{\text{कुल संख्याएँ}}$

$$5 = \frac{3+4+6+x}{4} \text{ या } 20 = 13 + x$$

या $x = 20 - 13 = \mathbf{7}$ उत्तर

प्रश्न 3. संख्याओं 5, 10, 15, 22, 20, 35 तथा 40 का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: ∵ समान्तर माध्य = $\frac{\text{संख्याओं का योग}}{\text{कुल संख्याएँ}}$

∵ समान्तर माध्य = $\frac{5+10+15+22+20+35+40}{7} = \frac{147}{7} = 21$

उत्तर

प्रश्न 4. 10 पदों का समान्तर माध्य 24 तथा अन्तिम 8 पदों का समान्तर माध्य 20 है। प्रथम दो पदों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: दस संख्याओं का समान्तर माध्य = 24

तथा समान्तर माध्य = $\frac{\text{संख्याओं का योग}}{\text{कुल संख्याएँ}}$

∴ $24 = \frac{\text{दस संख्याओं का योग}}{10}$

या दस संख्याओं का योग = 24 × 10 = 240 [वज्रगुणन करने प

तथा अन्तिम आठ संख्याओं का समान्तर माध्य = 20 [दिया है]

∴ अन्तिम आठ संख्याओं का योग = 20 × 8 = 160

तब, प्रथम दो संख्याओं का योग

= दस संख्याओं का योग – अन्तिम आठ संख्याओं का योग

= 240 – 160 = 80

अतः प्रथम दो संख्याओं का समान्तर माध्य

$$= \frac{\text{प्रथम दो संख्याओं का योग}}{2} = \frac{80}{2} = 40$$ उत्त

प्रश्न 5. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए–

18, 38, 25, 36, 38, 25, 18, 38, 25, 19 और 25

हल: दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर

18, 18, 19, 25, 25, 25, 25, 36, 38, 38, 38

∵ दिए गए आँकड़ों में 25 की बारम्बारता सबसे अधिक है।

अतः बहुलक = 25 उत्त

प्रश्न 6. आँकड़ों 10, 13, 17, 19, 12, 15, 19, 20, 19 और 1 का बहुलक ज्ञात कीजिए। [UP 2019 A

हल: दिए गए आँकड़ों में 19 की बारम्बारता सबसे अधिक है। अतः बहुल 19 है। उत्त

प्रश्न 7. प्रथम 10 अभाज्य पूर्णांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए। [UP 2022 AW

हल: प्रथम 10 अभाज्य पूर्णांक :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

$n = 10$ (सम)

$$\therefore \text{ माध्यिका} = \frac{\frac{10}{2}\text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{5\text{ वाँ पद} + 6\text{ वाँ पद}}{2} = \frac{11+13}{2} = 12$$ उत्त

प्रश्न 8. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का बहुलक वर्ग ज्ञा कीजिए– [UP 2022 AX

वर्ग अन्तराल	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
बारम्बारता	5	7	9	17	12	10

हल: सर्वाधिक बारम्बारता = 17, संगत वर्ग = 12 – 16

∴ बहुलक वर्ग = 12 – 16 उत्त

प्रश्न 9. यदि 27, 23, $x-4$, $x+4$, 15, 3 और 7 का माध्य 15 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए। [UP 2022 BA

हल: $\frac{27+23+x-4+x+4+15+3+7}{7} = 15$

⇒ $75 + 2x = 105$

⇒ $2x = 105 - 75 = 30$

⇒ $x = 15$ उत्त

लघु उत्तरीय प्रश्न

4 अंक

प्रश्न 1. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए–

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	6	8	10	7	9

हल: समान्तर माध्य के लिए सारणी निम्न है–

वर्ग अन्तराल	वर्ग का माध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	$f \times x$
0-10	5	6	30
10-20	15	8	120
20-30	25	10	250
30-40	35	7	245
40-50	45	9	405
योग		$\Sigma f = 40$	$\Sigma fx = 1050$

