उच्च गणित 2018

समय : 3 घण्टे] कक्षा : 12वीं [पूर्णांक : 100

निर्देश : (1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(2) प्रश्न पत्र में दिए गये निर्देश सावधानी पूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(3) प्रश्न पत्र में दो खण्ड दिये गये हैं - खण्ड "अ" और खण्ड "ब"।

(4) खण्ड "अ" में दिये गये प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं, प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

(5) खण्ड "ब" में प्रश्न क्रमांक 6 से 26 तक आंतरिक विकल्प दिये गये हैं।

(6) प्रश्न क्रमांक 6 से 10 तक प्रत्येक 2 अंक का है।

(7) प्रश्न क्रमांक 11 से 14 तक प्रत्येक 3 अंक का है।

(8) प्रश्न क्रमांक 15 से 21 तक प्रत्येक 4 अंक का है।

(9) प्रश्न क्रमांक 22 से 26 तक प्रत्येक 5 अंक का है।

खण्ड- "अ"

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए : $5 \times 1 = 5$

(i) यदि $\dfrac{1}{(1+\sin x)(2+\sin x)} = \dfrac{a}{(1+\sin x)} + \dfrac{b}{(2+\sin x)}$ तो $a+b=$

(अ) 0 (ब) 1

(स) 2 (द) 3

(ii) $\sin^{-1} X$ का प्रान्त है-

(अ) $(-\pi, \pi)$ (ब) $[-1, 1]$

(स) $(0, 2\pi)$ (द) $(-\infty, \infty)$

(iii) बिन्दु (3, 4, 5) की XZ-समतल से दूरी है-

(अ) 4 (ब) 3

(स) 5 (द) 0

(iv) रेखाएं $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ एवं $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{10} = \dfrac{z}{15}$ परस्पर हैं-

(अ) लम्बवत (ब) संपाती

(स) प्रतिच्छेदी (द) समान्तर

(v) बिन्दु (a, b, c) की X-अक्ष से न्यूनतम दूरी है-

(अ) $\sqrt{b^2+c^2}$ (ब) $\sqrt{a^2+b^2}$

(स) $\sqrt{c^2+a^2}$ (द) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

प्रश्न 2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य लिखिए : $5 \times 1 = 5$

(i) Y-अक्ष के समान्तर समतल समीकरण $ax + by + d = 0$ है।

(ii) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ का मान शून्य होता है।

(iii) $\int \frac{dx}{\sin x}$ का मान $\log \tan \frac{x}{2} + c$ है।

(iv) किसी भी कण का अधिकतम ऊँचाई पर वेग सदैव शून्य होता है।

(v) कार्य एक सदिश राशि है।

प्रश्न 3. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए : $5 \times 1 = 5$

(1) सिम्पसन का नियम .... सिद्धान्त पर आधारित है।

(2) यदि $y = a^x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ = ... है।

(3) $x^{-5/7}$ का अवकल गुणांक .... है।

(4) सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का .... माध्य होता है।

(5) सदिश $3i - 2j + 6k$ की दिक्कोज्याएँ .... हैं।

प्रश्न 4. प्रत्येक का एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए : $5 \times 1 = 5$

(i) $\int_a^b f(x)dx$ के लिये सिम्पसन का एक तिहाई नियम लिखो।

(ii) समीकरण $x^3 - x - 2 = 0$ का मूल किस अंतराल में है?

(iii) आंकिक विधि में समलम्ब चतुर्भुज नियम का सूत्र लिखिए।

(iv) पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है।

(v) न्यूटन-रेफसन का सूत्र लिखो।

प्रश्न 5. सही जोड़ी बनाइए : $5 \times 1 = 5$

'अ'	'ब'
(a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$	(i) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right]$
(b) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$	(ii) $\log\left[x + \sqrt{x^2 + a^2}\right]$
(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$	(iii) $\frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a}$
(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$	(iv) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right]$
(e) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$	(v) $\log\left[x + \sqrt{x^2 - a^2}\right]$
	(vi) $\frac{1}{2a} \log \frac{a + x}{a - x}$

खण्ड - "ब"

प्रश्न 6. यदि $\vec{r} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, तो $\vec{r}$ की दिशा में एकांक सदिश ज्ञात कीजिए। 2

