

वर्ग एवं वर्गमूल

In Text Exercise

(पृष्ठ 36)

प्रश्न: निम्न संख्याओं एवं उनके वर्गों के तार में विचार कीजिए एवं रिक्त स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
1	$1 \times 1 = 1$	2	$2 \times 2 = 4$
3	$3 \times 3 = 9$	4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$	6
7	8
9	10

हल:

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
6	$6 \times 6 = 36$	7	$7 \times 7 = 49$
8	$8 \times 8 = 64$	9	$9 \times 9 = 81$
10	$10 \times 10 = 100$		

(पृष्ठ 37)

प्रश्न: नीचे 1 से 20 तक की संख्याओं की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

(i) उक्त तालिका में वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान को अंकों को समूह A के रूप में लिखिए।

$A = \{0, 1, 4, \dots\}$,

(ii) 0 से 9 के बीच के जो अंक समूह A में नहीं आए हैं।

उन्हें समूह B में लिखिए $B = \{2, 3, \dots\}$

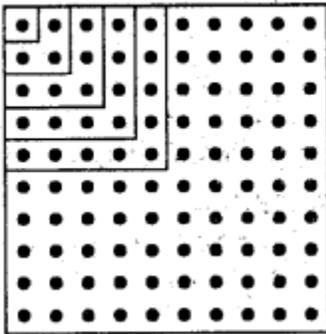
हल:

(i) $A = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$,

(ii) $B = \{2, 3, 7, 8\}$

(पृष्ठ 38)

प्रश्न: दिये चित्र में एक कोने से प्रारम्भ करते हुए विभिन्न आकार के, वर्ग बनाए गए हैं। इन वर्गों को ध्यान से देखिए तथा बिन्दुओं की संख्याएँ लिखिए



पहला वर्ग	1	=	1	=	1 ²
दूसरा वर्ग	1+3	=	4	=	2 ²
तीसरा वर्ग	1+3+5	=	9	=	3 ²
चौथा वर्ग	1+3+5+7	=	=
पाँचवाँ वर्ग	1+3+5+7+9	=	=
छठा वर्ग	=	=
सातवाँ वर्ग	=	=
आठवाँ वर्ग	=	=
नौवाँ वर्ग	=	=
दसवाँ वर्ग	=	=

हल:

वर्ग	बिन्दुओं की संख्याएँ
पहला वर्ग	1 = 1 = 1 ²
दूसरा वर्ग	1+3 = 4 = 2 ²
तीसरा वर्ग	1+3+5 = 9 = 3 ²
चौथा वर्ग	1+3+5+7 = 16 = 4 ²
पाँचवाँ वर्ग	1+3+5+7+9 = 25 = 5 ²
छठा वर्ग	1+3+5+7+9+11 = 36 = 6 ²
सातवाँ वर्ग	1+3+5+7+9+11+13 = 49 = 7 ²
आठवाँ वर्ग	1+3+5+7+9+11+13+15 = 64 = 8 ²
नौवाँ वर्ग	1+3+5+7+9+11+13+15 +17 = 81 = 9 ²
दसवाँ वर्ग	1+3+5+7+9+11+13+15 +17+19 = 100 = 10 ²

(पृष्ठ 39)

प्रश्न: 1, 11, 111,..... की वर्ग संख्या को देखें व खाली स्थान पूरा करें।

$$\begin{array}{ll} 1^2 = 1 & 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 & 1111^2 = 1234321 \\ 11111^2 = \dots\dots\dots & 111111^2 = \dots\dots\dots \end{array}$$

हल: $111111^2 = 123454321$
 $1111111^2 = 12345654321$

प्रश्न: दो क्रमागत संख्याएँ लिखिए, जैसे 4 व 5

उनके वाई करें $4^2 = 16, 5^2 = 25$
वर्गों को अन्तर $25 - 16 = 9$
संख्याओं को योग $4 + 5 = 9$
ऐसी कुछ और क्रमागत संख्याएँ लिखिए।

हल :

दो क्रमागत संख्याएँ व उनका वर्ग					संख्याओं का योग
पहली संख्या	वर्ग	दूसरी संख्या	वर्ग	वर्गों का अन्तर	
1	1	2	4	$4 - 1 = 3$	$1 + 2 = 3$
3	9	4	16	$16 - 9 = 7$	$4 + 3 = 7$
6	36	7	49	$49 - 36 = 13$	$7 + 6 = 13$
8	64	9	81	$81 - 64 = 17$	$8 + 9 = 17$

