फलनों के अवकलज का बीजगणित

(Algebra of derivative of functions)

हम फलन की सीमा को जानते हैं तथा अवकलज की परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों में सीमा के नियमों की निकटता महसूस करते हुए निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण प्रमेयों को स्थापित करने की कोशिश करते हैं-

प्रमेय 1: मानलिया कि f और g दो दिए गए फलन हैं जिनके उभयनिष्ठ प्रांत (Domain) में उनके अवकलन (Differentiation) परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx(g(x))}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx(f(x)+g(x))}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$$

(ii) दो फलनों के अन्तर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अन्तर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) =\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$= f'(x) - g'(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज उनमें से एक के अवकलज तथा दूसरे फलन का गुणनफल और दूसरे का अवकलज और पहले फलनव के गुणनफल का योगफल होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}(g(x))$$

यहाँ हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) = f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्न नियम द्वारा किया जाता है जहाँ हर शून्येतर है।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}((f(x))\cdot g(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

आइए, इसे हम देखते हैं

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x) - f(x)(g(x+h)-g(x))}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))g(x) - gf(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{\lim_{h\to 0} g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(f(x))g(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

(v) अचल फलन का अवकलज शून्य के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

मानलिया कि $f(x)=c$ एक अचल फलन है, तो

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{0}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to0}(0)=0$$

आइए, हम कछ मानक फलनों के अवकलजों को निकालें, फलन $f(x)=x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

परिभाषा से

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}(1)=1$$

इस अवधारणा का प्रयोग कर हम $f(x)=x^n$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम देखते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(x^n)=\frac{d}{dx}(x\cdot x^{n-1})=\frac{d}{dx}(x)\cdot x^{n-1}+x\cdot\frac{d}{dx}(x^{n-1}),$$

$$=1\cdot x^{n-1}+x\cdot(n-1)x^{n-2}$$, आगमन परिकल्पना से

अतः $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

(ii) अब $f(x)=e^x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right)$$

$$=e^x\lim_{h\to0}\frac{1+\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1\cdot2}+\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\ldots-1}{h}$$

(फलन को विस्तार में अनन्त श्रेणी के रूप में

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n} + \ldots\ldots$$

अभिव्यक्त किया जाता है जिसे हम अगली कक्षा में जान सकेंगे।)

$$= e^x \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{1\cdot 2} + \frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

(iii) $f(x) = \log_e x$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{x^4} + \ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{h^3}{x^4} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

नोट: फलन $\log(1+x)$ श्रेणी विस्तार के रूप में

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$$

लिखा जाता है, जिसके बारे में अगामी कक्षा में हम जान सकेंगे।

आइए, अब कुछ मानक फलनों के अवकलज को सारणी मे लिखते हैं जिसके उपयोग से विभिन्न फलनों के अवकलज ज्ञात किया जा सकता है।

	मानक फलन	अवकलज
(i)	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$

$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$

मानक फलन		अवकलज
(ii)	e^x	e^x
(iii)	$\log_e x$	$\frac{1}{x}$
(iv)	x^n	nx^{n-1}
(v)	अचलफलन	0

उपर्युक्त मानक फलनों के अवकलज को ध्यान में रखकर फलनों के अवकलज का बीजगणितीय सूत्रों द्वारा विभिन्न फलनों का अवकलज हम निकाल सकते हैं।

उदाहरण 1: $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ अवकलज ज्ञात करें।

हल: हम देखते हैं कि

फलन $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ दो फलनों $\cos x$ और $1+\sin x$ के भाग के रूप में व्यक्त किया है। अत: फलनों के अवकलज नियम के अनुसार

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(\cos)\cdot(1+\sin x)-\cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot(0+\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)$$

उदाहरण 2: फलन $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\frac{x^{98}}{98}+......+\frac{x^2}{2}+x+1$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योगफल होता है। अत:

$$\frac{d}{dx}(f(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\frac{x^{98}}{98}......\frac{x^2}{2}+x+1\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{100}}{100}\right)+\frac{d}{dx}\frac{\left(x^{99}\right)}{99}+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{98}}{98}\right)+.....+\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{d}{dx}(x)$$

$$=\frac{100x^{99}}{100}+\frac{99x^{98}}{99}+\frac{98^{97}}{98}+....+\frac{2x}{2}+1$$

$$=1+x+x^2+x^3+....+x^{98}+x^{99},$$

$$=\frac{x^{100}-1}{x-1}$$

उदाहरण 3: फलन $f(x)=\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$ का अवकलज इसके परिभाषित क्षेत्र में ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया फलन भागफल के रूप में व्यक्त किया गया है। अत: अवकलज के भागफल नियम के प्रयोग करने पर,

