पाठ–3 दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए है। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए :

1 रैखिक समीकरण युग्म $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ में यदि $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ हो, तो निम्न में से सही कथन चुनें:

(a) अद्वितीय हल होगा (b) अनेक हल होगा
(c) कोई हल नहीं होगा (d) दो हल होगा

2. यदि रेखाएँ $3x + 2ky = 2$ और $2x + 5y + 1 = 0$ समांतर है, तो k का मान क्या होगा?

(a) 11/4 (b) -11/4
(c) 15/4 (d) -15/4

3. k के किस मान के लिए रेखा युग्म $8x + 5y = 9$ तथा $kx + 10y = 15$ असंगत हैं ?

(a) -16 (b) 16
(c) 15 (d) 9

4. समीकरण युग्म $2x + y = 4$ और $x + 3y = 15$ का हल होगा:

(a) एक हल (b) दो हल
(c) अनेक हल (d) कोई हल नहीं

5. समीकरण $x + y = 4$ और $x - y = 2$ के द्वारा निरूपित रेखाओं के लिए निम्न में से सही कथन चुनें :

(a) संपाती है (b) समांतर है
(c) प्रतिच्छेदी है (d) इनमें से कोई नहीं

6. यदि $x=2$ और $y=3$ समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल है तो k का मान निम्न में से चुनें :

(a) -25 (b) 13
(c) 15 (d) 20

7. समीकरण युग्म $x + 3y + 9 = 0$ तथा $2x + 5y + 7 = 0$ का :

(a) अद्वितीय हल होगा (b) अनेक हल होगा
(c) कोई हल नहीं होगा (d) दो हल होगा

8. समीकरण युग्म $y=7$ और $y=-9$ का हल है:

(a) एक (b) दो
(c) अनंत (d) कोई हल नहीं

9. समीकरण $6x - 2y + 9 = 0$ और $3x - y + 12 = 0$ के द्वारा निरूपित रेखाएँ :

(a) संपाती (b) समांतर है
(c) प्रतिच्छेदी हैं (d) लम्बवत हैं

10. यदि दो चरो में रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफ एक दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है, तब समीकरण युग्म होगा :

(a) संगत (b) असंगत
(c) आश्रित (d) इनमें से कोई नहीं

हल (Solution)

1 (b), 2 (c), 3 (b), 4 (a), 5 (c), 6 (b), 7(a), 8 (d), 9 (b), 10 (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

11. P के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण युग्म $px + 3y = 7$ तथा $2x - y = 6$ का एक अद्वितीय हल है।

हल दिया हुआ समीकरण निकाय है:

$$px + 3y = 7 \Rightarrow px + 3y - 7 = 0$$
$$2x - y = 6 \Rightarrow 2x - y - 6 = 0$$

यहाँ,

$a_1 = p,\ b_1 = 3,\ c_1 = -7,\ a_2 = 2,\ b_2 = -1,\ a_2 = -6$

अद्वितीय हल के लिए

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{p}{2} \neq \frac{3}{-1}$$
$$\therefore \quad p \neq -6$$

12. 2 kg सेब और 1 kg अंगूर का मूल्य किसी दिन ₹160 था। एक महीने बाद 4 kg सेब और 2 kg अंगूर का मूल्य ₹300 हो जाता है। इस स्थिति को बीजगणितीय रूप में व्यक्त कीजिए।

हल माना 1 kg सेब का मूल्य x रुपया तथा 1 kg अंगूर का मूल्य y रुपया है। तब बीजगणितीय रूप निम्न समीकरणों द्वारा देय है:

$$2x + y = 160$$
और $\quad 4x + 2y = 300$
$$\therefore \quad 2x + y = 150$$

13. रैखिक समीकरण युग्म $2x + y - 6 = 0, 4x - 2y - 4 = 0$ संगत है या असंगत।

हल दिया गया रैखिक समीकरण युग्म है

$$2x + y - 6 = 0,\ 4x - 2y - 4 = 0$$

यहाँ,

$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -6, a_2 = 4, b_2 = -2, c_2 = -4$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

यहाँ हम पाते हैं

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अतः दिए हुए रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं अर्थात दिए हुए रैखिक समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है।

अतः दिया हुआ समीकरण युग्म संगत है।

14. आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए:

$5x - y - 7 = 0, \quad x - y + 1 = 0$

हल दिया है $5x - y - 7 = 0$ (1)

$x - y + 1 = 0$ (2)