(पृष्ठ 40)

प्रश्न: 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं।

$$\begin{array}{l} 25 - 1 = 24 \\ 24 - 3 = 21 \\ 21 - 5 = 16 \\ 16 - 7 = 9 \\ 9 - 9 = 0 \end{array}$$

यहाँ 25 में से उत्तरोत्तर प्रारम्भिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है, इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है। अर्थात् $\sqrt{25} = 5$ इसी प्रकार कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं का इस प्रक्रिया से वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

हल: (i) माना पूर्ण वर्ग संख्या 16 लेते हैं तब यहाँ हमें विषम संख्याएँ चार बार घटानी पड़ी है।

16 - 1 = 15
15 - 3 = 12
12 - 5 = 7
7 - 7 = 0

अतः 16 का वर्गमूल = 4 $\therefore \sqrt{16} = 4$

(ii) माना पूर्ण वर्ग संख्या 9 लेते हैं तब यहाँ हमें विषम संख्या तीन बार घटानी पड़ी है।

9 - 1 = 8
8 - 3 = 5
5 - 5 = 0

अतः 9 का वर्गमूल = 3 या $\sqrt{9} = 3$

(iii) अब एक बड़ी संख्या माना 36 लेते हैं तब यहाँ हमें विषम संख्याएँ छः बार घटानी पड़ी हैं। अतः 36 का वर्गमूल = 6 या $\sqrt{36} = 6$

36 - 1 = 35
35 - 3 = 32
32 - 5 = 27
27 - 7 = 20
20 - 9 = 11
11 - 11 = 0

(पृष्ठ 47)

प्रश्न: निम्न सारणी पर विचार कीजिए

$$1^2 = 1$$

$$9^2 = 81$$

$$10^2 = 100$$

$$99^2 = 9801$$

$$100^2 = 10000$$

$$999^2 = 998001$$

- (i) 1 अंक वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक हैं ? 1 अथवा 2.
(ii) 2 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक हैं ? 3 अथवा 4
(iii) 3 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक हैं ?

हल: सारणी से स्पष्ट है कि

- (i) 1 अंक वाली संख्या 1 व 9 के बीच हो सकती है, जिनका वर्ग 1 व 81 है। अतः 1 अंक वाली संख्या का वर्ग 1 या 2 अंकों का हो सकता है।
(ii) 2 अंकों वाली संख्या 10 व 99 के बीच हो सकती है, जिनका वर्ग 100 व 9801 के बीच है। अतः 2 अंकों वाली संख्या का वर्ग 3 या 4 अंकों का हो सकता है।
(iii) इसी प्रकार, 3 अंकों वाली संख्या 100 व 999 के बीच हो सकती है, जिनका वर्ग 10000 व 998001 के बीच है। अतः 3 अंकों वाली संख्या का वर्ग 5 या 6 अंकों का हो सकता है।

करो और सीखो

(पृष्ठ 37)

प्रश्न: दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्या लिखिए

- (i) 20 व 30
(ii) 40 व 50

हल: (i) 25. (ii) 49

(पृष्ठ 37)

प्रश्न 1: इकाई के अंक के आधार पर यह बताइये निम्न में से कौन-कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है?

- (i) 2304,
(ii) 402,
(iii) 3003,
(iv) 100,
(v) 1008

हल: इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है। अतः (i) 402, (iii) 3003 व (v) 1008, पूर्ण वर्ग नहीं है।

प्रश्न 2: ऐसी तीन संख्याएँ बताइए जिनमें आप निश्चयपूर्वक कह सकते हैं कि वह पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।

- (i)
(ii)
(iii)

हल: (i) 101 (ii) 68 (iii) 3007

(पृष्ठ 40)

प्रश्न: नीचे तालिका को देखकर बताइये कि निम्न के वर्गमूल क्या होंगे?

- (i) 49
(ii) 64
(iii) 100

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

हल: (i) 7, (ii) 8, (iii) 10

(पृष्ठ 47)

प्रश्न: बताइए निम्न संख्याओं के वर्गमूल में कितने अंक होंगे।

- (i) 1369
(ii) 15376
(iii) 6031936

हल: (i) 2 अंक। (ii) 3 अंक। (iii) 4 अंक

नोट : इस तरह के सवालों को हल करने के लिए निम्न सारणी दी जा रही है

अंकों की संख्या	सबसे छोटी		सबसे बड़ी		निष्कर्ष (सदैव याद रखें)
	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	
1	1	1	9	81	1 से 81 तक की संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या एक है।
2	10	100	99	9801	100 से 9801 तक की संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या दो होती है।
3	100	10000	999	998001	10000 से 998001 तक की संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या तीन है।