$\because \quad \Sigma f = 40$ तथा $\Sigma fx = 1050$

$\therefore$ समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1050}{40} = 26.25$

अतः दिए गए बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य 26.25 है। **उत्तर**

प्रश्न 2. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन सारणी से आँकड़ों का समान्तर माध्य 21.5 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए– [UP 2020 NB, 23 DV]

x	5	15	25	35	45
f	6	4	3	k	2

हल: प्रत्यक्ष विधि द्वारा माध्य की गणना

x	f	$f \times x$
5	6	$5 \times 6 = 30$
15	4	$15 \times 4 = 60$
25	3	$25 \times 3 = 75$
35	k	$35 \times k = 35k$
45	2	$45 \times 2 = 90$
योग	$\Sigma f = k + 15$	$\Sigma fx = 255 + 35k$

$\because$ आँकड़ों का माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \Rightarrow 21.5 = \frac{255 + 35k}{k + 15}$

$\Rightarrow \quad 21.5k + 322.5 = 255 + 35k$

$\Rightarrow \quad 322.5 - 255 = 35k - 21.5k$

$\Rightarrow \quad 67.5 = 13.5k$

अतः $\quad k = \frac{67.5}{13.5} = 5$ **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि निम्न सारणी में विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का समान्तर माध्य 25 अंक है, तो A का मान ज्ञात कीजिए– [UP 2019 AV]

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थियों की संख्या	3	A	6	10	5

हल:

प्राप्तांक	मध्यमान (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	fx
0-10	5	3	15
10-20	15	A	15A
20-30	25	6	150
30-40	35	10	350
40-50	45	5	225
योग		$A + 24$	$15A + 740$

$\therefore$ समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$ या $25 = \frac{15A + 740}{A + 24}$

या $\quad 25A + 600 = 15A + 740$ या $10A = 140$

या $\quad A = 14$ **उत्तर**

प्रश्न 4. निम्नलिखित सारणी से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए– [UP 2020 NB, 23 DY]

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
5 से कम	3
10 से कम	10
15 से कम	25
20 से कम	49
25 से कम	65
30 से कम	73
35 से कम	78
40 से कम	80

हल: हम निम्नलिखित सारणी बनाते हैं—

वर्ग अन्तराल	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	$f \times x$
0-5	$\frac{0+5}{2} = 2.5$	3	7.5
5-10	$\frac{5+10}{2} = 7.5$	$10 - 3 = 7$	52.5
10-15	$\frac{10+15}{2} = 12.5$	$25 - 10 = 15$	187.5
15-20	$\frac{15+20}{2} = 17.5$	$49 - 25 = 24$	420.0
20-25	$\frac{20+25}{2} = 22.5$	$65 - 49 = 16$	360.0

25-30	$\frac{25+30}{2}=27.5$	$73-65=8$	220.0
30-35	$\frac{30+35}{2}=32.5$	$78-73=5$	162.5
35-40	$\frac{35+40}{2}=37.5$	$80-78=2$	75.0
योग		$N=\Sigma f=80$	$\Sigma fx=1485$

$$\text{माध्य } \bar{x}=\frac{\Sigma fx}{N}=\frac{1485}{80}=\mathbf{18.56}$$ उत्तर

प्रश्न 5. यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ का समान्तर माध्य m है, तब प्रेक्षणों $kx_1, kx_2, kx_3, ..., kx_n$, जहाँ $k \neq 0$ का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: $\because$ समान्तर माध्य $=\frac{\text{प्रेक्षणों से योग}}{\text{कुल प्रेक्षण}} \therefore m=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$

अब, माध्य $=\frac{kx_1+kx_2+kx_3+...+kx_n}{n}$

$$=\frac{k(x_1+x_2+x_3...+x_n)}{n}=km$$ उत्तर

प्रश्न 6. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए– **[UP 2022 AZ]**

