बहुपद

प्रमुख बिंदु

1. यदि x एक चर है, n एक प्राकृत संख्या है और $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ वास्तविक संख्याएं हैं, तो $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0, (a_n \neq 0)$ चर x में एक बहुपद कहलाता है।

2. 1, 2 तथा 3 घातांक वाले बहुपद क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।

3. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का बीजीय व्यंजक होता है जबकि a, b तथा c वास्तविक संख्याएं हैं तथा $a \neq 0$.

4. बहुपद के शून्यक उन बिंदुओं के x – निर्देशांक हैं जिन पर $y = p(x)$ का आलेख (GRAPH) x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। अर्थात् $x = a$, बहुपद $p(x)$ का शून्यक होगा यदि $p(a) = 0$

5. बहुपद के अधिकतम शून्यक उतने हो सकते हैं जितनी बहुपद की घात है।

6. (*i*) यदि बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक दूसरे का योज्य प्रतिलोम हो तो x का गुणांक $= 0$

(*ii*) यदि बहुपद $p(x)$ के शून्यक एक–दूसरे के गुणन प्रतिलोम हो तो, x^2 का गुणांक $=$ अचर पद

7. **बहुपद के शून्यकों ओर गुणांकों में संबंध–**

यदि α, β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ के शून्यक हो, तो

$$\alpha + \beta = \text{शून्यकों का योग} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$

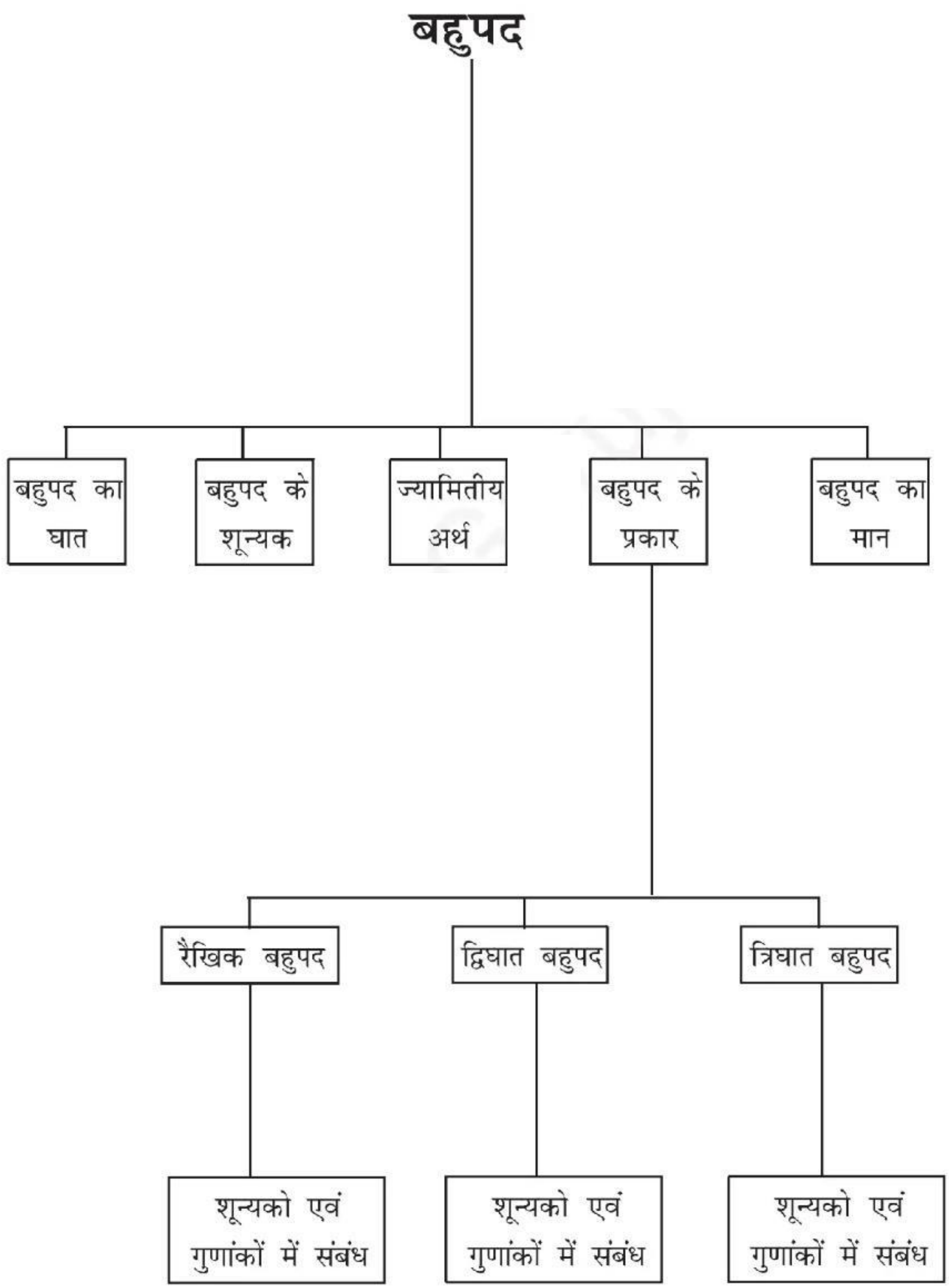
8. यदि α, β किसी द्विघात बहुपद के शून्यक हो, तो बहुपद

$p(x) = k\,[x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ शून्यकों का गुणनफल$]$

जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है तथा $k \neq 0$

9. रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा होती है।

10. **विभाजन एल्गोरिथ्म**–किंही दो बहुपदों $p(x)$ तथा $g(x)$ के लिए अन्य दो बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व इस प्रकार है:


बहुपद
बहुपद का घात
बहुपद के शून्यक
ज्यामितीय अर्थ
बहुपद के प्रकार
बहुपद का मान
रैखिक बहुपद
द्विघात बहुपद
त्रिघात बहुपद
शून्यको एवं गुणांकों में संबंध
शून्यको एवं गुणांकों में संबंध
शून्यको एवं गुणांकों में संबंध

बहुपद (Polynomial)

एक चर वाला बहुपद $P(x)$, चर x निम्न रूप का एक बीजीय व्यंजक है:-

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं एवं n एक अऋणात्मक पुर्णांक है।

बहुपद $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ जहाँ $a_n \neq 0$ का घात n है।

$5x + 7$ का घात 1 है।

घात 1 के बहुपद को रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) कहते हैं।

जैसे:- $2x - 3, \sqrt{3}x + 5, y + \sqrt{2}$

घात 2 के बहुपद को द्विघात बहुपद (Quadratic Polynomial) कहते हैं।

जैसे:- $y^2 - 2, 2 - x^2 + \sqrt{3}x$

घात 3 के बहुपद को त्रिघात बहुपद (Cubic Polynomial) कहते हैं।

जैसे:- $x^3 - 5, 4x^3 - 3x^2 + x + 4$

यदि $P(x), x$ चर में एक बहुपद हो तो x की जगह कोई अचर a रखने पर प्राप्त वास्तविक संख्या $P(x)$ का $x = a$ पर मान कहलाता है एवं $P(a)$ द्वारा सूचित किया जाता है।

यदि $P(x) = x^2 + 4x - 25$ तो $x = 3$ पर

$P(x)$ का मान $P(3) = 3^2 + 4 \times 3 - 25 = 9 + 12 - 25 = -4$

एक वास्तविक संख्या a बहुपद $P(x)$ का शून्यक (zero) कहलाता है यदि $P(a) = 0$

$P(x) = x^2 - 8x - 20$ का $x = -2$ पर मान

$$P(-2) = (-2) \times (-2) - 8 \times (-2) - 20 = 4 + 16 - 20 = 0$$

अत: $-2, P(x) = x^2 - 8x - 20$ का एक शून्यक है।

रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $= \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(\text{अचरपद})}{x \text{ का गुणांक}}$

ज्यामितीय अर्थ-बहुपद के शून्यको का ज्यामितीय अर्थ होता है कि वह बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को कितने बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करता है।

द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हो तो शून्यकों का

योग $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{का गुणांक}}$

यदि बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को n बिन्दुओं पर काटती है तो बहुपद के शून्यकों की संख्या n होगी। यदि बहुपद x-अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटती है तो शून्यकों की संख्या 2 होगी। यदि बहुपद x-अक्ष को नहीं काटती है केवल y-अक्ष को काटती है तो शून्यकों की संख्या 0 होगी।

द्विघात बहुपद $\Rightarrow x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ शून्यकों का गुणनफल

यदि त्रिघात समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक α, β, γ हो तो,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

उदाहरण:- द्विघात बहुपद के $x^2 + 7x + 10$ शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:- $x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x+5) + 2(x+5) = (x+2)(x+5)$

इसलिए $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x + 5 = 0$ अर्थात

जब $x = -2$ या $x = -5$ हो।

अत: दिये गये बहुपद के शून्यक -2 और -5 है।

शून्यकों का योग $= -2 + (-5) = -7 = \frac{-7}{1} = \frac{-(x \text{का गुणांक})}{x^2 \text{का गुणांक}}$

शून्यकों का योगफल $= (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{का गुणांक}}$

उदाहरण:- एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमश: -3 और 2 है।

हल:- द्विघात बहुपद $\Rightarrow x^2 -$(शून्यकों का योग) $x +$ शून्यको का गुणनफल

$\Rightarrow x^2 - (-3)x + 2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2$

बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म

$$\boxed{\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}}$$

यदि $P(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$$\boxed{P(x) = g(x) \times q(x) + r(x)}$$

जहाँ $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात है।

उदाहरण:- $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि आपको इसके दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ ज्ञात है।

हल:- दिये गये दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं अत: $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ दिये गये बहुपद का एक गुणक है। अब विभाजन एल्गारिथ्म का प्रयोग दिये गये बहुपद और $x^2 - 2$ के लिए किया जाता है–

$$
\begin{array}{r l}
x^2 - 2 \,) & \overline{2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2}\,(\,2x^2 - 3x + 1 \\
 & 2x^4 \qquad -4x^2 \\
 & \underline{- \qquad\quad + \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \qquad -3x^3 \qquad +6x \\
 & \qquad \underline{+ \qquad\quad - \qquad\qquad} \\
 & \qquad\qquad\quad x^2 - 2 \\
 & \qquad\qquad\quad x^2 - 2 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{- \quad + \qquad} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

इसलिए $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

अब $2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1 = 2x(x-1) - 1(x-1)$

$= (2x-1)(x-1)$

अत: इसके शून्यक $x = \frac{1}{2}$ और $x = 1$

अब दिये गये बहुपद के शूनयक $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ और 1 है।

☆☆☆