Exercise 3.1

प्रश्न 1: निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

- (i) 24
- (ii) 17
- (iii) 100
- (iv) 55
- (v) 111
- (vi) 1023
- (vii) 5678
- (viii) 12796
- (ix) 2412

हल:

क्रम	संख्या	संख्या का वर्ग	वर्ग में इकाई का अंक
(i)	24	24×24	$4 \times 4 = 1\textcircled{6}$
(ii)	17	17×17	$7 \times 7 = 4\textcircled{0}$
(iii)	100	100×100	$0 \times 0 = \textcircled{0}$
(iv)	55	55×55	$5 \times 5 = 2$
(v)	111	111×111	$1 \times 1 = 2\textcircled{5}$
(vi)	1023	1023×1023	$3 \times 3 = \textcircled{1}$
(vii)	5678	5678×5678	$8 \times 8 = 6\textcircled{4}$
(viii)	12796	12796×12796	$6 \times 6 = 3\textcircled{6}$
(ix)	2412	2412×2412	$2 \times 2 = 4$

प्रश्न 2: नीचे दी गई संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।

- (i) 18
- (ii) 11
- (iii) 107
- (iv) 15
- (v) 200
- (i) 27

हल: (i) $18 = (18)^2 = 18 \times 18 = 324$
(ii) $11 = (11)^2 = 11 \times 11 = 121$
(iii) $107 = (107)^2 = 107 \times 107 = 11449$

- (iv) $15 = (15)^2 = 15 \times 15 = 225$
(v) $200 = (200)^2 - 200 \times 200 = 40000$
(vi) $27 = (27)^2 = 27 \times 27 = 729$

प्रश्न 3: निम्न में से कौन-कौन सी संख्याओं का वर्ग समसंख्या होगा

- (i) 235
(ii) 396
(iii) 5508
(iv) 2001
(v) 82003
(vi) 10224

हल: केवल सम संख्याओं का ही वर्ग सम होता है। अतः प्रश्न में दी संख्याओं में से निम्न का वर्ग सम होगा

- (ii) 396,
(iii) 5508,
(vi) 10224

प्रश्न 4: बिना संक्रिया किए निम्न का योग ज्ञात कीजिए।

- (i) $1 + 3 + 5 + 7$
(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$
(iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$

हल: जितनी संख्याएँ योग के लिए दी हैं, वह उतनी ही संख्या (क्रमानुसार) का वर्ग होता है।

- (i) $1 + 3 + 5 + 7 = 4$ संख्याओं का योग $= (4)^2 = 16$
(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7$ संख्याओं का योग $= (7)^2 = 49$
(iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$
 $= 10$ संख्याओं का योग $= (10)^2 = 100$

प्रश्न 5: संख्या 64 को आठ विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।

हल: $64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

प्रश्न 6: निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के बीच में कितनी संख्याएँ हैं ?

- (1) 10 व 11
(ii) 17 व 18
(ii) 30 व 31

- हल:** (i) $10 + 11 = 21$ संख्याएँ
(ii) $17 + 18 = 35$ संख्याएँ
(iii) $30 + 31 = 61$ संख्याएँ

प्रश्न 7: जाँच कीजिए कि दी गई तीन संख्याएँ पाइथागोरियन त्रिक है अथवा नहीं।
(i) 9, 12, 15
(ii) 7, 11, 13
(iii) 10, 24, 26

हल: (i) $(9)^2 + (12)^2 = 81 + 144 = 225 = (15)^2$
अतः $(9)^2 + (12)^2 = (15)^2$
अर्थात् 9, 12, 15 एक पाइथागोरियन त्रिक है।

(ii) $(7)^2 + (11)^2 = 49 + 121 = 170$
 $\therefore (7)^2 + (11)^2 \neq (13)^2$
अर्थात् 7, 11, 13 एक पाइथागोरियन त्रिक नहीं है।

(iii) $(10)^2 + (24)^2 = 100 + 576 = 676 = (26)^2$
 $\therefore (10)^2 + (24)^2 = (26)^2$
अर्थात् 10, 24, 26 एक पाइथागोरियन त्रिक है।

Exercise 3.2

प्रश्न 1: निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में इकाई का अंक क्या हो सकता है ?