वर्ग अन्तराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
बारम्बारता	2	3	7	9	5	4

हल: यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता = 9

$\therefore$ बहुलक वर्ग $=55-70$

अत्र $l=55, h=70-55=15$

$f_0=7, f_1=9, f_2=5$

बहुलक $=l+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times h=55+\frac{9-7}{18-7-5}\times 15$

$$=55+\frac{30}{6}=55+5=60$$ उत्तर

प्रश्न 7. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए– **[UP 2022 AV]**

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0-10	6
10-20	9
20-30	12
30-40	8
40-50	15

हल:

वर्ग	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-10	6	6
10-20	9	15
20-30	12	27
30-40	8	35
40-50	15	50

$N=50 \Rightarrow \frac{N}{2}=\frac{50}{2}=25 \Rightarrow$ माध्यिका वर्ग $=20-30$

$l=20, h=30-20=10, f=12, c=15$

माध्यिका $=l+\frac{\left(\frac{N}{2}-C\right)\times h}{f}=20+\frac{(25-15)\times 10}{12}$

$=20+\frac{100}{12}=20+8.33=28.33$ उत्तर

प्रश्न 8. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अन्तर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर माध्य पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

पौधों की संख्या	घरों की संख्या
0-2	1
2-4	2
4-6	1
6-8	5
8-10	6
10-12	2
12-14	3

हल:

पौधों की संख्या	घरों की संख्या (f_i)	मध्य-बिन्दु (x_i)	$f_i \times x_i$
0-2	1	1	1
2-4	2	3	6
4-6	1	5	5
6-8	5	7	35
8-10	6	9	54
10-12	2	11	22
12-14	3	13	39
योग	20		162

यहाँ $\Sigma f_i=20$ तथा $\Sigma f_i x_i=162$ हो, तब

माध्य $\bar{x}=\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}=\frac{162}{20}=8.1$ उत्तर

प्रश्न 9. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य 25 है। p का मान ज्ञात कीजिए–

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	5	18	15	p	6

[UP 2019 AA]

हल:

वर्ग अन्तराल	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	$f \times x$
0–10	5	5	25
10–20	15	18	270
20–30	25	15	375
30–40	35	p	$35p$
40–50	45	6	270
योग		$44 + p$	$940 + 35p$

∴ समान्तर माध्य $= \frac{\sum fx}{\sum f}$

$$25 = \frac{940 + 35p}{44 + p}$$

$$25(44 + p) = 940 + 35p$$

$$1100 + 25p = 940 + 35p$$

$$1100 - 940 = 35p - 25p$$

$$160 = 10p$$

$$p = \frac{160}{10} = 16$$

उत्तर

प्रश्न 10. सारणी से माध्य ज्ञात कीजिए। **[UP 2020 MY]**

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
120-130	2
130-140	8
140-150	12
150-160	20
160-170	8

हल:

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	मध्य-बिन्दु (x_i)	$f_i \times x_i$
120-130	2	125	250
130-140	8	135	1080
140-150	12	145	1740
150-160	20	155	3100
160-170	8	165	1320
	योग 50		7490

यहाँ, $\Sigma f_i = 50$ तथा $\Sigma f_i x_i = 7490$ हो, तो

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{7490}{50} = 149.80$ उत्तर

प्रश्न 11. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए– **[UP 2020 NB, 21 HJ, 22 HI, 23 EB]**

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
1-3	7
3-5	8
5-7	2
7-9	2
9-11	1

हल: यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता = 8

तथा संगत वर्ग = 3-5 (बहुलक वर्ग)

अब, बहुलक $= l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा = 3

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता = 8

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता = 7

f_2 = बहुलक वर्ग से ठीक अगले वर्ग की बारम्बारता = 2

h = वर्ग अन्तराल की लम्बाई = 5 − 3 = 2

∴ बहुलक $= 3 + \frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2} \times 2 = 3 + \frac{1}{7} \times 2$

