3 मसावि-लसावि

C2617V

आओ, थोड़ा याद करें

- सबसे छोटी अभाज्य संख्या (prime number) कौन-सी है ?
- 1 से 50 तक की संख्याओं में कितनी अभाज्य संख्या (मूल संख्या) हैं ? उनकी सूची बनाओ।
- नीचे दी गई संख्याओं में से अभाज्य संख्या के चारों ओर गोल बनाओ।

  17, 15, 4, 3, 1, 2, 12, 23, 27, 35, 41, 43, 58, 51, 72, 79, 91, 97

  सहअभाज्य संख्या (Coprime numbers) : जिन दो संख्याओं का सामान्य विभाजक सिर्फ 1 हो उन्हें **सहअभाज्य संख्या** कहते हैं। सहअभाज्य संख्या को **सापेक्ष मूल संख्या** (relatively prime numbers) भी कहते हैं।

जैसे : 10 तथा 21 सहअभाज्य संख्या हैं। 10 के विभाजक : 1, 2, 5, 10 और 21 के विभाजक 1, 3, 7, 21 हैं। दोनों संख्याओं के विभाजकों में संख्या 1 ही सामान्य विभाजक है। (3, 8) ; (4, 9); (21, 22) ; (22, 23) ; (23, 24) सहअभाज्य संख्याएँ हैं। दो क्रमिक संख्या सहअभाज्य संख्या होती हैं, इसकी जाँच करो।

आओ, समझें

अभाज्य युग्म संख्या (Twin prime numbers)

जिन दो अभाज्य संख्याओं में 2 का अंतर हो उन दो अभाज्य संख्याओं को 'अभाज्य युग्म संख्या' कहते हैं।

जैसे : (3, 5) ; (5, 7) ; (11, 13) ; (29, 31) आदि

प्रश्नसंग्रह 10

1. वह संख्या बताओ जो न विभाज्य और न अभाज्य है।
2. नीचे दी गई जोड़ियों में सहअभाज्य संख्याओं की जोड़ियाँ पहचानो।

   (i) 8, 14 (ii) 4, 5 (iii) 17, 19 (iv) 27, 15
3. 25 से 100 तक की सभी अभाज्य संख्याओं की सूची तैयार करो। कितनी है लिखो।
4. 51 से 100 तक की सभी अभाज्य युग्म संख्याएँ लिखो।
5. 1 से 50 के बीच की सहअभाज्य संख्याओं की कोई 5 जोड़ियाँ लिखो।
6. अभाज्य संख्याओं में समअभाज्य संख्या कौन-सी हैं, लिखो।

आओ, समझें

अभाज्य संख्या के गुणनखंड ज्ञात करना (Prime factorisation of a number)

संख्याओं के लसावि तथा मसावि ज्ञात करने के लिए युक्लिड का एक आसान और महत्वपूर्ण नियम कई बार उपयोग में लाया जाता है। इस नियम के अनुसार "**कोई भी संयुक्त संख्या (विभाज्य संख्या) यह अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखी जा सकती है।**"

अब देखेंगे कि संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड कैसे ज्ञात करते हैं।

उदा. संख्या 24 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणा के रूप में लिखो।

अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करने की विधि

उर्ध्वाधर विधि

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

क्षैतिज विधि

$24 = 2 \times 12$

$= 2 \times 2 \times 6$ ...12 के गुणनखंड किए

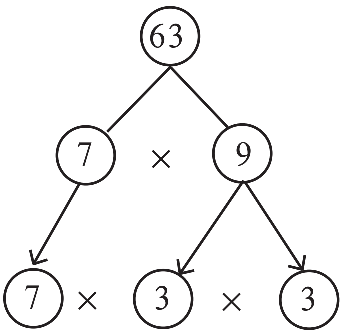
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ...6 के गुणनखंड किए