- (i) 9604
(ii) 65536
(iii) 998001
(iv) 60481729

हल: (i) 9604 के वर्गमूल में इकाई के अंक = 2, 8
(ii) 65536 के वर्गमूल में इकाई के अंक = 4, 6
(iii) 998001 के वर्गमूल में इकाई के अंक = 1, 9
(iv) 60481729 के वर्गमूल में इकाई के अंक = 3, 7

प्रश्न 2: अनुमान लगाकर बताइए निम्नलिखित में कौन-कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती हैं ?

- (i) 48
- (ii) 81
- (iii) 102
- (iv) 24636

हल: (i) 48 (iii) 102 तथा (iv) 24636 पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।

प्रश्न 3: अभाज्य गुणनखण्डविधिद्वारावर्गमूल ज्ञात कीजिए।

- (i) 1296
- (ii) 729
- (iii) 1764
- (iv) 3969
- (v) 4356
- (vi) 1600

हल:

- (i) 1296

$$\therefore 1296 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$$

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$\text{अतः } \sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ = 36$$

- (ii) 729

$$\therefore 729 = \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$$

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 729 \\
 \hline
 3 & 243 \\
 \hline
 3 & 81 \\
 \hline
 3 & 27 \\
 \hline
 3 & 9 \\
 \hline
 3 & 3 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{729} = 3 \times 3 \times 3$
 $= 27$

(iii) 1764

$\therefore 1764 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 1764 \\
 \hline
 2 & 882 \\
 \hline
 3 & 441 \\
 \hline
 3 & 147 \\
 \hline
 7 & 49 \\
 \hline
 7 & 7 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7$
 $= 42$

(iv) 3969

$\therefore 3969 = \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 3969 \\
 \hline
 3 & 1323 \\
 \hline
 3 & 441 \\
 \hline
 3 & 147 \\
 \hline
 7 & 49 \\
 \hline
 7 & 7 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{3969} = 3 \times 3 \times 7$
 $= 63$

(v) 4356

$\therefore 4356 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{11 \times 11}$

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 4356 \\
 \hline
 2 & 2178 \\
 \hline
 3 & 1089 \\
 \hline
 3 & 363 \\
 \hline
 11 & 121 \\
 \hline
 11 & 11 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{4356} = 2 \times 3 \times 11$
 $= 66$

(vi) 1600

$\therefore 1600 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 5 \times 5$

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 1600 \\
 \hline
 2 & 800 \\
 \hline
 2 & 400 \\
 \hline
 2 & 200 \\
 \hline
 2 & 100 \\
 \hline
 2 & 50 \\
 \hline
 5 & 25 \\
 \hline
 5 & 5 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{1600} = 2 \times 2 \times 2 \times 5$
 $= 40$

प्रश्न 4: नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं। वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या बताइए जिससे गुणा करने पर ये पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएँगी।

(i) 252

(ii) 396

(iii) 1620

हल: (i) 252

$\therefore 252 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 7$

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 252 \\
 \hline
 2 & 126 \\
 \hline
 3 & 63 \\
 \hline
 3 & 21 \\
 \hline
 7 & 7 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अभाज्य गुणन संख्या 7 का जोड़ा

नहीं बन रहा है। अतः 7 का गुणा करने पर पूर्ण वर्ग संख्या बन जायेगी।

(ii) 396

$$\therefore 396 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 11$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 396 \\ \hline 2 & 198 \\ \hline 3 & 99 \\ \hline 3 & 33 \\ \hline 11 & 11 \\ \hline & 1 \end{array}$$

\therefore अभाज्य गुणनखण्ड में 11 से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग संख्या बन जायेगी।

(iii) 1620

$$\therefore 1620 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1620 \\ \hline 2 & 810 \\ \hline 3 & 405 \\ \hline 3 & 135 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

\therefore अभाज्य गुणनखण्ड में 5 से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग संख्या बन जायेगी।

प्रश्न 5: नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं। अभाज्य गुणनखण्ड करके पता लगाएँ कि इनमें किस संख्या का भाग दिया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी ?

