7
अध्याय

त्रिभुज

स्मरणीय बिंदु

- सर्वांगसम आकृतियाँ-दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती है यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।
- समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
- समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।
- सर्वांगसमता नियम (SAS,ASA,AAS,RHS)
- त्रिभुज की बराबर भुओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- त्रिभुज की बराबर कोण की सममुख भुजाएँ बराबर होती है।
- समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 90° का होता है।
- किसी त्रिभुज में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
- किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।
- किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि उनका-

(a) एक ही आकार और माप हो

(b) एक ही प्रकार हो

(c) एक ही रूप के हो (d) उपर्युक्त में कोई नहीं

(2) त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण होते हैं-

(a) असमान (b) समान या बराबर

(c) कुछ कह नहीं सकते (d) उपर्युक्त में कोई नहीं

(3) एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है और यदि $C = 45^\circ$ तो $\angle A$ की माप होगी-

(a) 40° (b) 50°

(c) 55° (d) 45°

(4) एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण होता है-

(a) 90° (b) 180°

(c) 45° (d) 60°

(5) निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों के सर्वांगसमता की कसौटी नहीं है-

(a) SAS (b) ASA

(c) SSA (d) SSS

(6) समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियाँ कहलाती हैं-

(a) सर्वांगसम (b) समान

(c) समरूप (d) बराबर

(7) किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से होता है-

(a) बड़ा (b) छोटा

(c) बराबर (d) इनमे से कोई नही

(8) समकोण त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा होती है-

(a) कर्ण (b) लम्ब

(c) आधार (d) इनमें से कोई नही

उत्तर- (1) (a) (2) (b) (3) (d) (4) (d) (5) (c) (6) (a) (7) (a) (8) (a)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) समान भुजाओं वाले दो वर्ग ..... होते हैं।

(2) त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ ..... होती हैं।

(3) यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज ..... होते हैं।

(4) एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएं बराबर हो ..... त्रिभुज कहलाता है।

(5) किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से ..... होता है।

(6) किसी त्रिभुज मे बड़े कोण की सम्मुख भुजा ..... होती है।

(7) समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त ..... होते हैं।

(8) समकोण त्रिभुज मे सबसे बड़ी भुजा ..... होती है।

उत्तर- (1) सर्वांगसम (2) बराबर/समान (3) सर्वांगसम (4) समद्विबाहु (5) बड़ा (6) बड़ी (7) सर्वांगसम (8) कर्ण

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 50° होता है।

(2) समान भुजाओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते है।

(3) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे की दो भुजाओ की दो भुजाओ और अंतर्गत कोण बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

(4) एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणो और संगत भुजा के बराबर होने पर भी दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नही होते है।

(5) एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणो और अंतर्गत भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

(6) समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त समरूप होते हैं।

(7) दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती है यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।

(8) यदि दो त्रिभुजो में संगत कोण बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

(9) समद्विबाहु त्रिभुज के तीनों कोण बराबर होते हैं।

(10) यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उत्तर- (1) असत्य (2) सत्य (3) सत्य (4) असत्य (5) सत्य (6) सत्य (7) सत्य (8) असत्य (9) असत्य (10) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिये।

(1) सर्वांगसम आकृतियाँ किसे कहते हैं?

(2) समबाहु त्रिभुज क्या होता है?

(3) समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप क्या होती है?

(4) समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियाँ क्या कहलाती हैं?

(5) जिस त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों उसे कौन सा त्रिभुज कहते है।

(6) किसी त्रिभुज में अधिकतम कितने समकोण हो सकते हैं।

(7) किसी त्रिभुज में कम से कम कितने न्यून कोण हो सकते है।

(8) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग कितना होता है?