2 तथा 3 अभाज्य गुणनखंड हैं।

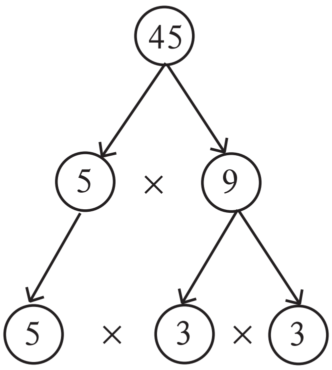
ध्यान दो :
दी गई संख्या को उसके अभाज्य गुणनखंड के गुणनफल के रूप में लिखना ही उस संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना है।

उदा. नीचे दी गई संख्या को उसके अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखो।

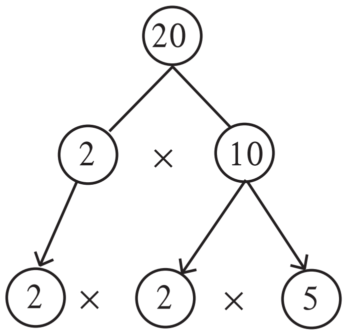
हल :



$63 = 7 \times 3 \times 3$



$45 = 5 \times 3 \times 3$



$20 = 2 \times 2 \times 5$

उदा. संख्या 117 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

हल :

3	117
3	39
13	13
	1

$117 = 13 \times 9$

$= 13 \times 3 \times 3$

$117 = 3 \times 3 \times 13$

उदा. संख्या 250 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

हल :

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$250 = 2 \times 125$

$= 2 \times 5 \times 25$

$= 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$

उदा. संख्या 40 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

हल : **उर्ध्वाधर विधि**

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$$40 = 10 \times 4$$
$$= 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

क्षैतिज विधि

$$40 = 8 \times 5$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

प्रश्नसंग्रह 11

⊙ नीचे दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

(i) 32 (ii) 57 (iii) 23 (iv) 150 (v) 216

(vi) 208 (vii) 765 (viii) 342 (ix) 377 (x) 559

आओ, थोड़ा याद करें

महत्तम सामान्य विभाजक (मसावि)

[Greatest Common Divisor (GCD) or Highest Common Factor (HCF)]

हमने धन पूर्णांक संख्याओं के मसावि और लसावि का अभ्यास किया है। अब उनका और थोड़ा अधिक अभ्यास करेंगे।

दी गई संख्याओं के सामान्य विभाजकों में से सबसे बड़ी संख्या ही मसावि होती है।

नीचे दिए गए उदाहरणों में दी गई संख्याओं के सभी विभाजक लिखकर मसावि ज्ञात करो।

(i) 28, 42 (ii) 51, 27 (iii) 25, 15, 35

आओ, समझें

अभाज्य गुणनखंड पद्धति : अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर संख्याओं का मसावि ज्ञात करना आसान होता है।

उदा. अभाज्य गुणनखंड पद्धति से 24 तथा 32 का मसावि ज्ञात करो।

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$$24 = 4 \times 6$$
$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3$$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$32 = 8 \times 4$$
$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2$$

प्रत्येक संख्या में सामान्य गुणनखंड 2 यह 3 बार आया है । अतः मसावि $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदा. संख्याएँ 195, 312 तथा 546 का मसावि ज्ञात करो।

हल : $195 = 5 \times 39$

$= 5 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$312 = 4 \times 78$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 39$

$= 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$546 = 2 \times 273$

$= 2 \times 3 \times 91$

$= 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

प्रत्येक संख्या में 3 तथा 13 सामान्य गुणनखंड एक ही बार आया है।

$\therefore$ मसावि $= 3 \times 13 = 39$

उदा. संख्याएँ 10, 15 तथा 12 का मसावि ज्ञात करो।

हल : $10 = 2 \times 5$ $\quad$ $15 = 3 \times 5$ $\quad$ $12 = 2 \times 2 \times 3$