(i) 1000

(ii) 867

(iii) 4375

हल:

(i) 1000

$$\therefore 1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$= \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5} \times 10$$

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 1000 \\
 \hline
 2 & 500 \\
 \hline
 2 & 250 \\
 \hline
 5 & 125 \\
 \hline
 5 & 25 \\
 \hline
 5 & 5 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः पूर्ण वर्ग संख्या बनाने के लिए 10 से भाग देना पड़ेगा।

(ii) 867

$$\therefore 867 = 3 \times 17 \times 17$$

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 867 \\
 \hline
 17 & 289 \\
 \hline
 17 & 17 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः पूर्ण वर्ग संख्या बनाने के लिए 3 से भाग देना पड़ेगा।

(iii) 4375

$$\therefore 4375 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 4375 \\
 \hline
 5 & 875 \\
 \hline
 5 & 175 \\
 \hline
 5 & 35 \\
 \hline
 7 & 7 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

अतः पूर्ण वर्ग संख्या बनाने के लिए।
7 से भाग देना पड़ेगा।

प्रश्न 6: एक वर्गाकार बाग में गलाब के पौधे लगाए जाने हैं। प्रत्येक पंक्ति में पौधों की संख्या उतनी है, जितनी कि पंक्तियों की संख्या। यदि बाग में 2401 पौधे लगे हों तो उसमें पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: बाग में कुल पौधों की संख्या = 2401

माना कि बाग में पंक्तियों की संख्या x है। प्रश्नानुसार प्रत्येक पंक्ति में पौधों की संख्या उतनी है जितनी कि पंक्तियों की संख्या।

$$\begin{aligned}
 x \times x &= 2401 \\
 &= \sqrt{7 \times 7 \times 7 \times 7} \\
 &= 7 \times 7 \\
 &= 49
 \end{aligned}$$

7	2401
7	343
7	49
7	7
	1

अतः पंक्तियों की संख्या = 49

प्रश्न 7: वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 4, 9 व 10 से पूर्णतः विभाजित हो।

हल: 4, 9 व 10 से विभाजित संख्या के लिए ल.स. ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् ल.स. का वह गुणज ज्ञात करेंगे जो पूर्ण वर्ग हो

$$4, 9, 10 \text{ का ल.स.} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$= 180$$

2	4, 9, 10
2	2, 9, 5
3	1, 9, 5
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

चूँकि 180 के गुणनखण्ड युग्मों में नहीं है।

अतः युग्म बनाने के लिए 5 से गुणा करना होगा।

$$5 \times 180 = 900 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

अतः 900 सबसे छोटी वर्ग संख्या है, जो 4, 9 व 10 से विभाजित होती है।

Exercise 3.3

प्रश्न 1: निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

- (i) 441
- (ii) 576
- (iii) 1225
- (iv) 2916
- (v) 4624
- (vi) 7921

हल: इकाई स्थान से प्रारम्भ करते हुए 2 – 2 अंकों का जोड़ा बनाएँगे।

- (i) 441

$$\begin{array}{r}
 21 \\
 2 \overline{) 441} \\
 +2 \quad 4 \\
 \hline
 41 \overline{) 41} \\
 \quad 41 \\
 \hline
 \quad \quad 0
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{441} = 21$

(ii) 576

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 2 \overline{) 576} \\
 +2 \quad 4 \\
 \hline
 44 \overline{) 176} \\
 \quad 176 \\
 \hline
 \quad \quad 0
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{576} = 24$

(iii) 1225

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 3 \overline{) 1225} \\
 +3 \quad 9 \\
 \hline
 65 \overline{) 325} \\
 \quad 325 \\
 \hline
 \quad \quad 0
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{1225} = 35$

(iv) 2916

$$\begin{array}{r}
 54 \\
 5 \overline{) 2916} \\
 +5 \quad 25 \\
 \hline
 104 \overline{) 416} \\
 \quad 416 \\
 \hline
 \quad \quad 0
 \end{array}$$

अतः $\sqrt{2916} = 54$

(v) 4624

$$\begin{array}{r} 68 \\ 6 \overline{)4624} \\ +6 \quad 36 \\ \hline 128 \overline{)1024} \\ - \quad 1024 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः $\sqrt{4624} = 68$

(vi) 7921

$$\begin{array}{r} 89 \\ 8 \overline{)7921} \\ +8 \quad 64 \\ \hline 169 \overline{)1521} \\ - \quad 1521 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः $\sqrt{7921} = 89$

प्रश्न 2: निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल बिना गणना के ज्ञात कीजिए।

(i) 121

(ii) 256

(iii) 4489

(iv) 60025

हल: सबसे पहले संख्या के इकाई के अंक की सहायता से, निम्न सारणी का प्रयोग करके वर्गमूल के इकाई का अंक ज्ञात करेंगे

दी संख्या का इकाई अंक	दी गई संख्या के वर्गमूल के इकाई का सम्भावित अंक
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