(9) एक त्रिभुज में कितनी भुजाएँ, शीर्ष एवं कोण होते हैं लिखिए।

उत्तर- (1) वे आकृतियाँ जिनके आकार और माप समान हों (2) ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाओं की माप समान हों (3) 60° (4) सर्वांगसम (5) समबाहु (6) एक (7) दो (8) 180° (9) तीन भुजाएं, तीन शीर्ष एवं तीन कोण।

प्रश्न 5. सही जोड़ी बनाइए-

कॉलम-(A)	कॉलम-(B)
(1) त्रिभुज जिसका एक कोण 90° हो	(a) सर्वांगसम
(2) त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ समान हों	(b) बड़ी
(3) त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों	(c) समकोण
(4) बड़े कोण की सम्मुख भुजा	(d) समबाहु
(5) समान भुजाओं वाले दो त्रिभुज	(e) समद्विबाहु

होते हैं।

उत्तर- (1) (c) (2) (e) (3) (d) (4) (b) (5) (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (2 अंक)

प्रश्न 6. त्रिभुज किसे कहते हैं?

हल- तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनायी गई एक बंद आकृति एक त्रिभुज कहलाती है।

प्रश्न 7. सर्वांगसम आकृतियों को परिभाषित करो।

हल- दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती है यदि वे एक ही आकार तथा एक ही माप की हो।

प्रश्न 8. RHS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

हल- RHS सर्वांगसमता नियम: यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण और एक क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

प्रश्न 9. SAS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

हल- यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा अन्तर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं तथा अन्तर्गत कोण के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (सर्वांगसमता नियम से)

प्रश्न 10. ASA सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

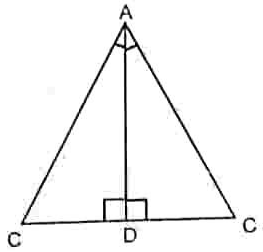
हल- यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अन्तर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो तो दानों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (ASA सर्वांगसमता नियम)

प्रश्न 11. AAS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

हल- यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (AAS सर्वांगसमता नियम)

प्रश्न 12. ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है दर्शाइए कि AB = AC

हल-



ΔABD तथा ΔACD में

$\angle BAD = \angle CAD$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (दिया है)

अतः $\Delta ABC =$ अतः ΔACD (ASA नियम)

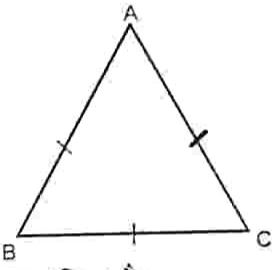
इसलिए $AB = AC$ (CPCT)

इसी कारण ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

प्रश्न 13. दर्शाइए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

हल- दिया है ABC एक समबाहु त्रिभुज है। जिसमें AB = AC = BC है।

सिद्ध करना है- $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$



प्रमाण AB = AC (दिया है)

$\angle B = \angle C$ (1) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

AB = BC (दिया है)

$\angle A = \angle C$ (2) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

AC = BC (दिया है)

$\angle A = \angle B$ (3) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

समीकरण (1), (2), और (3) से हमें प्राप्त होता है।

$\angle A = \angle B + \angle C$ .....(4)

त्रिभुज ABC में

$\angle A = \angle B = \angle C = 180°$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$3\angle A = 180°$

$\angle A - 60°$

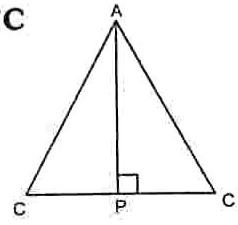
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

लघु उत्तरीय प्रश्न (3 अंक)

प्रश्न 14. $\angle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है तो दर्शाइए की $\angle B = \angle C$

हल- दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें है AB= AC जिसमें AP ⊥ BC है।

प्रमाण: ΔABP तथा ΔACP में



AB = AC (कर्ण दिया है)

AP = AP (उभयनिष्ठ भुजा)

∠APB = ∠APC (प्रत्येक = 90°)

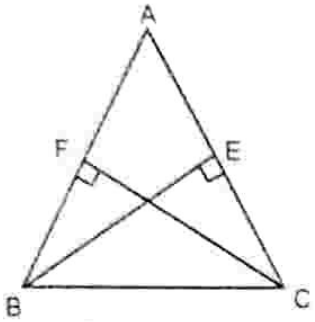
RHS सर्वांगसमता नियम से

∠ABP ≅ ∠ACP

अत: ∠B = ∠C By CPCT

प्रश्न 15. BE और CF एक त्रिभुज ABC के बराबर शीर्षलम्ब है। RHS सर्वांगसम नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल- ΔFBC और ΔECB में