इन संख्याओं के गुणनखंड में कोई भी अभाज्य संख्या सामान्य नहीं है । 1 यह एक ही समान्य विभाजक है। इसलिए मसावि $= 1$

उदा. संख्याएँ 60, 12 एवं 36 का मसावि ज्ञात करो।

हल : $60 = 4 \times 15$

$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

$12 = 2 \times 6$

$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3}$

$36 = 3 \times 12$

$= 3 \times 3 \times 4$

$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

इसी उदाहरण को उर्ध्वाधर विधि से हल करेंगे। एक ही साथ सभी संख्या लिखकर अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

2	60	12	36
2	30	6	18
3	15	3	9
	5	1	3

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

ध्यान दो कि संख्या 12 यह 36 तथा 60 की विभाजक है।

यह मैंने समझा

- दी गई संख्याओं में से एक संख्या अन्य संख्याओं की विभाजक हो तो वह संख्या दी गई संख्याओं का मसावि होती है।
- दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों में एक भी अभाज्य संख्या सामान्य न हो तो उन संख्याओं का मसावि 1 होता है क्योंकि 1 उन संख्याओं का सामान्य विभाजक है।

*** अधिक जानकारी हेतु**

दो क्रमिक सम संख्याओं का मसावि 2 होता है। दो क्रमिक विषम संख्याओं का मसावि 1 होता है। विविध उदाहरण लेकर इन नियमों की जाँच करो।

भाग विधि से मसावि ज्ञात करना

उदा. संख्या 144 तथा 252 का मसावि ज्ञात करो।

```
144)252( 1
   -144
   108)144( 1
      -108
        36)108(3
          -108
           000
```

(1) बड़ी संख्या को छोटी संख्या से भाग दो।

(2) चरण 1 के इस भाग विधि में मिलने वाले शेषफल से भाजक को भाग दो।

(3) चरण 2 में मिलने वाले शेषफल से चरण 2 के भाजक को भाग दो तथा शेषफल ज्ञात करो।

(4) इसी प्रकार शेषफल शून्य आने तक क्रिया करो।
जिस भाग विधि में शेषफल शून्य मिले उस भाग विधि का भाजक ही दी गई संख्याओं का मसावि है।

$\therefore$ 144 तथा 252 का मसावि = 36

उदा. संख्या $\frac{209}{247}$ को संक्षिप्त रूप दो।

हल : संक्षिप्त रूप देने के लिए दोनों संख्याओं का सामान्य गुणनखंड ज्ञात करते हैं। इसके लिए भाग विधि से 209 तथा 247 का मसावि ज्ञात करते हैं। यहाँ पर 19 मसावि है अर्थात अंश तथा हर के स्थान की संख्याओं को 19 से विभाजित कर सकते हैं।

```
209)247 ( 1
   -209
    38)209 (5
       -190
        19)38(2
          -38
           00
```

$$\therefore \quad \frac{209}{247} = \frac{209 \div 19}{247 \div 19} = \frac{11}{13}$$

प्रश्नसंग्रह 12

1. मसावि ज्ञात करो।

(i) 25, 40 (ii) 56, 32 (iii) 40, 60, 75 (iv) 16, 27

(v) 18, 32, 48 (vi) 105, 154 (vii) 42, 45, 48 (viii) 57, 75, 102

(ix) 56, 57 (x) 777, 315, 588

2. भाग विधि से मसावि ज्ञात करके संक्षिप्त रूप दो।

(i) $\frac{275}{525}$ (ii) $\frac{76}{133}$ (iii) $\frac{161}{69}$

आओ, थोड़ा याद करें

लघुत्तम सामान्य विभाजक (लसावि) [Least common multiple (LCM)]

दी गई संख्याओं में प्रत्येक संख्या से विभाजित होने वाली छोटी-से-छोटी संख्या ही उन संख्याओं का लसावि होती है।