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}, -2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ और $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ समतलीय है।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि क्रम से ली गई त्रिभुज की तीन भुजाओं से निरूपित सदिशों का योग शून्य सदिश होता है। 2

(अथवा) यदि $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}, \vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, तो सदिश $3\vec{a} - 2\vec{b}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 8. उस गोले का सदिश समीकरण एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (-1, 0, 1) एवं त्रिज्या 2 हो। 2

(अथवा) सिद्ध करो कि सदिश $2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ और $-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ परस्पर लम्ब है।

प्रश्न 9. $\int \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ का मान ज्ञात करो। 2

(अथवा) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10. $\int x . \log x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(अथवा) $\int \frac{e^{\cos^{-1} x}}{\sqrt{1 - x^2}}$ समाकलन x के सापेक्ष कीजिए।

प्रश्न 11. रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ तथा समतल $3x + y + z = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 3

(अथवा) बिन्दुओं A(2, -3, 4) व B(-5, 6, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को व्यास मानकर बनाये गये गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12. उस त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(X_1, Y_1, Z_1), B(X_2, Y_2, Z_2)$ तथा $C(X_3, Y_3, Z_3)$ हैं। 3

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर समतलों $2x - 2y + z + 3 = 0$ तथा $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ के बीच की दूरी 1/6 है।

प्रश्न 13. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए। $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$ 3

(अथवा) दो सदिशों $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14. यदि किसी त्रिभुज ABC का केन्द्रक G हो तो सिद्ध कीजिए कि 3

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

(अथवा) यदि $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

तो $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 15. $\dfrac{x^2+7x}{x^2+2x-8}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए। 4

(अथवा) $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि : 4

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$$

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि : http://www.mpboardonline.com

$$\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}\sqrt{x}$$

प्रश्न 17. प्रथम सिद्धान्त से sin X का अवकलज ज्ञात कीजिए। 4

(अथवा) $\log\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

प्रश्न 18. यदि $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $x^2y_2+xy_1+y=0$ । 4

(अथवा) यदि $x^y=e^{y-x}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-\log x}{(1-\log x)^2}$ ।

प्रश्न 19. फलन $f(x)=x^2-1$ के लिये अन्तराल [-1, 1] में रोले प्रमेय की जाँच कीजिए। 4

(अथवा) एक कण $S=5e^{-t}\cos t$ नियम से गतिमान है, जब $t=\pi/2$ हो तो इसका (a) वेग व (b) त्वरण क्या होगा?

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए : सहसम्बन्ध गुणांक ρ का मान -1 से +1 के बीच होता है। 4

(अथवा) निम्नांकित आँकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

x	2	3	5	7	3
y	15	17	4	5	4

प्रश्न 21. निम्नांकित [illegible] ग्वालियर में 70 रुपये मूल्य के संगत भोपाल में सर्वाधिक उ[illegible] 4

	ग्वालियर	भोपाल
औसत मूल्य	65	67
मानक विचलन	2.5	3.5

दो नगरों में वस्तु के मूल्यों में सहसम्बन्ध गुणांक 0.8 है।

(अथवा) दो समाश्रयण रेखायें $x + 2y = 5$ तथा $2x + 3y = 8$ हैं तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\bar{x}$ व $\bar{y}$ (ii) b_{yx} व b_{xy}

(iii) ρ_{xy}

प्रश्न 22. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (1, 0, 0), (0, 1, 0) तथा (0, 0, 1) से गुजरता हो तथा इसका केन्द्र $3x - y + z = 2$ पर हो। 5

(अथवा) उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ निम्नांकित समीकरण द्वारा निर्धारित हैं : $2l + 2n - m = 0$ तथा $ml + mn + nl = 0$।

प्रश्न 23. $\lim_{X \to \pi/4} \dfrac{\sin X - \cos X}{X - \frac{\pi}{4}}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि फलन असंतत है :

$$g(x) = \begin{cases} 3x, & x < 3 \\ 3, & x = 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

प्रश्न 24. मान ज्ञात कीजिए : $\int \dfrac{dx}{5 + 4\cos x}$ 5

(अथवा) $\int_0^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 25. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$ को हल कीजिए। 5

(अथवा) हल कीजिए $(1 + X^2)\dfrac{dY}{dX} + 2XY - 4X^2 = 0$ ।

प्रश्न 26. यदि एक लीप वर्ष का यादृच्छिक चयन किया गया हो तो इस वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

(अथवा) एक साक्षात्कार में एक पद हेतु पति एवं पत्नी शामिल हुए। पति के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है, जबकि पत्नी के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। इनमें से किसी के भी न चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

❑ ❑ ❑

<u>I-236</u> **Higher Mathematics 2018**

Time : 3 Hours] **Class : 12th** **[M. M. : 100**

Instructions :

(1) All questions are compulsory.

