Model Paper - 4

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2022

गणित (Mathematics)

समय : 2 घण्टे 45 मिनट

पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश:

(1) परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यत: लिखें।

(2) **सभी** प्रश्न करने अनिवार्य हैं।

(3) प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।

(4) जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।

(5) प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि / अन्तर / विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को सही मानें।

साईन्स पब्लिकेशन्स द्वारा प्रकाशित नमूना प्रश्न-पत्र-4

खण्ड-अ

प्र. 1. बहुविकल्पी प्रश्न-

(i) यदि $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + 2$ है तो $f^{-1}(-6)$ का मान होगा 1

(A) 2 (B) –2 (c) 3 (D) 4

(ii) $\tan^{-1}\sqrt{3} - Sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है। 1

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

(iii) यदि आव्यूह $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ एक वर्ग आव्यूह है तो 1

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (c) $m = n$ (D) इनमे से कोई नहीं

(iv) यदि A कोई 2×2 कोटि की व्युत्क्रमणीय आव्यूह तो $\det(A^{-1})$ बराबर होगा - 1

(A) $\det(A)$ (B) $\frac{1}{\det(A)}$ (c) 1 (D) 0

(v) यदि $y = x^x$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा- 1

(A) xx^{x-1} (B) x^{x-1} (c) $x^x \log x$ (D) $x^x(1+\log x)$

(vi) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ का मान है। 1

(A) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + c$ (B) $\cos\sqrt{x} + c$

(c) $\cos x + c$ (D) $2\sin\sqrt{x} + c$

(vii) अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है। 1

(A) 2 (B) 1 (c) 0 (D) परिभाषित नहीं

(viii) यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान है। 1

(A) 0 (B) 8 (c) 6 (D) $\sqrt{6}$

(ix) यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ तब P (A किन्तु B नहीं) का मान है। 1

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (c) 0 (D) $\frac{1}{4}$

(x) यदि $A = [1, 2, 3]$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ तो $(AB)^T$ होगा- 1

(A) $[14]$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (D) कोई नहीं

(xi) यदि $y = x^2 + 3x + 2$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा- 1

(A) 2x + 3 (B) 2 (C) x + 3 (D) 3

(xii) यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\vec{a}$ की दिशा है। 1

(A) $\frac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ (C) $\frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ (D) $\vec{0}$

प्र. 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(i) यदि '*' एक द्विचर संक्रिया है तथा यह क्रमविनमेयी है तब $a * b =$ ..... होगा। 1

(ii) $\tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4})$ का मुख्य मान ..... है। 1

(iii) यदि $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तो x ..... होगा। 1

(iv) $\frac{d}{dx}(5^{3x}) =$ ..... है। 1

(v) $\int a^{2x+3} dx =$ ..... है। 1

(vi) यदि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तो $|\vec{a}| =$ .....होगा। 1

प्र. 3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

(i) सिद्ध कीजिए फलन $f: R \to R$, $f(x) = 2x - 3$ एकैकी है। 1

(ii) $3\tan^{-1} x + 4\cot^{-1} = \pi$ तो x का मान ज्ञात कीजिए। 1

(iii) यदि $\begin{bmatrix} x+y & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x-y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिए। 1

(iv) सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(v) यदि $y = \cos^{-1} x + \sin^{-1} x$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(vi) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(vii) अवकल समीकरण $\frac{ydx - xdy}{y} = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 1

(viii) दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख है। 1

(ix) यदि दो पासों को एक साथ फेंका जाये तो अंको का योग 3 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 1

(x) सारणिक $\begin{vmatrix} 67 & 68 & 69 \\ 70 & 71 & 72 \\ 73 & 74 & 75 \end{vmatrix}$ का मान बिना प्रसार के ज्ञात कीजिए। 1

(xi) हल $y = \tan^{-1}\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)$ के लिए अवकल समीकरण का निर्माण कीजिए जबकि a स्वेच्छ अचर है। 1

(xii) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाऐं $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ से निरूपित होती है। 1

खण्ड-ब

प्र. 4. किसी समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R यदि सममित सम्बन्ध है तो सिद्ध करो कि $R = R^{-1}$ 2

प्र. 5. यदि आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & -1 & x \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है तो x का मान ज्ञात कीजिए। 2

प्र. 6. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए। $A^2 - 5A + 7I = 0$ तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए। 2

प्र. 7. फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ का $x = 0$ पर सांतत्य परीक्षण कीजिए। 2

प्र. 8. $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)} dx$ का माना ज्ञात कीजिए। 2

प्र. 9. एक पासे तथा एक सिक्के को उछाला जाता है यदि पासे पर समअंक आना घटना A तथा सिक्के पर H आना घटना B है क्या घटनाऐं A तथा B परस्पर स्वतंत्र है अपने उत्तर का कारण भी लिखिए। 2

प्र. 10. यदि आव्यूह A एक 2×3 क्रम की आव्यूह है तथा $A = [a_{ij}]_{2\times3}$ तथा $a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}$ तब आव्यूह A ज्ञात कीजिए। 2

प्र. 11. यदि $y = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ तो $\frac{dx}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 2

प्र. 12. सारणिक के गुणधर्मो का प्रयोग करके सिद्ध करो

कि $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(x-4)^2$ 2

प्र. 13. सिद्ध कीजिए $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}} dx = \pi$ 2

प्र. 14. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$, का $y=0$ यदि $x = \frac{\pi}{3}$ प्रतिबन्धों को संतुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। 2

प्र. 15. यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ तो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लम्बवत् 5 परिमाण का सदिश ज्ञात कीजिए। 2

प्र. 16. A के द्वारा किसी प्रश्न को हल करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ तथा B के द्वारा उसी प्रश्न को हल करने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है दोनों उस प्रश्न को हल करते है तो प्रश्न हल हो जाये की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड-स

प्र. 17. समीकरण $\cos^{-1} x + \cos^{-1} 2x = \frac{2\pi}{3}$ को हल कीजिए। 3

अथवा

यदि $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$ तो सिद्ध कीजिए। कि $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

प्र. 18. यदि $y = \log\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$ तो सिद्ध कीजिए कि $(a^2 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$ 3

अथवा

यदि $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्र. 19. $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

$\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 20. सिद्ध कीजिए $[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}]=2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ 3

अथवा

यदि $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\hat{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$, $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ तो एक सदिश $\vec{d}$ इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $\vec{d}$ सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लम्ब हो तथा $\vec{c}.\vec{d}=18$

खण्ड-द

प्र. 21. $\int\frac{e^x(1+x)}{(2+x)^2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

$\int x.\tan^{-1}x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 22. अवकल समीकरण $(1+x^2)dy+2xydx=\cot x.dx$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जबकि $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 4

अथवा

अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}= y - x\tan(y/x)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

प्र. 23. I, II, व III तीन डिब्बे है प्रत्येक दो सिक्के रखे है। I डिब्बे में दोनों सिक्के सोने के है II डिब्बे में दोनों सिक्के चाँदी के है तथा III डिब्बे में एक सोने का तथा एक चाँदी का सिक्का है। यादृच्छया एक डिब्बा चुना जाता है और उसमें से एक सिक्का निकाला जाता है जो कि चाँदी का है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि उस डिब्बे में दूसरा सिक्का भी चाँदी का हो। 4

अथवा

दो पासों को एक साथ एक बार उछला जाता है x पासों पर 6 अंक प्राप्त होने की संख्याओं को व्यक्त करता हो तो x के लिए प्रायिकता बंटन, माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।

————————