- नीचे दी गई संख्याओं के पहाड़े लिखकर उनका लसावि ज्ञात करो।

(i) 6, 7 (ii) 8, 12 (iii) 5, 6, 15

आओ, समझें

उदा. संख्या 60 तथा 48 का लसावि ज्ञात करो।

हल : पहले प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

उपर्युक्त गुणनफल में आनेवाली प्रत्येक अभाज्य संख्या देखते हैं।

2 यह संख्या अधिक-से-अधिक 4 बार हैं। (48 के गुणनखंड में)

3 यह संख्या अधिक-से-अधिक 1 बार हैं। (60 के गुणनखंड में)

5 यह संख्या अधिक-से-अधिक 1 बार हैं। (60 के गुणनखंड में)

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 10 \times 24 = 240$

उदा. संख्या 18, 30 तथा 50 का लसावि ज्ञात करते हैं।

हल : $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$ | $30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$ | $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5$

ऊपर दिए गए गुणनफल में अभाज्य संख्याएँ 2, 3 तथा 5 हैं।

संख्या 2 यह अधिकतम ☐ बार, संख्या 3 यह अधिकतम ☐ बार तथा संख्या 5 यह संख्या अधिकतम ☐ बार आई है।

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 450$ $\qquad$ $\therefore$ 18, 30, 50 का लसावि 450 है।

उदा. संख्या 16, 28 तथा 40 का लसावि ज्ञात करो।

हल : उर्ध्वाधर विधि

2	16	28	40
2	8	14	20
2	4	7	10
	2	7	5

- विभाजक कसौटियों का उपयोग कर सभी संख्याओं को भाग जाने वाली संख्या ज्ञात करो और उससे दी गई संख्याओं को भाग दो। भाग से प्राप्त होनेवाली संख्याओं पर भी इसी विधि से जब तक संभव हो क्रिया करो।
- अब प्राप्त संख्याओं में कम-से-कम दो संख्याओं को विभाजित करने वाली संख्या ढूँढ़कर जिस संख्या से भाग जाता हैं उससे भाग दो। जिस संख्या में भाग नहीं जाता उसे वैसा ही रखो। जब तक संभव हो यह क्रिया करो।
- 1 के अलावा सामान्य विभाजक न मिलने पर भाग देना रोक दो।
- बाई ओर के स्तंभ की संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करो। उसे सबसे नीचे की आड़ी कतार की संख्याओं से गुणा करो।

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$

उदा. संख्या 18 तथा 30 का लसावि तथा मसावि ज्ञात करो। उनके गुणनफल तथा दी गई संख्याओं के गुणनफल की तुलना करो।

2	18	30
3	9	15
	3	5

मसावि $= 2 \times 3 = 6$

लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

मसावि $\times$ लसावि $= 6 \times 90 = 540$

दी गई दो संख्याओं का गुणनफल $= 18 \times 30 = 540$

दी गई दो संख्याओं का गुणनफल = मसावि $\times$ लसावि

इसमें यह दिखाई देता हैं कि दो संख्याओं का गुणनफल उन दो संख्याओं के मसावि तथा लसावि के गुणनफल के बराबर होता है। इस विधान की जाँच करने के लिए नीचे दी गई संख्याओं की जोड़ियाँ लो।

(15, 48), (14, 63), (75, 120)

उदा . संख्या 15, 45 तथा 105 का लसावि तथा मसावि ज्ञात करो।

हल :

3	15	45	105
5	5	15	35
	1	3	7

$15 = \underline{3} \times \underline{5}$

$45 = \underline{3} \times 3 \times \underline{5}$

$105 = \underline{3} \times \underline{5} \times 7$

मसावि $= 3 \times 5 = 15$

लसावि $= 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

उदा. किन्हीं दो अंकी दो संख्यांओं का गुणनफल 1280 है। यदि उनका मसावि 4 हो तो लसावि ज्ञात करो।

