अध्याय सात

त्रिभुजों की रचना (Construction of Triangles)

आपने पिछली कक्षा में सेट स्क्वायर एवं परकार की सहायता कई प्रकार की रेखागणितीय रचनाएँ बनाना सीखा है। जिनमें किसी रेखाखंड पर लंब खींचना, रेखाखंड का समद्विभाजक खींचना, अलग–अलग नाप के कोण बनाना, कोण का समद्विभाजक खींचना आदि शामिल था।

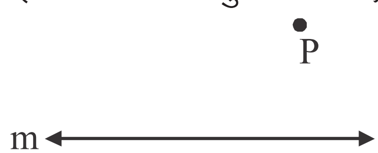
इस अध्याय में आप समान्तर रेखा खींचना एवं कुछ प्रकार के त्रिभुजों की रचना करना सीखेंगे।

एक दी हुई रेखा के समांतर उस बिंदु से होकर रेखा खींचना जो उस रेखा पर स्थित नहीं है

रचना–1 (Construction-1)

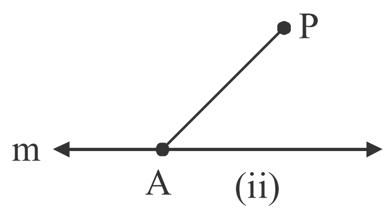
रचना के चरण –

1. एक रेखा m खींचिए और इसके बाहर बिन्दु P लीजिए।



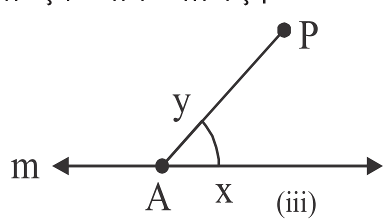
(i)

2. रेखा m पर एक बिन्दु A लीजिए और A और P को मिलाइए।



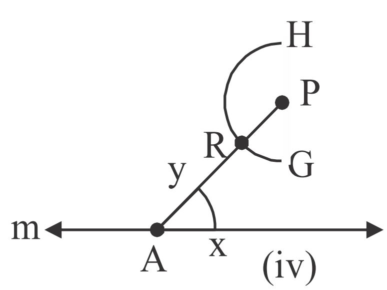
(ii)

3. बिंदु A को केन्द्र मान कर और कोई सुविधाजनक त्रिज्या लेकर m को X पर और AP को Y पर प्रतिच्छेद करता हुआ एक चाप खींचिए।



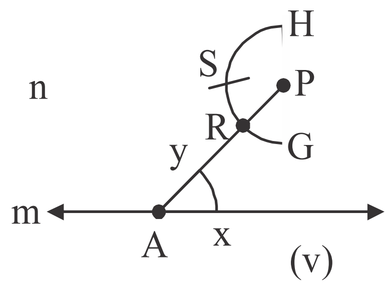
(iii)

4. अब, P को केंद्र मान कर और चरण 3 वाली ही त्रिज्या लेकर AP को R पर काटता हुआ एक चाप GH खींचिए।

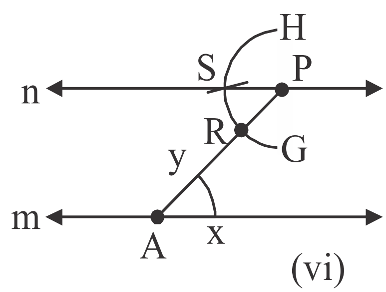


(iv)

5. परकार के नुकीले सिरे को X पर रखिए और इसे इस प्रकार फैलाइए कि पेंसिल की नोक Y पर रहे।
6. R को केंद्र मानकर और परकार का फैलाव चरण 5 वाला ही रखते हुए एक चाप खींचिए जो चाप GH को S पर काटे।



7. अब SP को मिलाकर रेखा n खींचिए, जो अभीष्ट समान्तर रेखा है।



चित्र 7.1

प्रश्नावली 7.1 (Exercise 7.1)