∠BFC = ∠CDB (∵ प्रत्येक 90°)

BC = BC (उभयनिष्ठ)

FC = BE (दिया है)

अत: ΔFBC = ΔECB (∵ RHS सर्वांगसमता नियम)

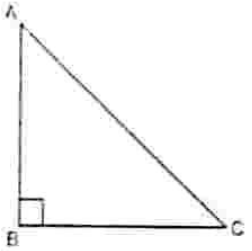
∠FBC = ∠ECB

(सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते है)

ΔABC में बराबर कोणो की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 16. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

हल-



तब

∠A + ∠B + ∠C = 180°

∠A + ∠C + 90° = 180°

∠A + ∠C = 180° – 90°

∠A + ∠C = 90°

चूँकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

∠B = ∠A + ∠C

तथा ∠B > ∠A और ∠B > ∠C

इसलिए AC > AB

चूँकि त्रिभुज के बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।

प्रश्न 17. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें ∠A = 90° और AB = AC है तो ∠B और ∠C ज्ञात कीजिए।

हल- ΔABC में

AB = AC

∠B = ∠C

(चूँकि समान भुजाओ के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

ΔABC में

∠A + ∠B + ∠C = 180°

(चूँकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

90° + ∠B + ∠C = 180°

हम जानते है कि ∠B = ∠C

अत: 90° + ∠B + ∠B = 180°

2∠B = 180° – 90°

2∠B = 90°

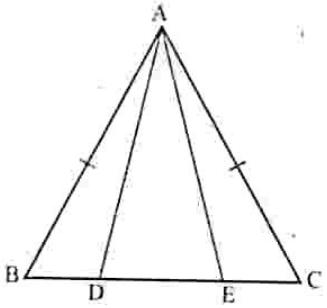
$$\angle B = \frac{90^\circ}{2}$$

∠B = 45°

अत: $\boxed{\angle B = \angle C = 45^\circ}$

प्रश्न 18. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें AB = AC है कि भुजा BC पर दो बिन्दु D और E इस प्रकार है कि BE = CD तब दर्शाइए कि AD = AE

हल-



ΔABD और ΔACE में

AB = AC (दिया है)...(1)

B = C ...(2)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

साथ ही, BE = CD (दिया है)

इसलिए BE – DE = CD – DE

अर्थात BD = CE ...(3)

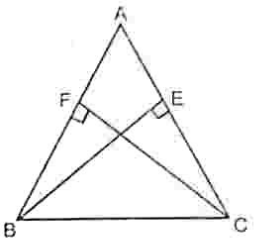
अत: $\Delta ABD = \Delta ACE$

(1),(2), (3) और SAS नियम द्वारा

इससे प्राप्त होता है: AD = AE (CPCT)

प्रश्न 19. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमश: शीर्ष लम्ब क्रमश: BE और CF खींचे गए हैं दर्शाइए कि शीर्ष लम्ब बराबर है।

हल-



ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमश: शीर्षलम्ब BE और CF खींचे गए हैं।

सिद्ध करना है-

BE = CF

चूँकि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है,

अत: AB = AC

और $\angle ABC = \angle ACB$

(चूँकि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

ΔBEC तथा ΔCFB में

$\angle BEC = \angle CFB$ (चूँकि प्रत्येक समकोण है।)

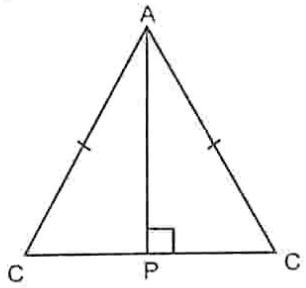
BC = CB (उभयनिष्ठ)

$\angle ECB = \angle FBC$

अत: ASA सर्वांगसमता के आधार पर

प्रश्न 20. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। AP ⊥ BC खींचकर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$

हल- दिया है- ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है।



सिद्ध करना है- $\angle B = \angle C$

प्रमाण : ΔABP और ΔACP में

AB = AC (कर्ण दिया है)