(i) 121

∴ इसके इकाई कम अंक = 1

∴ इसके वर्गमूल के इकाई का अंक = 1 या 9
21 को छोड़ने पर, शेष अंक = 1
∴ $1^2 = 1 < 2^2$
अतः 121 का मान 112 होगा
⇒ $\sqrt{121} = 11$

(ii) 256
∴ इसके इकाई का अंक = 6
∴ इसके वर्गमूल के इकाई का अंक = 4 या 6
56 को छोड़ने पर, शेष अंक = 2
∴ $1^2 < 2^2 < 2^2$
इसलिए 256 का मान होगा = 14^2 या 16^2
∴ $15^2 = 225$
∴ $\sqrt{256} = 16$

(iii) 4489
∴ इसके इकाई का अंक = 9
∴ इसके वर्गमूल के इकाई का अंक = 3 या 7
89 को छोड़ने पर, शेष अंक = 44
∴ $6^2 < 44 < 7^2$
अतः 4489 का मान होगा = 63^2 या 67^2
∴ $65^2 = 4225$
∴ $\sqrt{4489} = 67$

(iv) 60025
∴ इसके इकाई का अंक = 5
∴ इसके वर्गमूल के इकाई का अंक = 5
25 को छोड़ने पर, शेष अंक = 600
∴ $24^2 < 600 < 25^2$
अतः 60025 का मान होगा 245^2 होगा।
∴ $\sqrt{60025} = 245$

प्रश्न 3: निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

- (i) 6.25
- (ii) 2.89
- (iii) 32.49
- (iv) 31.36
- (v) 57.76

हल:

(i) 6.25.

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ 2 \overline{) 6.25} \\ +24 \\ \hline 45 \overline{) 225} \\ -225 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः $\sqrt{6.25} = 2.5$

(ii) 2.89

$$\begin{array}{r} 1.7 \\ 1 \overline{) 2.89} \\ +11 \\ \hline 27 \overline{) 189} \\ -189 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः $\sqrt{2.89} = 1.7$

(iii) 32.49

$$\begin{array}{r} 5.7 \\ 5 \overline{) 32.49} \\ +525 \\ \hline 107 \overline{) 749} \\ -749 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः $\sqrt{32.49} = 5.7$

(iv) 31.36

$$\begin{array}{r} 5.6 \\ 5 \overline{) 31.36} \\ +525 \\ \hline 106 \overline{) 636} \\ -636 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः $\sqrt{31.36} = 5.6$

(v) 57.76

$$\begin{array}{r} 7.6 \\ 7 \overline{)57.76} \\ +7 \quad 49 \\ \hline 146 \quad 876 \\ - \quad 876 \\ \hline 0 \end{array}$$

अतः $\sqrt{57.76} = 7.6$

प्रश्न 4: निम्न संख्याओं में क्या जोड़ा जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।

- (i) 420
- (ii) 2000
- (iii) 837
- (iv) 3500

हल: (i) हम देखते हैं कि 420 पूर्ण वर्ग संख्या (400) से 20 अधिक है।
अतः 420 में से 20 घटाने पर हमें पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जायेगी।

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \overline{)420} \\ 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

$\therefore 420 - 20 = 400 \Rightarrow \sqrt{400} = 20$

अतः 420 में जोड़ने से पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो, तो 20 के स्थान पर 21 वर्ग पर विचार करेंगे जो कि $(21)^2 = 441$

अतः हम $441 - 420 = 21$ जोड़ना होगा।

(ii) हम देखते हैं कि 2000 पूर्ण वर्ग संख्या से 64 अधिक है।

$\therefore 2000 - 64 = 1936$

$\sqrt{1936} = 44$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 4 \overline{)2000} \\ +4 \quad 16 \\ \hline 84 \quad 400 \\ - \quad 336 \\ \hline 64 \end{array}$$

पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात करने के लिए $= 44 + 1 = 45$ के वर्ग पर विचार करेंगे।

$$(45)^2 = 2025$$

अतः हम $2025 - 2000 = 25$ जोड़ना होगा।

(iii) हम देखते हैं कि 837 पूर्ण वर्ग संख्या से 53 अधिक है।

$$\therefore 837 - 53 = 784$$

$$\sqrt{784} = 28$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 2 \overline{) 837} \\ +2 \quad 4 \\ \hline 48 \quad 437 \\ - \quad 384 \\ \hline \quad \quad 53 \end{array}$$