समीकरण (1) के लिए $5x - y - 7 = 0$

$\Rightarrow y = 5x - 7$

हलों की सारणी

x	1	2
y	–2	3

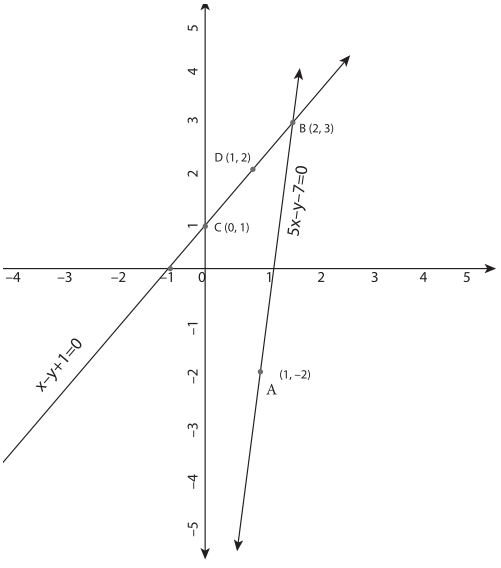
समीकरण (2) के लिए $x - y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = x + 1$

हलों की सारणी

x	0	1
y	1	2

एक ग्राफ पेपर पर हम बिन्दुओं A(1, –2) और B(2, 3) को रेखा AB प्राप्त करने के लिए आलेखित करते हैं और बिन्दुओं C (0, 1) और D(1, 2) को रेखा CD प्राप्त करने के लिए आलेखित करते हैं।



ग्राफ से हम देखते हें कि रेखाएँ AB और CD बिन्दु B(2, 3) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः $x = 2, y = 3$ अभीष्ट हल है।

15. P के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल हो :

$px + 2y = 5, \quad 3x + y = 1$

हल: दिया हुआ समीकरण निकाय है:

$px + 2y = 5$

$3x + y = 1$

$\Rightarrow \quad px + 2y - 5 = 0$ .....(1)

$3x + y - 1 = 0$ .....(2)

यहाँ,

$a_1 = p, b_1 = 2, c_1 = -5$

$a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -1$

अद्वितीय हल के लिए

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\Rightarrow \quad \frac{p}{3} \neq \frac{2}{1}$

$\therefore \quad p \neq 6$

लघु उत्तरीय प्रश्न

16. आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए।

अथवा,

दिए गए रैखिक समीकरणों को ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

$x + 3y = 6, \quad 2x - 3y = 12$

हल. दिया हुआ समीकरण युग्म है : $x + 3y = 6,$

$2x - 3y = 12$

समीकरण $x + 3y = 6$ के लिए

$\because x + 3y = 6$

$\therefore \quad y = \frac{6 - x}{3}$

हलों की सारणी

x	0	3
y	2	1

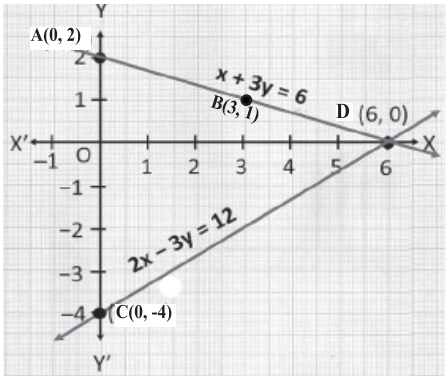
समीकरण $2x - 3y = 12$ के लिए

$\because 2x - 3y = 12$

$\therefore \quad y = \frac{12 - 2x}{-3} \Rightarrow y = \frac{2x - 12}{3}$

हलों की सारणी

x	0	6
y	– 4	0



हम देखते हैं कि रेखाएँ AB और CD बिन्दु (6, 0) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः $x = 6, y = 0$ अभीष्ट हल है।

17. रैखिक समीकरण युग्म $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ को प्रतिस्थापन विधि से हल करें।

हल. $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ दिया हुआ रैखिक समीकरण युग्म है:

$$\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2 \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6} \quad \text{..... (2)}$$

समीकरण (1) से $\frac{3x}{2} = \frac{5y}{3} - 2$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{2} = \frac{5y-6}{3} \Rightarrow \frac{2(5y-6)}{9}$$

$$\therefore x = \frac{2(5y-6)}{9} \quad \text{..... (3)}$$

x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{2(5y-6)}{9}\right\} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(5y-6)+27y}{54} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{20y-24+27y}{9} = \frac{13}{1} \Rightarrow 47y - 24 = 117$$

$$\Rightarrow \quad 47y = 24 + 117 \Rightarrow 47y = 141 \Rightarrow y = \frac{141}{47} = 3$$

y के मान को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x = \frac{2(5\times 3-6)}{9} = 2$$