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(px+q)\cdot(ax^2+bx+c)-(px+q)\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{(ax^2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\left(p\frac{dx}{dx}+\frac{d}{dx}(q)\right)\cdot(ax^2bx+c)-(px+q)\left(\frac{dax^2}{dx}+\frac{dbx}{dx}+\frac{dc}{dx}\right)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(p+o)(ax^2+bx+c)-(px+q)(2ax+b+o)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{(apx^2+bpx+cp)-(2apx^2+bpx+2aqx+bq)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{-apx^2-2aqx+cp-bq}{(ax^2+bx+c)^2}$$

उदाहरण 4: फलन $f(x)=\dfrac{\sin(x+\alpha)}{\cos x}$, जहाँ कहीं भी परिभाषित है, अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि

$$\text{फलन } f(x) = \frac{\sin(x+\propto)}{\cos x} = \frac{\sin x \cos \propto + \cos x \sin \propto}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x \cos \propto}{\cos x} + \frac{\cos x \sin \propto}{\cos x}$$

$$= \tan x \cos \propto + \sin \propto$$

हम फलन $f(x) = \tan x \cos \propto + \sin \propto$ पर योग प्रमेय का प्रयोग करने पर पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\tan x \cos \propto + \sin \propto)$$

$$= \frac{d}{dx}(\tan x \cos \propto) + \frac{d}{dx}(\sin \propto)$$

$$= \frac{d}{dx}(\tan x)\cdot \cos \propto + \tan x \cdot \frac{d}{dx}(\cos \propto) + \frac{d}{dx}(\sin \propto)$$

$$= \sec^2 x \cos \propto + \tan x \cdot o + o$$

$$= (\sec^2 x)(\cos \propto)$$

उदाहरण 5: फलन $f(x) = (x+\sec x)(x-\tan x)$ का अवकलज, फलन के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर

हल: अवकलज के गुणनफल प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\{(x+\sec x)\cdot(x-\tan x)\}$$

$$= \frac{d}{dx}(x+\sec x)\cdot(x-\tan x) + (x+\sec x)\frac{d}{dx}(x-\tan x)$$

$$= \left(\frac{dx}{dx} + \frac{d\sec s}{dx}\right)(x-\tan s) + (x+\sec x)\left(\frac{dx}{dx} - \frac{d\tan x}{dx}\right)$$

$$= (1+\sec x \tan x)(x-\tan x) + (x+\sec x)(1-\sec^2 x)$$

प्रश्नावली-6

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाय कि a,b,c,d,p,q,r निश्चित शून्येतर अचर है और m तथा n पूर्णांक हैं।)

1. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ 2. $\dfrac{1}{px^2+qx+r}$ 3. $\dfrac{px+q}{ax+b}$

4. $\dfrac{\cos(x+d)}{\sin x}$ 5. $\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$ 6. $\tan x\cos x$

7. $\dfrac{\cos x}{xin^2 x}$ 8. $\dfrac{a}{x^4}-\dfrac{b}{x^2}+\tan x$ 9. $(ax+b)^m(cx+d)^n$

10. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ 11. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$ 12. $5\sqrt{x}-7$

13. $\cos(x-\frac{\pi}{8})$ 14. $\dfrac{x}{\sin x}$ 15. $\dfrac{4x+5\cos x}{3x+7\sin x}$

16. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ 17. $\dfrac{x^3-\cos x}{\sin x}$ 18. $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$

19. $3\cot x+5\cos ecx$ 20. $2\tan s-7\sec x$ 21. $2x-\dfrac{3}{5}$

22. $(5x^3+3x-1)(x^2-1)$ 23. $(ax^2+b)^2$ 24. $(x-p)(x-q)$

25. $\dfrac{x-p}{x-q}$ 26. $5\sec x+4\cos x$ 27. $x^{-4}(5x-3)$

28. $\sin^2 x$ 29. $\cos^2 x$ 30. $\tan^2 x$

31. $\sin(x+a)\cos(x+b)$ 32. $\cos(x+p)\cos(x+q)$ 33. $\dfrac{\tan(x+a)}{\tan(x+b)}$

34. $\sin^n x$ 35. $\dfrac{x}{\sin^n x}$ 36. $x^m cox^n x$

37. $e^x\cdot\log_e x$ 38. $e^x\cos x$ 39. $e^{-x}\sin x$

40. $e^{ax}\sin bx$ 41. $\dfrac{x}{\log_e x}$ 42. $\dfrac{loo_e x}{e^x}$

43. $x^n\dfrac{1}{x^n}$ 44. $\dfrac{x+\sin x}{\cot x}$ 45. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x^2}{3x-1}$