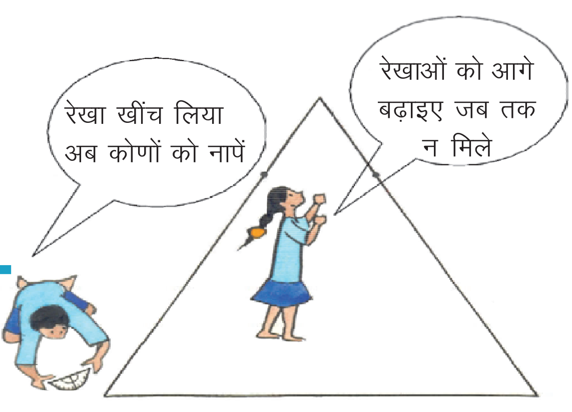
1. एक रेखा l खींचिए। इसके बाहर एक बिन्दु A लीजिए। बिन्दु A से जाने वाली तथा रेखा l के समांतर एक रेखा की रचना कीजिए।
2. एक रेखा m खींचिए। इस पर कोई बिन्दु P लीजिए। बिन्दु P पर रेखा का लंब खीचिए। इस लंब रेखा पर 3 सेमी. की दूरी पर बिन्दु Q लीजिए। Q से होकर रेखा m के समांतर एक रेखा n खीचिए।

त्रिभुजों की रचना (Construction of Triangles)

आप यह तो जान चुके हैं कि तीन भुजाओं से मिलकर बनी हुई बन्द आकृति को त्रिभुज कहते है तथा भुजाओं की कुछ लम्बाई तो होती ही है।

एक त्रिभुज की रचना जिसकी तीनों भुजाओं के माप दिए गए हों (Constructing a triangle with three given sides?)

अगर यह कहा जाए कि आप एक ऐसा त्रिभुज बनाइये जिसकी दो भुजाओं के माप क्रमशः 3 सेमी तथा 4 सेमी हैं तो आपको क्या कठिनाई आएगी? सोचिए।



चित्र – 7.2

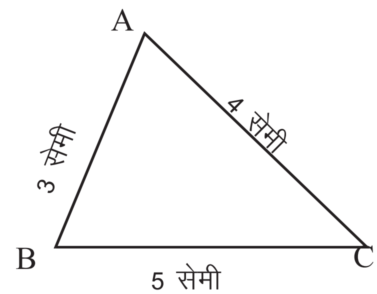
इन मापों से कितने त्रिभुज बन सकते हैं? यदि आपको कहें कि तीसरी भुजा की लम्बाई 5 सेमी होनी चाहिए, तो क्या अब आप इन मापों से त्रिभुज बना लेंगे?

चलिए, बनाकर देखते हैं :

त्रिभुज बनाने के चरण

एक त्रिभुज बिना नापे प्रश्न को ध्यान में रखकर बनाइये तथा तीनों शीर्ष के नाम लिख दीजिए। कौनसी भुजा किस लम्बाई की बनानी है उसके पास लिखिए।

अब नाप के अनुसार त्रिभुज बनाते हैं।

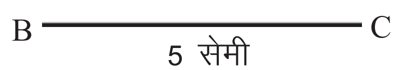


चित्र – 7.3

रचना–2

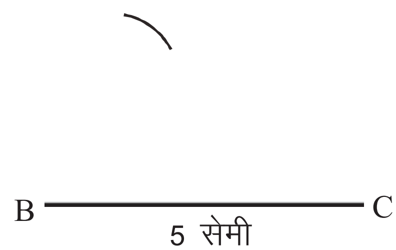
पहला चरण :

पटरी की मदद से 5 सेमी के माप का एक रेखाखण्ड BC खींचिए।



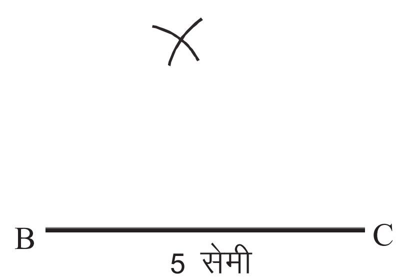
दूसरा चरण :

