Chapter – 11

समरूपता

दो बहुभुज समरूप होंगे यदि संगत कोण बराबर हो तथा संगत भुजाएं समानुपाती हो, किसी एक प्रतिबंध का संतुष्ट होना ही पर्याप्त नहीं है वरन् दोनों का संतुष्ट होना आवश्यक है।

सभी वृत समरूप होते हैं।

सभी वर्ग समरूप होते हैं।

सभी समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं।

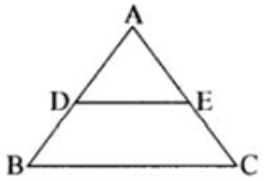
दो समानकोणिक त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं। (AAA)

यदि किन्हीं दो त्रिभुजों के दो कोण समान हैं तो भी त्रिभुज समरूप होते हैं क्योंकि यदि दो कोण बराबर होंगे तो त्रिभुज कोण योग गुणधर्म से तीसरा कोण भी बराबर होगा। (AA)

यदि दो त्रिभुज में संगत भुजाओं का अनुपात बराबर है तो त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं। (SSS)

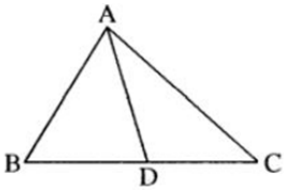
यदि दो त्रिभुजों में कोई दो संगत भुजाएं परस्पर समानुपाती हो तथा उनके मध्य बना कोण बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (SAS)

Q. 1. आकृति में $DE \parallel BC$ हो, $AD = 4$ सेमी., $DB = 6$ सेमी. एवं $AE = 5$ सेमी. हो तो EC का मान होगा :



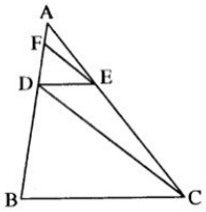
(a) 6.5 सेमी. (b) 7.0 सेमी. (c) 7.5 सेमी. (d) 8.0 सेमी

Q. 2. आकृति में AD, कोण A का समद्विभाजक है, AB = 6 सेमी., BD = 8 सेमी., DC = 6 सेमी. हो तो AC का मान होगा :



(a) 5.5 सेमी. (b) 7.0 सेमी. (c) 6.5 सेमी. (d) 4.5 सेमी.

Q. 3. आकृति में $DE \parallel BC$ और $CD \parallel EF$ हो तो सिद्ध करो कि $AD^2 = AB \times AF$



उत्तर : ΔABC में दिया है कि $DE \parallel BC$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

ΔADC में दिया है कि $CD \parallel EF$

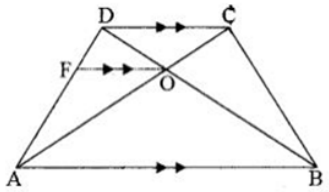
$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AE} \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) व (ii) से $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AF}$

या $AD^2 = AB \times AF$ (इति सिद्धम)

Q. 4. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

उत्तर : दिया गया है ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण O पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध करना है $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$



रचना : O से OF इस प्रकार खींची कि $FO \parallel DC \parallel AB$

उपपत्ति– ΔDAB में

$FO \parallel AB$ (रचना से)

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से

$$\frac{DF}{FA} = \frac{DO}{OB} = \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

पुनः ΔDCB में

$FO \parallel DC$ (रचना से)

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से

$$\frac{DF}{FA} = \frac{CO}{OA} \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

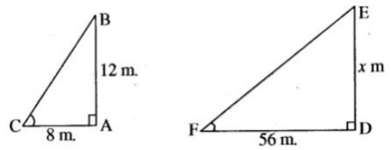
(i) व (ii) से

$$\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}$$

या $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 5. 12 मीटर लंबाई वाले उर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 8 मीटर है उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 56 मीटर हो तो मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए–

उत्तर :–



चित्रानुसार माना AB एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ है तथा AC उसकी परछाईं है। पुनः दूसरे चित्रानुसार DE एक मीनार है और DF उसकी परछाईं है।

प्रश्नानुसार $AB = 12\ m,\ AC = 8\ m$ तथा $DF = 56\ m$

माना $DE = xm$

अब ΔABC और ΔDEF में

$\angle A = \angle D = 90^0$

तथा $\angle C = \angle F$ (उन्नयन कोण सूर्य का)

अतः समरूपता की AA कसौटी से–

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

या $$\frac{12}{x} = \frac{8}{56}$$

या $$8x = 12 \times 56$$

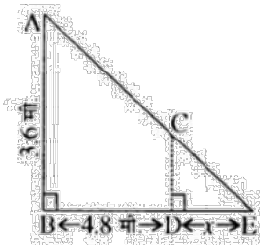
या $$x = \frac{12 \times 56}{8}$$

या $$x = 84\,m$$

अतः मीनार की ऊँचाई 84 m है।

प्रश्न 6. 90 सेमी. की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्भे के आधार से परे 1.2 मीटर/सेकण्ड की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊँचाई पर हो तो 4 सेकण्ड के बाद उस लड़की की छाया कितने मीटर होगी?

उत्तर :– माना AB एक बल्ब लगा खम्भा है तथा एक लड़की है जो 1.2 मी./से. की चाल से चल रही है तथा 4 सेकण्ड के पश्चात उसकी स्थिति CD पर है तथा DE उसकी छाया है।



माना

$DE = xm$

$BD = 1.2$ मीटर $\times$ 4 = 4.8 मीटर

अब ΔABE तथा ΔCDE में

$\angle B = \angle D = 90^0$ (क्योंकि खम्भा व लड़की दोनों जमीन पर ऊर्ध्वाधर हैं ।)

$\angle E = \angle E$ (उभयनिष्ठ कोण)

इसलिये AA समरूपता से

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$ $$\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

या $$\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$$

$(\because 90cm = 0.9\,m)$

या $$\frac{4.8 + x}{x} = \frac{4}{1}$$

या $$4.8 + x = 4x$$

या $$3x = 4.8$$

या $$x = 1.6$$

अतः 4 सेकण्ड के बाद लड़की की छाया 1.6 मीटर होगी।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्नः–

प्रश्न 1. ΔABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु D है। यदि AD का समद्विभाजन करती हुई एक रेखा B से इस प्रकार खींची जाए कि वह भुजा AD को E पर काटते हुए AC को X पर काटे तो सिद्ध कीजिए – $\frac{EX}{BE}=\frac{1}{3}$

प्रश्न 2. सिद्ध करो कि दो समानकोणिक त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं।

प्रश्न 3. सिद्ध करो कि यदि दो त्रिभुज में संगत भुजाओं का अनुपात बराबर है तो त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं।

प्रश्न 4. सिद्ध करो कि यदि दो त्रिभुजों में कोई दो संगत भुजाएं परस्पर समानुपाती हो तथा उनके मध्य बना कोण बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।