पूर्ण वर्ग संख्या बनाने के लिए $= 28 + 1 = 29$ के वर्ग पर विचार करेंगे

$$(29)^2 = 841$$

अतः हम $841 - 837 = 4$ जोड़ना होगा।

(iv) 3500

हम देखते हैं कि 3500 पूर्ण वर्ग
53500 संख्या से 19 अधिक है।

$$\therefore 3500 - 19 = 3481$$

$$\sqrt{3500} = 59$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ 5 \overline{) 3500} \\ +5 \quad 25 \\ \hline 109 \quad 1000 \\ - \quad 981 \\ \hline \quad \quad 19 \end{array}$$

पूर्ण वर्ग संख्या बनाने के लिए $= 59 + 1 = 60$ के

वर्ग पर विचार करेंगे $(60)^2 = 3600$

अतः $3600 - 3500 = 100$ जोड़ना होगा।

प्रश्न 5: निम्न संख्याओं में से क्या घटाया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।

(i) 555

(ii) 252

(iii) 1650

(iv) 6410

हल: (i) 555

घटाई जाने वाली संख्या 26 है।

$$\begin{array}{r} 23 \\ 2 \overline{) 555} \\ +2 \quad 4 \\ \hline 43 \overline{) 155} \\ - \quad 129 \\ \hline 26 \end{array}$$

(ii) 252

घटाई जाने वाली संख्या 27 है।

$$\begin{array}{r} 15 \\ 1 \overline{) 252} \\ +1 \quad 1 \\ \hline 25 \overline{) 152} \\ - \quad 125 \\ \hline 27 \end{array}$$

(iii) 1650

घटाई जाने वाली संख्या 50 है।

$$\begin{array}{r} 40 \\ 4 \overline{) 1650} \\ +4 \quad 16 \\ \hline 8 \overline{) 50} \end{array}$$

(iv) 6410

घटाई जाने वाली संख्या 10 है।

$$\begin{array}{r} 80 \\ 8 \overline{) 6410} \\ +8 \quad 64 \\ \hline 16 \overline{) 10} \end{array}$$

प्रश्न 6: एक विवाह समारोह में वर्गाकार जमावट में कुर्सियाँ लगायीं जानी हैं। 1000 कुर्सियाँ उपलब्ध हैं। वर्गाकार जमावट के लिए और कितनी कुर्सियों की आवश्यकता होगी। साथ ही यह भी बताएँ, प्रत्येक पंक्ति में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी।

हल: कुल कुर्सी = 1000

1000 पूर्ण वर्ग संख्या से 39 अधिक है।

$$\therefore 1000 - 39 = 961$$

$$\therefore \sqrt{961} = 31$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 3 \overline{)1000} \\ +3 \quad 9 \\ \hline 61 \overline{)100} \\ \quad 61 \\ \hline \quad \quad 39 \end{array}$$

वर्गाकार जमावट में और आवश्यक कुर्सियों की संख्या

$$= (32)^2 - 1000 = 1024 - 1000 = 24$$

$$\text{प्रत्येक पंक्ति में कुर्सियों की संख्या} = 31 + 1 = 32$$

प्रश्न 7: एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 361 मी² है तो उस खेत के चारों ओर तारबंदी हेतु कितने मीटर तार की आवश्यकता होगी ?

हल:

$$\text{वर्गाकार खेत का क्षे.} = 361 \text{ मीटर}^2$$

$$\therefore \text{वर्गाकार खेत की भुजा} = \sqrt{361} = 19 \text{ मी.}$$

$$\text{अतः चारों ओर आवश्यक तार की लम्बाई} = 4 \times 19$$

$$= 76 \text{ मीटर}$$

प्रश्न 8: वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण 21176 वर्ग बन जाए ?

हल: 2352 अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

$$\therefore 2352 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 3$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)2352} \\ 2 \overline{)1176} \\ 2 \overline{)588} \\ 2 \overline{)294} \\ 3 \overline{)147} \\ 7 \overline{)49} \\ 7 \overline{)7} \\ \hline 1 \end{array}$$

अतः 3 से भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जायेगा।

Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1: बिना संक्रिया किये योग ज्ञात कीजिए $- 1 + 3 + 5$

- (A) 9
- (B) 8
- (C) 7
- (D) 6

प्रश्न 2: 144 का वर्गमूल क्या है ?

- (A) 13
- (B) 12
- (C) 10
- (D) 8

प्रश्न 3: 11 का वर्ग क्या है ?