परकार को 3 सेमी फैलाकर B बिन्दु पर परकार की नोक रखिए तथा नापी गई त्रिज्या का एक चाप बनाइये।

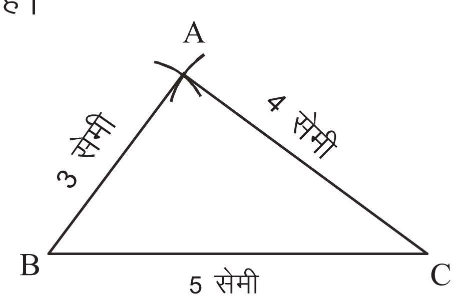


तीसरा चरण :

परकार को 4 सेमी फैलाकर इसकी नोक को C बिन्दु पर रखिए और इसी त्रिज्या का एक चाप दूसरे चरण में बनाए गए चाप पर काटिए। कटाव बिन्दु को A नाम दीजिए। AB तथा AC को मिलाइये।



त्रिभुज ABC तैयार है।



चित्र – 7.4

प्रश्नावली 7.2 (Exercise 7.2)

निम्न मापों के आधार पर त्रिभुज बनाइये –

(i) AB = 4 सेमी, BC = 7 सेमी, AC = 5 सेमी

(ii) AB = 5 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 5 सेमी

(iii) AB = 4 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 7 सेमी

तीनों त्रिभुजों में C पर बना कोण नाप कर लिखें। किस त्रिभुज में कोण C सबसे बड़ा है?

नीचे दिए गए नाप से त्रिभुज बनाने का प्रयास करें :–

(i) AB = 8 सेमी, BC = 8 सेमी, CA = 8 सेमी

(ii) AB = 4 सेमी, BC = 2 सेमी, CA = 2 सेमी

(iii) AB = 8 सेमी, BC = 3 सेमी, CA = 4 सेमी

(iv) AB = 5 सेमी, BC = 6 सेमी

क्या आपको ऊपर दिये गए मापों से त्रिभुज बनाने में कोई कठिनाई आई?

किस प्रकार की कठिनाई आई?

इस कठिनाई को दूर करने के लिए आप क्या कर सकते हैं?

आप (ii) और (iii) त्रिभुज के मापों को एक बार दुबारा देखिए। इन मापों से क्या आप त्रिभुज बना सकते हैं?

आप को याद होगा कि त्रिभुज का एक गुण है – **त्रिभुज की किन्हीं भी दो भुजाओं की मापों का योग तीसरी भुजा से अधिक होना चाहिए, तभी त्रिभुज बन सकता है।**

उपरोक्त प्रश्न (ii) में त्रिभुज के माप इस प्रकार हैं – 4 सेमी, 2 सेमी, 2 सेमी। इसमें यदि 2 सेमी और 2 सेमी का योग करें तो योगफल, तीसरी भुजा (जो कि 4 सेमी है) के बराबर होता है। इसी कारण यह त्रिभुज नहीं बन सकता है।

तीसरे त्रिभुज में CA का मान कितना हो तो त्रिभुज बनेगा?

चूंकि AB = 8 सेमी, BC = 3 सेमी, तो क्या CA का मान 5 सेमी से अधिक होना चाहिए? सोच कर देखें।

CA का मान कितने तक हो सकता है?

यदि CA = 11 सेमी हो तो क्या त्रिभुज बन पाएगा?