(2) Read instructions carefully of the question paper and then write answers of the questions.

(3) Question paper has two Sections - SECTION - "A" and SECTION - "B"

(4) In the Section "A" Question Nos. 1 to 5 are Objective type. Each question carries 5 marks.

(5) In the Section "B" Question Nos. 6 to 26 have internal option.

(6) Question Nos. 6 to 10 carry 2 Marks Each.

(7) Question Nos. 11 to 14 carry 3 Marks Each.

(8) Question Nos. 15 to 21 carry 4 Marks Each.

(9) Question Nos. 22 to 26 carry 5 Marks Each.

SECTION-"A"

Q.1 Choose the correct options : $5 \times 1 = 5$

(i) If $\frac{1}{(1+\sin x)(2+\sin x)} = \frac{a}{(1+\sin x)} + \frac{b}{(2+\sin x)}$ then $a + b =$

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3

(ii) The domain of $\sin^{-1} X$ is :

(A) $(-\pi, \pi)$ (B) $[-1, 1]$

(C) (0.2π) (D) $(-\infty, \infty)$

(iii) The distance of point (3, 4, 5) from XZ-plane is

(A) 4 (B) 3

(C) 5 (D) 0

(iv) Two lines $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and $\frac{x}{5} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$ are mutually

(A) Perpendicular (B) Coincident

(C) Intersect (D) Parallel

(v) The shortest distance of point (a, b, c) from X-axis is :

(A) $\sqrt{b^2 + c^2}$ (B) $\sqrt{a^2 + b^2}$

(C) $\sqrt{c^2 + a^2}$ (D) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Q2 Write true/false in the following statements : $5 \times 1 = 5$

(i) Equation of plane parallel to Y-axis is $ax + by + d = 0$.

(ii) The value of $\vec{a} . (\vec{a} \times \vec{b})$ is zero.

(iii) The value of $\int \frac{dx}{\sin x}$ is $\log \tan \frac{x}{2} + c$.

(iv) The velocity of the particle at the maximum height is always zero.

(v) Work is a vector quantity.

Q.3 Fill in the blanks : $5 \times 1 = 5$

(1) Simpson's Rule is based upon the Principle ______

(2) If $y = a^x$ then $\frac{dy}{dx}$ is ______

(3) Differential coefficient of $x^{-5/7}$ is ______

(4) The coefficient of correlation is the ______ mean of the regression coefficient.

(5) The direction cosine of the vector $3i - 2j + 6k$ are ______

Q.4 Give answers in one word/sentence : $5 \times 1 = 5$

(i) Write the Simpson's One-third Rule formula for $\int_a^b f(x)dx$.

(ii) In which interval does the root of equation $x^3 - x - 2 = 0$ lie?

(iii) Write the formula of Trapezoidal rule in numerical method.

(iv) Perfect Negative Correlation is

(v) Write Newton-Raphson's formula

Q.5 Match the column : http://www.mpboardonline.com $5 \times 1 = 5$

('A')	('B')
(a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$	(i) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right]$
(b) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$	(ii) $\log\left[x + \sqrt{x^2 + a^2}\right]$
(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$	(iii) $\frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a}$
(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$	(iv) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right]$
(e) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$	(v) $\log\left[x + \sqrt{x^2 - a^2}\right]$
	(vi) $\frac{1}{2a} \log \frac{a + x}{a - x}$

SECTION - "B"

Q.6 If $\vec{r} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ then find the unit vector in the direction of $\vec{r}$

(Or) Show that $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}, -2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$ and $\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$ are coplanar.