$= 3 + 0.28 = 3.28$ उत्तर

प्रश्न 12. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेब खर्च दर्शाता है। माध्य जेब खर्च ₹ 18 है। लुप्त बारम्बारता f ज्ञात कीजिए। **[UP 2019 AZ, 22 AV]**

दैनिक जेब खर्च (₹ में)	बच्चों की संख्या
11-13	7
13-15	6
15-17	9
17-19	13
19-21	f
21-23	5
23-25	4

हल:

दैनिक जेब खर्च (₹ में)	बच्चों की संख्या (f_i)	मध्य-बिन्दु (x_i)	$f_i \times x_i$
11-13	7	12	84
13-15	6	14	84
15-17	9	16	144
17-19	13	18	234
19-21	f	20	$20f$
21-23	5	22	110
23-25	4	24	96
योग	$44 + f$		$752 + 20f$

माध्य, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ या $18 = \frac{752 + 20f}{44 + f}$

या $752 + 20f = 792 + 18f$

या $20f - 18f = 792 - 752$ या $2f = 40$

∴ $f = 20$

अतः f का मान 20 होगा। उत्तर

प्रश्न 13. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका की गणना कीजिए– **[UP 2019 AY, 20 NB]**

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	5	15	30	8	2

हल:

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारंबारता
0–10	5	5
10–20	15	20
20–30	30	50
30–40	8	58
40–50	2	60

यहाँ, $N = 60 \quad \therefore \quad \frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$

यह संचयी बारम्बारता 50 अन्तर्गत आता है। अतः 20 – 30 माध्यिका का वर्ग है।

$\therefore L_1 = 20, L_2 = 30, f = 30, C = 20$

$\therefore$ माध्यिका $= L_1 + \frac{(L_2 - L_1)}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$

$= 20 + \frac{(30-20)}{30}(30-20) = 20 + \frac{10}{30} \times 10 = 20 + \frac{100}{30}$

$= 20 + \frac{10}{3} = 20 + 3.3 = \mathbf{23.3}$

उत्तर

विस्तृत उत्तरीय प्रश्न 6 अंक

प्रश्न 1. किसी फुटकर बाजार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहे थे। इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न-भिन्न थीं। पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था–

आमों की संख्या	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
पेटियों की संख्या	15	110	135	115	25

एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए। आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का प्रयोग किया है? **[UP 2019 BA]**

हल: हमें सर्वप्रथम दी गई वर्ग सीमाओं को सतत् रूप में निम्न प्रकार से बनाना होगा–

आमों की संख्या	पेटियों की संख्या (f_i)	माध्य-बिन्दु (x_i)	विचलन $d_i = x_i - A$	$f_i \times d_i$
49.5-52.5	15	51	−6	−90
52.5-55.5	110	54	−3	−330
55.5-58.5	135	57(A)	0	0
58.5-61.5	115	60	3	345
61.5-64.5	25	63	6	150
योग	400			75

यहाँ, $\Sigma f_i = 400$, $\Sigma f_i d_i = 75$ तथा $A = 57$ हो, तो

आमों की माध्य संख्या, $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 57 + \frac{75}{400} = 57 + 0.1875$

$\bar{x} = 57.1875 = 57.19$

उत्तर

अतः आमों की माध्य संख्या 57.19 है।

प्रश्न 2. यदि एक विद्यार्थी के प्राप्तांकों का समान्तर माध्य 25 है तो f का मान ज्ञात कीजिए। **[UP 2019 AY, 23 DX]**

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	6	f	6	10	5

हल:

प्राप्तांक	मध्यमान (x)	बारम्बारता (f)	$f \times x$
0–10	5	6	30
10–20	15	f	$15f$
20–30	25	6	150
30–40	35	10	350
40-50	45	5	225
		$\Sigma f = 27 + f$	$\Sigma fx = 755 + 15f$

समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}, \frac{25}{1} = \frac{755 + 15f}{27 + f}$

$25(27 + f) = 755 + 15f$

$675 + 25f = 755 + 15f$

$25f - 15f = 755 - 675$

$10f = 80 \quad f = \frac{80}{10} = 8$

उत्तर

प्रश्न 3. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर प्रतिशत में दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए–

साक्षरता दर % में	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

हल: माध्य साक्षरता दर ज्ञात करने हेतु सारणी

साक्षरता दर (प्रतिशत में)	नगरों की संख्या (f_i)	मध्य-बिन्दु (x_i)	$d_i = x_i - A$	$f_i \times d_i$
45-55	3	50	−20	−60
55-65	10	60	−10	−100
65-75	11	70 (A)	0	0
75-85	8	80	10	80
85-95	3	90	20	60
योग	35			−20

माध्य साक्षरता दर, $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 70 + \left(\frac{-20}{35}\right) = 70 - \frac{4}{7}$

$= 70 - 0.57 = 69.43$

अतः माध्य साक्षरता दर = **69.43%**

उत्तर

प्रश्न 4. निम्नलिखित आँकड़े, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल (घण्टों में) की सूचना देते हैं—

जीवन काल (घण्टों में)	बारम्बारता
0–20	10
20–40	35
40–60	52
60–80	61
80–100	38
100–120	29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

हल: दी गयी सारणी निम्नलिखित है—

जीवन काल (घण्टों में)	बारम्बारता
0–20	10
20–40	35
40–60	52 (f_1)
60–80	61(f)
80–100	38 (f_2)
100–120	29

दी गयी सारणी में अधिकतम बारम्बारता

$f = 61,\ f_1 = 52,\ f_2 = 38$

∵ अधिकतम बारम्बारता वाला वर्ग = 60 – 80

∴ $l_1 = 60$ तथा $l_2 = 80$

और $h = l_2 - l_1 = 80 - 60 = 20$

$$\text{बहुलक} = l_1 + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times h$$

$$= 60 + \left(\frac{61 - 52}{2 \times 61 - 52 - 38}\right) \times 20 = 60 + \frac{9 \times 20}{122 - 90} = 60 + \frac{180}{32}$$

$$= 60 + 5.625 = 65.625$$

अतः उपकरणों का बहुलक जीवनकाल 65.625 घण्टे होगा। **उत्तर**

प्रश्न 5. दिया हुआ बंटन विश्व के कुछ श्रेष्ठतम बल्लेबाजों द्वारा एकदिवसीय अन्तर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैचों में बनाए गए रनों को दर्शाता है—

बनाए गए रन	बल्लेबाजों की संख्या
3000-4000	4
4000-5000	18
5000-6000	9
6000-7000	7
7000-8000	6
8000-9000	3
9000-10000	1
10000-11000	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल:

बनाए गए रन	बल्लेबाजों की संख्या
3000-4000	4(f_1)
4000-5000	18(f)
5000-6000	9(f_2)
6000-7000	7
7000-8000	6
8000-9000	3
9000-10000	1
10000-11000	1

सबसे अधिक बारम्बारता $f = 18,\ f_1 = 4$ तथा $f_2 = 9$

∴ अधिकतम बारम्बारता वाला वर्ग = 4000 – 5000

∴ $l_1 = 4000$ तथा $l_2 = 5000$

अतः $h = l_2 - l_1 = 5000 - 4000 = 1000$

$$\text{बहुलक} = l_1 + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times h$$

$$= 4000 + \left(\frac{18 - 4}{2 \times 18 - 4 - 9}\right) \times 1000$$

$$= 4000 + \frac{14 \times 1000}{36 - 13} = 4000 + \frac{14000}{23}$$

$$= 4000 + 608.7 = 4608.7$$

अतः बहुलक = 4608.7 रन। **उत्तर**

प्रश्न 6. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन एक समाज में प्रतिदिन 30 घरों में दूध का व्यय दर्शाता है—