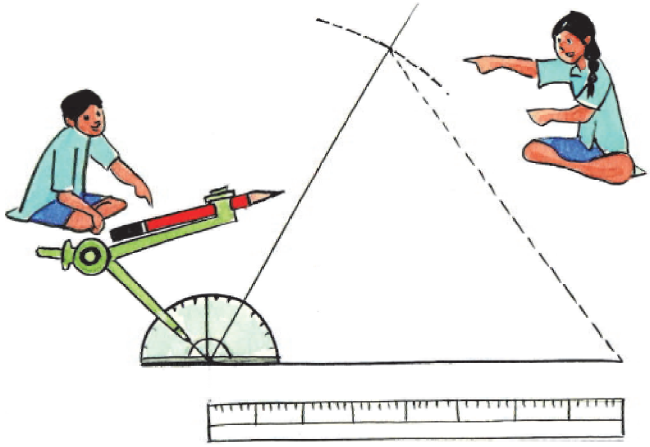
नहीं तो क्यों?

इसका अर्थ है यदि AB = 8 सेमी, BC = 3 सेमी हो तो त्रिभुज बनने के लिए CA > 5 सेमी और CA < 11सेमी होना चाहिए। ऐसे सवाल अपने मित्रों से भी पूछें। इसी प्रकार कुछ और जोड़े लेकर तीसरी भुजा के सम्भव मापों का पता करें।

(iv) में दिए गए माप की सहायता से आप किसी एक त्रिभुज को कैसे बनाएंगे? यहाँ तीसरी भुजा का तो माप ही नहीं है और जैसा कि आपने ऊपर देखा उसका माप 5 सेमी से अधिक तथा 11 सेमी से कम कुछ भी हो सकता है।

एक और परिस्थिति (One more situation)

हमने देखा कि जिन त्रिभुजों की दो भुजाओं के माप दिये गए थे, और तीसरा माप नहीं था हम त्रिभुज नहीं बना पा रहे थे। तीसरी भुजा की लम्बाई के स्थान पर यदि इन दोनों भुजाओं के बीच का कोण दिया होता, तो क्या आप त्रिभुज बना पाते? बना कर देखें।

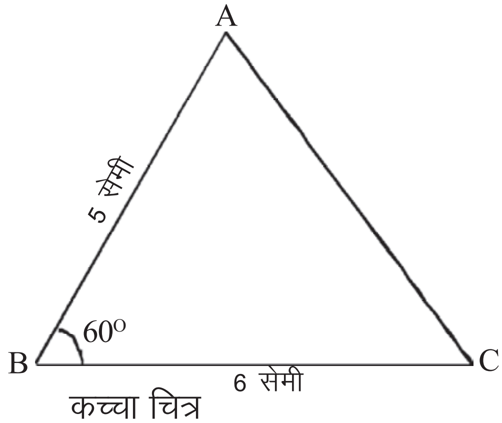


चित्र – 7.5

एक त्रिभुज की रचना जिसकी दो भुजाएं तथा बीच का कोण दिया हो : (Construction of a Triangle with two sides and the embedded angle)

(अ) मान लीजिए कि दो भुजाओं के माप 5 सेमी तथा 6 सेमी है और दोनों के बीच का कोण 60° है।

पृष्ठ के एक तरफ प्रश्न को ध्यान में रखकर, बिना नापे एक त्रिभुज बना लीजिए। इस पर भुजाएँ व कोण दी गई जानकारी के अनुसार अंकित कर लीजिए। इस प्रकार बने चित्र को कच्चा चित्र कहते हैं।

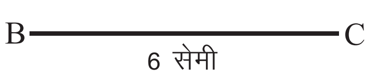


647RPG

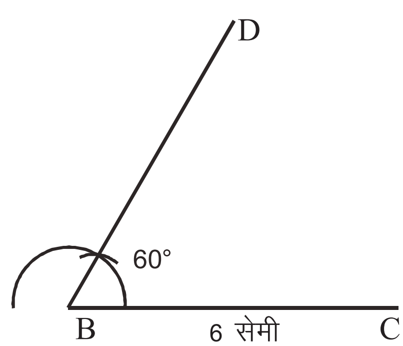
चित्र – 7.6

निम्नांकित चरण को ध्यान में रखते हुए नाप कर एक त्रिभुज बनाये।

रचना–3



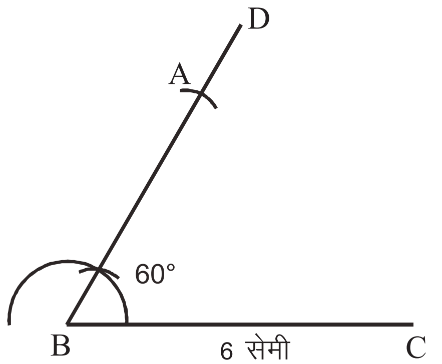
(i)