हल : मसावि × लसावि = दी गई संख्याओं का गुणनफल

4 × लसावि = 1280

∴ लसावि $= \frac{1280}{4} = 320$

प्रश्नसंग्रह 13

1. लसावि ज्ञात करो।

(i) 12, 15 (ii) 6, 8, 10 (iii) 18, 32 (iv) 10, 15, 20 (v) 45, 86
(vi) 15, 30, 90 (vii) 105, 195 (viii) 12, 15, 45 (ix) 63, 81
(x) 18, 36, 27

2. नीचे दी गई संख्याओं का मसावि तथा लसावि ज्ञात करो। क्या उनका गुणनफल दी गई संख्याओं के गुणनफल के बराबर है, इसकी जाँच करो।

(i) 32, 37 (ii) 46, 51 (iii) 15, 60 (iv) 18, 63 (v) 78, 104

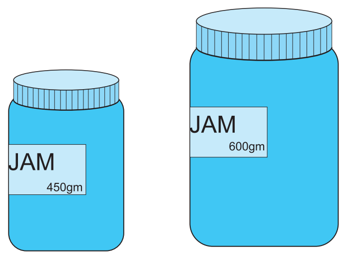
लसावि तथा मसावि का उपयोग

उदा. किसी दुकान में 450 ग्राम जैम की छोटी बोतल का मूल्य 96 रुपये है। उसी जैम के 600 ग्राम वजन वाली बड़ी बोतल का मूल्य 124 रुपये हैं तो बताओ कौन-सी बोतल लेना फायदेमंद होगा ?

हल : हमने ऐकिक नियम की विधि समझी है। उसके अनुसार प्रत्येक बोतल के 1 ग्राम जैम का मूल्य ज्ञात कर उनकी तुलना कर सकते हैं। छोटा सामान्य गुणनखंड लेने की बजाय बड़ा सामान्य गुणनखंड लिया जाए तो गणना आसान होती है।

450 तथा 600 का मसावि 150 हैं, इसका उपयोग करेंगे।

450 = 150 × 3, 600 = 150 × 4



∴ 150 ग्राम जैम वाली छोटी बोतल का मूल्य $\frac{96}{3}$ = 32 रुपये

150 ग्राम जैम वाली बड़ी बोतल का मूल्य $\frac{124}{4}$ = 31 रुपये

∴ 600 ग्राम जैम वाली बोतल खरीदना फायदेमंद होगा।

उदा. योगफल ज्ञात करो $\frac{17}{28} + \frac{11}{35}$ **विधि 1** : योगफल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हर समान करेंगे।

हल : $\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17 \times 35 + 11 \times 28}{28 \times 35} = \frac{595 + 308}{28 \times 35} = \frac{903}{28 \times 35} = \frac{903}{980} = \frac{129}{140}$

विधि 2 : योगफल ज्ञात करने के लिए 28 तथा 35 का लसावि ज्ञात करेंगे।

हल : लसावि = 7 × 4 × 5 = 140

$$\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17 \times 5}{28 \times 5} + \frac{11 \times 4}{35 \times 4} = \frac{85 + 44}{140} = \frac{129}{140}$$

संख्या के हर का गुणनफल ज्ञात करने की बजाय उनका लसावि ज्ञात करने से गणना आसान होती है !

उदा. किसी संख्या को क्रमशः 8, 10, 12, 14 इन संख्याओं से भाग देने पर हर बार 3 शेष बचता है तो वह छोटी-सी छोटी संख्या कौन-सी है ?