प्रतिदिन दूध पर व्यय	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150
घरों की संख्या	5	6	9	6	4

उपर्युक्त आँकड़ों से बहुलक ज्ञात कीजिए। **[UP 2019 BB]**

हल: दी गई सारणी में अधिकतम बारम्बारता वाला पद 9 है जिसका वर्ग अन्तराल 60 – 90 है, तब

बहुलक वर्ग = 60 – 90 ∴ वर्ग माप $h = 30$

बहुलक वर्ग की बारम्बारता $f_1 = 9,\ f_0 = 6$ और $f_2 = 6$

$$\text{अतः} \quad \text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 60 + \left(\frac{9 - 6}{18 - 6 - 6}\right) \times 30 = 60 + \frac{90}{6}$$

$$= 60 + 15 = 75$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. एक विद्यार्थी ने एक सड़क के किसी स्थान से होकर जाती हुई कारों की संख्याएँ नोट की और उन्हें नीचे दी हुई सारणी के रूप में व्यक्त किया। सारणी में दिया प्रत्येक प्रेक्षण 3 मिनट के अन्तराल में उस स्थान से होकर जाने वाली कारों की संख्याओं से सम्बन्धित है। ऐसे 100 अन्तरालों पर प्रेक्षण लिए गए। इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

कारों की संख्या	बारम्बारता
0-10	7
10-20	14
20-30	13
30-40	12
40-50	20
50-60	11
60-70	15
70-80	8

हल:

कारों की संख्या	बारम्बारता
0-10	7
10-20	14
20-30	13
30-40	$12(f_1)$
40-50	$20(f)$
50-60	$11(f_2)$
60-70	15
70-80	8

सबसे अधिक बारम्बारता $f = 20, f_1 = 12$ तथा $f_2 = 11$

अधिकतम बारम्बारता वाला वर्ग $= 40 - 50$

$\therefore \quad l_1 = 40$ तथा $l_2 = 50$

अतः $\quad h = l_2 - l_1 = 50 - 40 = 10$

$$\text{बहुलक} = l_1 + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{20 - 12}{2 \times 20 - 12 - 11}\right) \times 10 = 40 + \frac{8 \times 10}{40 - 23}$$

$$= 40 + \frac{80}{17} = 40 + 4.7 = 44.7$$

अतः आँकड़ों का बहुलक $= 44.7$ **उत्तर**

प्रश्न 8. यदि नीचे हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए— **[UP 2019 AW, 22 RE]**

अथवा यदि दी गई बारम्बारता सारणी की माध्यिका 28.5 है, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए जबकि कुल बारम्बारता 60 है। **[UP 2021 HJ, 23 DV]**

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता
0-10	5
10-20	x
20-30	20
30-40	15
40-50	y
50-60	5
योग	60

हल: माध्यक के लिए सारणी

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता $(c.f.)$
0-10	5	5
10-20	x	$5 + x$
20-30	$20\ (f)$	$25 + x$
30-40	15	$40 + x$
40-50	y	$40 + x + y$
50-60	5	$45 + x + y$
योग	$n = 60$	

$\because \quad n = 60$ अर्थात् $\frac{n}{2} = 30$

अतः $\quad 45 + x + y = 60$

$\therefore \quad x + y = 60 - 45$

या $\quad x + y = 15 \quad$ .....(i)

माध्यक 28.5 है, जो वर्ग $20 - 30$ में स्थित है।

$\therefore \quad l = 20, f = 20, c.f. = 5 + x, h = 10$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - c.f.}{f}\right) \times h$$

या $28.5 = 20 + \frac{30 - (5 + x)}{20} \times 10$ या $8.5 = \frac{25 - x}{2}$

या $\quad 25 - x = 17$ या $-x = 17 - 25$

या $\quad -x = -8 \quad \therefore \quad x = 8$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$8 + y = 15$