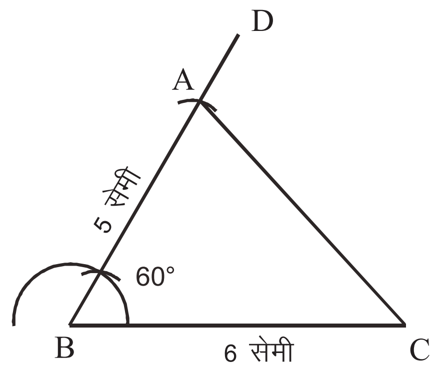
(ii)

चरण :

1. एक रेखा खंड BC = 6 सेमी खींचिए।
2. B पर परकार की सहायता से कोण $\angle DBC = 60^o$ बनाइये।
3. परकार को 5 सेमी फैलाकर बिन्दु B पर परकार की नोक रखिए और इसी त्रिज्या का चाप BD पर काटिए।
4. कटान बिन्दु A है। A को C से मिला लीजिए।



(iii)



(iv)

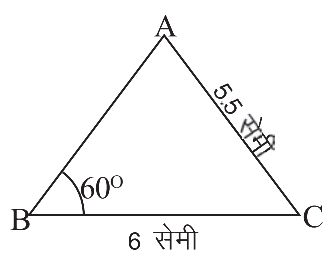
चित्र 7.7

इस प्रकार त्रिभुज ABC तैयार है। इस त्रिभुज में BC = 6 cm, AB = 5 cm और $\angle ABC = 60^o$

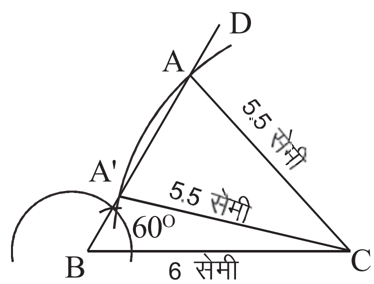
(ब) उपरोक्त चित्र में AC को नापने पर 5.5 सेमी, प्राप्त होता है तो क्या आप एक त्रिभुज ABC की रचना कर सकते हैं जिसमें भुजाएं AC = 5.5 सेमी, BC = 6 सेमी तथा $\angle B = 60^o$ हो।

रचना–4

कॉपी पर एक त्रिभुज ABC का एक कच्चा चित्र बना लीजिए। इस पर भुजाएँ एवं कोण दी गई जानकारी के अनुसार अंकित कर लीजिए।



चित्र – 7.8



चित्र – 7.9

चरण :

(1) एक रेखा खंड BC = 6 सेमी खींचिए।

(2) B पर परकार से $\angle DBC = 60^o$ कोण बनाइये।

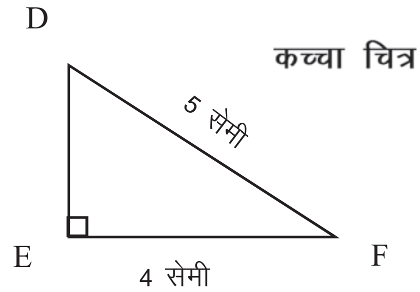
(3) परकार से 5.5 सेमी त्रिज्या का चाप लेकर C पर परकार की नोंक रखिए तथा BD पर चाप काटिए।