AP = AP (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle APB = \angle APC$ (प्रत्येक 90°)

RHS सर्वांगसम नियम से

$\Delta ABP = \Delta ACP$

अत: $\angle B = \angle C$

प्रश्न 21. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90°$ और AB = AC तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

हल- ΔABC में

AB = AC

$\angle B = \angle C$

(चूँकि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

ΔABC में

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

(चूँकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

$90° + \angle B + \angle C = 180°$

हम जानते हैं कि $\angle B = \angle C$

अत: $90° + \angle B + \angle B = 180°$

$2\angle B = 180° - 90°$

$2\angle B = 90°$

$\angle B = \frac{90°}{2}$

$\angle B = 45°$

अत: $\boxed{\angle B = \angle C = 45°}$

विश्लेषणात्मक प्रश्न (4 अंक)

प्रश्न 22. दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

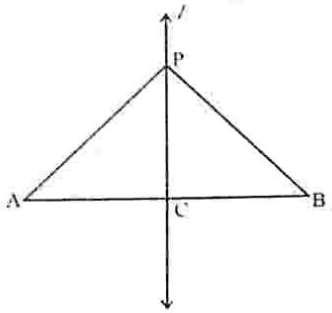
हल- देखिए अ.ल.उ. प्रश्न 13

प्रश्न 23. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्ष लम्ब है। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल- देखिए ल.उ. प्रश्न 15

प्रश्न 24. AB एक रेखाखण्ड है और रेखा l इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि l पर स्थित P कोई बिन्दु है, तो दर्शाइए कि P बिन्दुओं A और B से समदूरस्थ है।

हल-



/ ⊥ AB है और AB के मध्य बिन्दु C से होकर जाती है

ΔPCA और ΔPCB में

AC = BC (C,AB का मध्य बिंदु है)

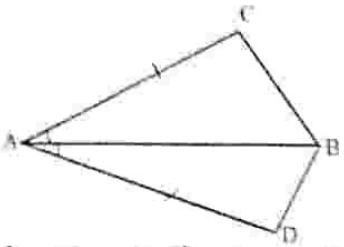
∠PCA = ∠PCB = 90° (दिया है)

PC = PC (उभयनिष्ठ)

अत: ΔPCA = ΔPCB (SAS नियम)

इसलिए PA = PB (सर्वांगसम त्रिभुजो की संगत भुजाएँ)

प्रश्न 25. चतुर्भुज ABCD में AC = AD और AB कोण A को समद्विभाजित करता है तो दर्शाइए कि ΔABC ≅ ΔABD



हल- दिया है : AC = AD और AB ∠A को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है: ΔABC = ΔABD

प्रमाण : ΔABC तथा ΔABD मे

AC = AD (दिया है)

∠CAB = ∠BAD (AB ∠A को समद्विभाजित करता है)

AB = AB (उभयनिष्ठ है)

SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔABC ≅ ΔABD

BC = BD (CPCT)

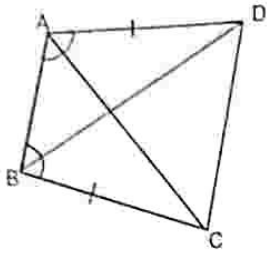
प्रश्न 26. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC और ∠DAB = ∠CBA तो सिद्ध कीजिए

(1) ΔABD ≅ ΔBAC (2) BD = AC

(3) ∠ABD = ∠BAC

हल- दिया है- ABCD एक चतुर्भुज है

जिसमे AD = BC और ∠DAB = ∠CBA है



सिद्ध करना है-

(i) ΔABO ≅ ΔBAC

(ii) BD = AC

(iii) ∠ABD = ∠BAC

(1) ΔABD तथा ΔBAC में

AD = BC (दिया है)

AB = AB (उभयनिष्ठ)

∠DAB = ∠CBA (दिया है)

अत: SAS सर्वांगसमता के आधार पर

$\boxed{\Delta ABD \cong \Delta BAC}$

(2) जब ΔABD ≅ ΔBAC [समी. (i) के आधार पर]

जब ΔABD ≅ ΔBAC (समी. (1) में सिद्ध किया)

$\boxed{\angle BAC \cong \angle OAE}$