Q.7 Prove that the sum of three vectors represented by the consecutive sides of triangle is zero vector. 2

(Or) If $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}, \vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$, then find the magnitude of vector $3\vec{a}-2\vec{b}$.

Q.8 Find the Vector Equation and Cartesian Equation of the sphere whose centre is (-1, 0, 1) and radius is 2. 2

(Or) Prove that vectors $2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ and $-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ are mutually perpendicular.

Q.9 Evaluate : $\int\sqrt{1+\cos x}\,dx$. 2

(Or) Evaluate : $\int\frac{dx}{x^2-6x+13}$.

Q.10 Evaluate : $\int x.\log x\,dx$. 2

(Or) Integrate with respect to x : $\int\frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

Q.11 Find the angle between the line $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{6}$ and the plane $3x+y+z=7$. 3

(Or) Obtain the equation of the sphere described on the joining of the point A(2, -3, 4) and B(-5, 6, 7) as a diameter.

Q.12 Find the centroid of the triangle whose vertices are $A(X_1, Y_1, Z_1)$, $B(X_2, Y_2, Z_2)$ and $C(X_3, Y_3, Z_3)$. 3

(Or) Prove that the distance between two parallel planes $2x - 2y + z + 3 = 0$ and $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ is $^1/_6$.

Q.13 Prove by vector method that $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$. 3

(Or) Find the angle between the vectors $3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ and $2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$.

Q.14 If G is the centroid of any triangle then show that (prove that) 3

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$.

(Or) If $\vec{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ then find $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Q.15 Resolve $\frac{x^2+7x}{x^2+2x-8}$ into Partial fractions. 4

(Or) Resolve $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ into Partial fractions.

Q.16 Prove that : 4

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$$

(Or) Prove that

$$\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}\sqrt{x}$$

Q.17 Differentiate sinX by First Principle. 4

(Or) Differentiate $\log\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ with respect to x.

Q.18 If $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ then prove that $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$. 4

(Or) If $x^y = e^{y-x}$, prove that $\frac{dy}{dx}=\frac{2-\log x}{(1-\log x)^2}$.

Q.19 Verify Rolle's theorem for function $f(x) = x^2 - 1$ in the interval [-1, 1]. 4

(Or) A particle moves according to the law $S = 5e^{-t}\cos t$, find its (a) velocity and (b) acceleration when $t = \pi/2$.

Q.20 Prove that : Value of correlation coefficient ρ lies between -1 to +1. 5

(Or) Find the coefficient of correlation from the following data :

x	2	3	5	7	3
y	15	17	4	5	4

Q.21 An article costs Rs.70 at Gwalior, find the corresponding most appropriate value at Bhopal using the following data : 5

	Gwalior	Bhopal
Mean Value	65	67
Standard Deviation	2.5	3.5

The correlation coefficient between the values of the two cities is 0.8

(Or) Two lines of regression are $x + 2y = 5$ and $2x + 3y = 8$, find :

(i) $\bar{x}$ and $\bar{y}$ (b) b_{yx} and b_{xy}

(c) ρ_{xy}

Q.22 Find the equation of the sphere passing through the points (1, 0, 0) (0, 1, 0) and (0, 0, 1) and whose centre lies on the plane $3x - y + z = 2$. 5

(Or) Find the angle between the lines whose direction cosine are given by the relation $2l + 2n - m = 0$ and $ml + mn + nl = 0$.

Q.23 Evaluate : $\lim_{X \to \pi/4} \dfrac{\sin X - \cos X}{X - \frac{\pi}{4}}$. 5

(Or) Prove that the function is discontinuous :

$$g(x) = \begin{cases} 3x, & x < 3 \\ 3, & x = 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

Q.24 Evaluate : $\int \dfrac{dx}{5+4\cos x}$. 5

(Or) Find the value of $\int_0^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Q.25 Solve the differential equation $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$. 5

(Or) Solve the $(1 + X^2)\dfrac{dY}{dX} + 2XY - 4X^2 = 0$.

Q.26 Find the probability that a leap year selected at random will contain 53 Sundays. 5

(Or) A husband and his wife attended an interview for a post. Probabilith of the husband being selected $\frac{1}{4}$. whereas that of the wife is $\frac{1}{6}$. Find the probability that none of them will be selected.

❑ ❑ ❑