(4) आप देखते है कि 5.5 सेमी का चाप BD रेखा को दो बिन्दुओं A तथा A' पर काटता है। अतः दो त्रिभुज ABC व त्रिभुज A'BC प्राप्त होते हैं।

परंतु चाप AC यदि 6 सेमी से बड़ा हो तब भी क्या दो त्रिभुज बनेंगे।

क्रियाकलाप 1. (Activity 1)

इसी चित्र में आप 5.5 सेमी की जगह अन्य माप की त्रिज्या लेकर C बिन्दु पर परकार की नोक रखकर BD को काटिए और देखिए कि आपके द्वारा बनाया गया चाप BD को दो बिन्दुओं पर काटता है या नहीं? यही क्रियाकलाप बिन्दु B पर बने कोण के मान को कम करके भी कीजिए और निष्कर्ष लिखिए।



चित्र – 7.10

(स) त्रिभुज DEF की रचना कीजिए जिसमें EF = 4 सेमी, FD = 5 सेमी तथा ∠E = 90° हो।

रचना–5

पृष्ठ पर त्रिभुज DEF का कच्चा चित्र बना लीजिए। इस पर भुजाएँ एवं कोण दी गई जानकारी के अनुसार अंकित कर लीजिए।

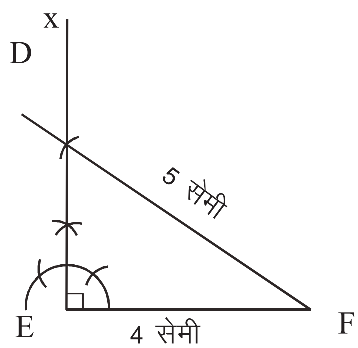
चरण :

(1) एक रेखा खंड EF = 4 सेमी खींचिए।

(2) E पर ∠XEF = 90° बनाइये।

(3) परकार में 5 सेमी त्रिज्या का चाप लेकर F पर परकार की नोक रखिए तथा EX पर चाप काटिए।

(4) यह बिन्दु D है। DF को मिला लीजिए।



चित्र – 7.11

क्रियाकलाप 2.

(1) अपनी कॉपी पर 6 सेमी की एक रेखा BC खींचिए।

(2) बिन्दु B पर ∠CBD = 90° का कोण बनाइए।

(3) 6 सेमी से ज्यादा माप की त्रिज्या लेकर C बिन्दु पर परकार की नोक रखकर DB पर चाप काटिए।

अलग–अलग माप की त्रिज्या का चाप काटकर यह पता लगाइए कि कोई माप ऐसा है जिससे DB दो बिन्दुओं पर कटता है?

क्रियाकलाप 3.

यही प्रक्रिया आप बिन्दु B पर 90° से अधिक माप का कोण बनाकर कीजिए तथा निष्कर्ष लिखिए।

ऊपर किए गए क्रियाकलापों की सहायता से आप इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि यदि दो भुजाएँ और उनके बीच के कोण के स्थान पर अन्य कोई कोण दिया हुआ हो तो त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है, जब उस भुजा (जिसके बराबर चाप काटना है) का मान दी गई भुजा जिस आधार पर कोण बना है, से अधिक हो।

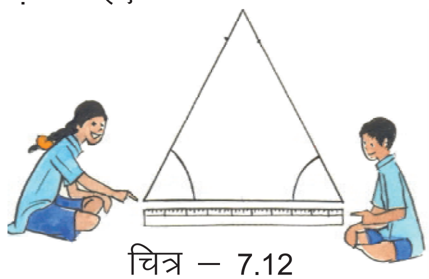
प्रश्नावली 7.3 (Exercie 7.3)

त्रिभुज की रचना कीजिए जिनके माप निम्न है :

(i) BC = 5 सेमी, $\angle B = 60^o$, AB = 3 सेमी

(ii) BC = 8 सेमी, $\angle B = 70^o$, AB = 4 सेमी

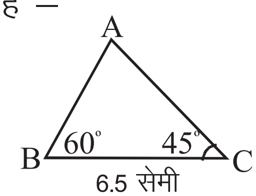
(iii) और भी ऐसे आंकड़े बनाइए और उनके आधार पर त्रिभुज का निर्माण करिए।