2	8	10	12	14
2	4	5	6	7
	2	5	3	7

हल : भाज्य संख्या ज्ञात करने के लिए भाजक संख्याओं का लसावि ज्ञात करेंगे।

लसावि = 2 × 2 × 2 × 5 × 3 × 7 = 840

प्राप्त लसावि में हर बार शेष बचने वाली संख्या जोड़ देते हैं।

वह संख्या = लसावि + शेष = 840 + 3 = 843

उदा. संख्याएँ 16,20,80 का लसावि ज्ञात करो।

4	16	20	80
4	4	5	20
5	1	5	5
	1	1	1

हल : 16 = 2 × 2 × 2 × 2

20 = 2 × 2 × 5

80 = 2 × 2 × 2 × 2 × 5

लसावि = 4 × 4 × 5 = 80

यहाँ मजेदार बात यह है कि 80 यह दी गई संख्याओं में से ही है।

अन्य संख्या 16 तथा 20 उसके विभाजक हैं।

ध्यान दो :

यदि दी गई संख्याओं में से सबसे बड़ी संख्या की विभाजक अन्य संख्याएँ हो तो वह बड़ी संख्या दी गई संख्याओं की लसावि होती है।

इस नियम के प्रतिपादन हेतु (18,90) (35,140,70) संख्यासमूहों की जाँच करो।

उदा. श्रेयस, शलाका और स्नेहल एक ही वृत्ताकार दौड़पट्टी पर एक ही स्थान से एक ही समय दौड़ना प्रारंभ करते हैं। वे वृत्ताकार दौड़पट्टी का एक चक्कर क्रमशः 16, 24 तथा 18 मिनिट में तय करते हैं तो कम-से-कम कितने समय बाद तीनों प्रारंभिक स्थान पर एक ही समय मिलेंगे ?

हल: जिस समय वे एक साथ मिलेंगे, वह समय 16, 24, तथा 18 की गुणावाली संख्या में होगा। वह समय कम-से-कम कितना होगा यह ज्ञात करने के लिए लसावि निकालेंगे।

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $\quad$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $\quad$ $18 = 2 \times 3 \times 3$

लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

वे तीनों 144 मिनिट या 2 घंटे 24 मिनिट बाद एक साथ मिलेंगे।

प्रश्नसंग्रह 14

1. उचित पर्याय चुनकर वाक्य पूर्ण लिखो।

   (i) 120 तथा 150 का मसावि .... होगा।

   (1) 30 (2) 45 (3) 20 (4) 120

   (ii) निम्नलिखित में से किन दो संख्याओं का मसावि 1 नहीं हैं ?

   (1) 13, 17 (2) 29, 20 (3) 40, 20 (4) 14, 15

2. मसावि तथा लसावि ज्ञात करो।

   (i) 14, 28 (ii) 32, 16 (iii) 17, 102, 170 (iv) 23, 69 (v) 21, 49, 84

3. लसावि ज्ञात करो।

   (i) 36, 42 (ii) 15, 25, 30 (iii) 18, 42, 48 (iv) 4, 12, 20 (v) 24, 40, 80, 120

4. किसी एक संख्या को 8, 9, 10, 15, 20 इन संख्याओं से भाग देने पर हर बार शेषफल 5 आता हैं तो वह छोटी-से-छोटी संख्या कौन-सी होगी ?

5. $\frac{348}{319}, \frac{221}{247}, \frac{437}{551}$ इन अपूर्णांकों को संक्षिप्त रूप दो।

6. किसी दो संख्याओं का लसावि तथा मसावि क्रमशः 432 तथा 72 है। उन दो संख्यांओं में से एक संख्या 216 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करो।

7. किसी दो अंकी दो संख्याओं का गुणनफल 765 और उनका मसावि 3 हो तो उनका लसावि ज्ञात करो।

8. किसी विक्रेता के पास 392 मीटर, 308 मीटर, 490 मीटर लंबाई वाले प्लास्टिक रस्सियों के तीन बंडल हैं। रस्सी शेष न रहे इस प्रकार से तीनों ही बंडल की रस्सियों के समान लंबाई वाले टुकड़े किए गए तो बताओ प्रत्येक टुकड़े की अधिकतम लंबाई कितनी हो सकती है ?

9*. दो क्रमिक सम संख्याओं का लसावि 180 हो तो वे संख्याएँ कौन-सी हैं ?

❑❑❑