अतः हल $x = 2$ तथा $y = 3$ है

सत्यापन– $x = 2$, $y = 3$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

$$\frac{3x}{2} + \frac{5y}{3} = \frac{3(2)}{2} - \frac{-5(3)}{2} = 3 - 5 = -2$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

अतः प्राप्त हल सही है।

18. दो अंकों वाली एक संख्या के अंको का योग 8 है। अंकों को पलटने पर प्राप्त होने वाली संख्या दी गई संख्या से 36 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो अंको वाली संख्या का इकाई अंक x तथा दहाई का अंक y है।

तब प्रश्नानुसार, $x + y = 8$ .....(1)

तथा संख्या $= 10y + x$

अंको को पलटने पर प्राप्त होने वाली संख्या $= 10x + y$

पुनः प्रश्नानुसार

$10x + y = (10y + x) + 36 \Rightarrow 10x - x + y - 10y = 36$

$\Rightarrow 9x - 9y = 36$

$\Rightarrow x - y = 4$ .....(2) [9 से भाग देने पर]

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोड़ने पर

$2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर,

$2y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$

अतः अभीष्ट संख्या $10y + x = 10 \times 2 + 6 = 26$ है।

सत्यापन $6 + 2 = 8$

$\Rightarrow \quad 62 = 26 + 36$

अतः प्राप्त हल सही है।

19. हल करें $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$, $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$

हल दिया हुआ समीकरण निकाय है:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2 \quad \text{..... (2)}$$

माना,

$$\frac{1}{x} = a \quad \text{..... (3)}$$

$$\frac{1}{y} = b \quad \text{..... (4)}$$

x और y का मान समीकरण (3) और (4) से समी. करण (1) और (2) में रखने पर हम पाते हैं:

$$2a + 3b = 13 \quad \text{..... (5)}$$

$$5a - 4b = -2 \quad \text{..... (6)}$$

समीकरण (5) में 4 से और समीकरण (6) में 3 से गुणा करने पर हम पाते हैं:

$$8a + 12b = 52 \quad \text{..... (7)}$$

$$15a - 12b = -6 \quad \text{..... (8)}$$

समीकरण (7) और समीकरण (8) को जोड़ने पर हम पाते हैं:

$$23a = 46$$

$$a = \frac{46}{23} = 2$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} = 2$ [समीकरण (3) से]

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$

$a = 2$ को समीकरण (5) में रखने पर हम पाते हैं:

$$2(2) + 3b = 13$$

$\Rightarrow \quad 4 + 3b = 13$

$$3b = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{3} = 3$$

$\Rightarrow \quad b = 3$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = 3$ [समीकरण (4) से]

$\therefore \quad y = \frac{1}{3}$

अतः अभीष्ट हल है : $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$

सत्यापन – समीकरण (1) और समीकरण (2) में $x = \frac{1}{2}$ और $y = \frac{1}{3}$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हें जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 4 + 9 = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = \frac{5}{\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{4}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 10 - 12 = -2$$

20. किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में से प्रत्येक में यदि 1 जोड़ दें तो वह $\frac{4}{5}$ बन जाती है परन्तु प्रत्येक में से 5 घटा दें, तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल माना भिन्न $\frac{x}{y}$ है

तब प्रश्नानुसार,

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$$5(x+1) = 4(y+1)$$

$$5x + 5\times1 = 4y + 4\times1$$

$$5x - 4y = 4 - 5 = -1$$

$$5x - 4y = -1 \qquad (1)$$

और $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

$$2(x-5) = 1(y-5)$$

$$2x - 10 = y - 5$$

$$2x - y = -5 + 10$$

$$2x - y = +5 \qquad (2)$$

समीकरण (2) से

$$y = 2x - 5$$

y का यह मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$5x - 4(2x - 5) = -1$$

$\Rightarrow \quad 5x - 8x + 20 = -1$

$\Rightarrow \quad -3x = -1 - 20$

$\Rightarrow \quad -3x = -21$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-21}{-3} = 7$

समीकरण (2) में $x = 7$ रखने पर,

$$2(7) - y = 5$$

$\Rightarrow \quad 14 - y = 5$

$\Rightarrow \quad -y = 5 - 14 = -9$

$\therefore \quad y = 9$

अतः अभीष्ट भिन्न $\frac{7}{9}$ है।

सत्यापन,

$$\frac{7+1}{9+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{7-5}{9-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

अतः प्राप्त हल सही है।