चित्र – 7.12

इन्हें भी बनाएं (Draw the following):

आप सोचिए कि यदि किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा का माप दिया हो तो क्या आप त्रिभुज बना पाएंगे? आइये बनाकर देखते हैं –



कच्चा चित्र

चित्र – 7.13

ऐसे त्रिभुज की रचना जिसकी एक भुजा और दो कोण दिये हों (Drawing a triangle with one side and two angles)

माना कि BC = 6.5 सेमी, $\angle B = 60^o$ और $\angle C = 45^o$ है।

रचना–6

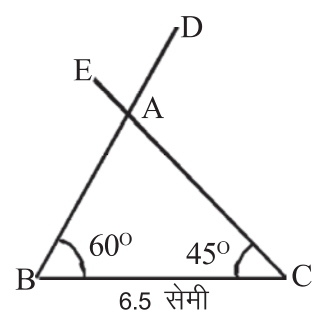
चरण :

(i) एक रेखा खंड BC = 6.5 सेमी खींचिए।

(ii) बिन्दु B पर BD इस प्रकार बनाते है कि $\angle CBD = 60^\circ$

(iii) बिन्दु C पर CE इस प्रकार बनाते हैं कि $\angle BCE = 45^\circ$ तथा CE, DB को A पर काटे।

(iv) त्रिभुज ABC तैयार है।



चित्र – 7.14

अब यह बताइये कि कोण $\angle CAB$ का माप कितना है?

कैसे पता किया?

क्या प्रत्येक त्रिभुज में हम दो कोणों का माप पता होने पर तीसरे कोण का माप पता कर सकते हैं? त्रिभुज के दो–दो कोणों के कुछ और जोड़े सोचिए और पता कीजिए कि तीसरे कोण का माप क्या होगा?

एक और स्थिति देखिए (See one more situation):

माना BC = 6.5 सेमी, $\angle C = 60^o$, $\angle A = 75^o$

इस उदाहरण में हमें BC पर बनने वाला एक ही कोण पता है। हमें रचना प्रारम्भ करने से पहले कोण $\angle B$ का मान चाहिए।

आपने पिछली कक्षा में पढ़ा है कि त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों के मापों का योग 180^o होता हैं।

उपरोक्त स्थिति में दिये हुए दो कोण 60^o और 75^o के हैं।

$\therefore$ तीसरा कोण $\angle B = 180^o - (75^o + 60^o)$

$= 180^o - (135^o)$

$\angle B = 45^o$

क्या अब आप आसानी से त्रिभुज बना सकते हैं? यदि हाँ, तो बनाकर देखिए।

प्रश्नावली 7.4

(i) ΔPQR की रचना कीजिए जब PQ = 4 सेमी, QR = 3 सेमी तथा RP = 5.5 सेमी हो।

(ii) ΔUVW की रचना कीजिए जब WU = UV = 5.5 सेमी, तथा $\angle VUW = 45^o$ हो।

(iii) ΔABC की रचना कीजिए जब BC = 3.5 सेमी, $\angle B = 30^o$ और $\angle A = 45^o$ हो।

प्रत्येक में रचना के चरण भी लिखिए।

हमने सीखा (We have learnt)

(i) त्रिभुज की तीनों भुजाओं के माप दिये होने पर त्रिभुज बनाया जा सकता है।

(ii) त्रिभुज की दो भुजाओं का माप तथा उनके बीच कोण दिया होने पर त्रिभुज बनाया जा सकता है।

(iii) त्रिभुज की एक भुजा का माप तथा दो कोण दिये होने पर त्रिभुज बनाया जा सकता है।

(iv) त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक हो, तभी त्रिभुज बन सकता है।

❖❖❖

64GMR4

64QISR