$\therefore \quad y = 15 - 8 = 7$

अतः $\quad x = 8$ तथा $y = 7$ **उत्तर**

प्रश्न 9. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परन्तु 60 से कम हो।

आयु (वर्षों में)	पॉलिसी धारकों की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

हल: दी गयी सारणी में पॉलिसी धारकों की संख्या बढ़ते क्रम में है अर्थात् यह संचयी बारम्बारता के रूप में है, अब हम सर्वप्रथम इसे बारम्बारता बंटन सारणी में प्रस्तुत करेंगे।

बारम्बारता बंटन सारणी

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
15-20	2	2
20-25	4	6
25-30	18	24
30-35	21	45
35-40	33	78
40-45	11	89
45-50	3	92
50-55	6	98
55-60	2	100
योग	$n = 100$	

$\therefore \quad \frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

हम जानते हैं कि संचयी बारम्बारता के 50 वें पद का मान 78 के समीप है, जो 35 − 40 के वर्ग में है।

$\therefore \quad l = 35, \frac{n}{2} = 50, f = 33, c.f. = 45$

$h = l_2 - l_1 = 40 - 35 = 5$

माध्यक $= l + \left(\frac{n/2 - c.f.}{f}\right) \times h = 35 + \left(\frac{50 - 45}{33}\right) \times 5$

$= 35 + \frac{25}{33} = 35 + 0.76 = 35.76$

अत: **माध्यक आयु = 35.76 वर्ष।** उत्तर

प्रश्न 10. निम्नलिखित सारणी 400 नियॉन लैम्पों के जीवन-कालों को प्रदर्शित करती है—

जीवन-काल (घण्टों में)	लैम्पों की संख्या
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

एक लैम्प का माध्यक जीवन-काल ज्ञात कीजिए। [UP 2020 MV,MZ]

बहुलक की भी गणना कीजिए।

हल: माध्यक जीवन-काल हेतु सारणी

जीवन-काल (घण्टों में)	लैम्पों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता
1500-2000	14	14
2000-2500	56	70
2500-3000	60	130 ($c.f.$)
3000-3500	86(f)	216
3500-4000	74	290
4000-4500	62	352
4500-5000	48	400
योग	$n = 400$	

$\because \frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 200$ वाँ पद, जो संचयी बारम्बारता के 216 के समीप है। अत: माध्यक वर्ग 3000 − 3500 होगा।

$\therefore \quad f = 86, \frac{n}{2} = 200, \; c.f. = 130, l = 3000$

$h = l_2 - l_1 = 3500 - 3000 = 500$

अब माध्यक

$= l + \left(\frac{n/2 - c.f.}{f}\right) \times h = 3000 + \left(\frac{200 - 130}{86}\right) \times 500$

$= 3000 + \frac{70 \times 500}{86} = 3000 + \frac{35000}{86}$

$= 3000 + 406.98 = 3406.98$

अत: **लैम्प का माध्यक जीवन-काल = 3406.98 घण्टे।** उत्तर

बहुलक की गणना

संतत बंटन के लिए बहुलक $= l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

यहाँ l = बहुलक वर्ग (सर्वाधिक बारम्बारता वाला) की निम्न सीमा

$= 3000$ [∵ सर्वाधिक बारम्बारता वाला = 86]

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता = 86

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता = 60

f_2 = बहुलक वर्ग से ठीक अगले वर्ग की बारम्बारता = 74

h = बहुलक वर्ग का अन्तराल = 3500 − 3000 = 500

$\therefore$ बहुलक $= 3000 + \frac{86 - 60}{2 \times 86 - 60 - 74} \times 500$

$= 3000 + \frac{26}{38} \times 500$

$= 3000 + 342.10 = $ **3342.10** उत्तर