- (A) 121
- (B) 122
- (C) 123
- (D) 124

प्रश्न 4: निम्न में से पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है

- (A) 625
- (B) 100
- (C) 441
- (D) 449

प्रश्न 5: यदि $\sqrt{3} = 1.732$ हो तो $\frac{1}{\sqrt{3}}$ का मान क्या है।

- (A) 0.617
- (B) 0.313

- (C) 0.577
(D) 0.173

प्रश्न 6: 7921 का वर्गमूल होगा

- (A) 89
(B) 88
(C) 70
(D) 8

प्रश्न 7: $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ का मान होगा।

- (A) $\sqrt{1\frac{3}{4}}$
(B) $\sqrt{1\frac{1}{4}}$
(C) 1125
(D) इनमें से कोई नहीं

प्रश्न 8: 216 को किस छोटी से छोटी संख्या से भाग दें कि भागफल एक पूर्ण वर्ग हो ?

- (A) 3
(B) 4
(C) 6
(D) 9

उत्तरमाला:

1. (A), 2. (B), 3. (A), 4. (D), 5. (C), 6. (A), 7. (B), 8. (C)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

- (i) $1 + 3 + \dots + 7 = 16$
(ii) 4 का वर्ग
(iii) 64 का वर्गमूल =
(iv) वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।
(v) $41^2 - 40^2 = \dots$
(vi) n^2 और के बीच $(2n + 1)$ संख्याएँ होती हैं।

उत्तर:

(i) 5, (ii) 16, (iii) 8, (iv) वर्गमूल, (v) 81, (vi) $(n + 1)^2$

सत्य/असत्य

(i) 2 का वर्ग = 8

(ii) 64 का वर्गमूल = 8

(iii) 10 व 11 के बीच 21 संख्याएँ हैं।

(iv) 56 का वर्ग 3236 है।

(v) 25 का वर्गमूल 5 है।

उत्तर:

(i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) सत्य।

अति लघुत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1: 144 का वर्गमूल भाग विधि से बताइए।

हल: अतः 144 का वर्गमूल = 12

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1 \overline{) 144} \\ \underline{+1} \\ 22 \\ \underline{-} \\ 0 \end{array}$$

प्रश्न 2: क्या 9, 40, 41 पाइथागोरियन त्रिक है ?

हल:

$$(9)^2 + (40)^2 = 81 + 1600 = 1681 = (41)^2$$

$$\text{अतः } (9)^2 + (40)^2 = (41)^2$$

9, 40, 41 पाइथागोरियन त्रिक है।

लघु/दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1: 3986 को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए सबसे छोटी कौनसी संख्या जोड़ी जाए।

हल:

$$\sqrt{3986} = 63.14$$

$$\therefore \text{अभीष्ट संख्या} = (64)^2 - 3986 = 4096 - 3986 \\ = 110 \text{ जोड़ी जाए।}$$

प्रश्न 2: $\sqrt{248 + \sqrt{51 + \sqrt{169}}}$ का मान बताओ।

हल:

$$\begin{aligned} & \sqrt{248 + \sqrt{51 + \sqrt{169}}} \\ & \therefore \sqrt{248 + \sqrt{51 + 13}} = \sqrt{248 + \sqrt{64}} \\ & = \sqrt{248 + 8} = \sqrt{256} = 16. \end{aligned}$$

प्रश्न 3: एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 1089 मी^2 है तो मैदान की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल: वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = 1089 मी^2

इसलिए मैदान की भुजा = 1089

$$\text{अतः} = \sqrt{1089} = 33 \text{ मी}$$

अतः मैदान की भुजा = 33 मी

प्रश्न 4: वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 1989 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए तथा उसे पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

हल: 1989 का वर्गमूल करने पर यहाँ हम देखते हैं कि 1989 पूर्ण वर्ग संख्या से 53 अधिक है।

अतः 1989 में से 53 घटाने पर हमें पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाएगी।

$$\begin{array}{r} 44 \\ 4 \overline{)1989} \\ +4 \overline{)16} \\ \hline 84 \overline{)389} \\ +4 \overline{)336} \\ \hline \underline{\quad} 53 \end{array}$$

$$1989 - 53 = 1936$$

जिसका वर्गमूल $1936 = 44$ होगा।

इसी प्रकार यदि हमें वह संख्या ज्ञात करनी है जिसे 1989 में जोड़ने से पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो तो हम 44 के स्थान पर 45^2 के वर्ग पर विचार करेंगे जो कि $45^2 = 2025$ है।

अतः हमें $2025 - 1989 = 36$ जोड़ना होगा।