2.5 समाकलन (Integrals)

[भू]मिका (Introduction):

हम किसी वास्तविक फलन के अवकलज के संबंध में जान चुके हैं, जैसे एक [वा]स्तविक फलन f जो $f(x)=x^3$ से परिभाषित है, तो इसका अवकलज (*derivative*) [f]$'(x)=3x^2$ होता है। इसी प्रकार $f(x)=\sin x$ है, तो $f'(x)=\cos x$ होता है।

अब प्रश्न उठता है कि जब $f'(x)=3x^2$ या $f'(x)=\cos x$ है, तो क्या हम [f](x) के लिए $f'(x)$, x के सापेक्ष अवकलज कहलाता है तो $f(x)$, $f'(x)$ के लिए [क्]या होगा?

क्या हम $f'(x)=3x^2$ से $f(x)=x^3$. ज्ञात कर सकते हैं? $f'(x)=\cos x$ से $f(x)=\sin x$ प्राप्त कर सकते हैं?

हाँ, तो वैसी प्रक्रिया जिससे यदि एक फलन f किसी अंतराल में अवकलनीय [अ]र्थात् $f'(x)$ उस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अस्तित्व में है, तो फलन $f(x)$, फलन $f'(x)$ का प्रति अवकलज (*Anti derivative*) कहलाता है। जहाँ $f'(x)$, $f(x)$ का [अ]वकलज (*derivative*) है।

वह विधि जिससे किसी फलन का प्रतिअवकलज ज्ञात किया जाता है, उसे हम [स]माकलन (Integration) कहते हैं।

इस अध्याय में हम समाकलन की संक्षिप्त जानकारी प्राप्त करेंगे। विस्तृत जानकारी [ह]म अगली कक्षा में लेंगे। समाकलन का उपयोग निश्चित फलन के आलेख से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में किया जाता है।

समाकलन या प्रति-अवकलन ज्ञात करने की विधि:

ऊपर हम देख चुके हैं कि किसी फलन का अवकलज ज्ञात रहने पर उस फलन को ज्ञात करने की विधि (Process) समाकलन या प्रति-अवकलन कहलाता है।

हम जानते हैं कि फलन $\sin x$ का अवकलज $\cos x$ है, तो $\cos x$ का समाकलन या प्रति-अवकलज $\sin x$ है।

इसी प्रकार,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)=x^3$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=sec^2x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

में हम कह सकते हैं कि फलनों $\frac{x^4}{4}, log_e x, \tan x$ और e^x का अवकलज क्रमशः x^3, $\frac{1}{x}$, $\sec^2 x$ और e^x का समाकलज (प्रति-अवकलज) क्रमशः $\frac{x^4}{4}, \log_e x, \tan x$ और e^x है।

अतः अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम को समाकलन कहते हैं (Integration is the inverse process of differentiation) ।

हम जानते हैं कि किसी भी वास्तविक संख्या c, जिसे अचर फलन (constant function) माना जाता है, का अवकलज शून्य होता है, इसलिए उपर्युक्त अवकलन समीकरणों को भिन्न रूप में लिखा जा सकता है-

$\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x \Rightarrow \cos x$ का समाकलज $\sin x+c$ है।

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}+c\right)=x^3 \quad \Rightarrow x^3$ का समाकलज $\frac{x^4}{4}+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\log_e x+c)=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{1}{x}$ का प्रतिअवकलज $\log_e x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \Rightarrow sec^2x$ का प्रतिअवकलज $\tan x+c$ है।

$\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \quad \Rightarrow e^x$ का प्रतिअवकलज e^x+c है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त फलनों के समाकलन या प्रतिअवकलज अद्वितीय नहीं है अर्थात् $\cos x$ का प्रतिअवकलज $\sin x, \sin x+1, \sin x+2, \sin x+3, \sin x$

$+\frac{1}{4}, \sin x-6,$ ....कुछ भी हो सकता है।

अतः हम कह सकते हैं कि $\cos x$ का प्रतिअवकलज $\sin x+C$ जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि यदि एक फलन f ऐसा है कि-

$\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$, जहाँ $x \in I$ (वास्तविक संख्याओं का अन्तराल)

तो प्रत्येक स्वेच्छ अचर C के लिए

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x), x \in I$$

इस प्रकार $\{f(x)+C, C \in R\}, g$ के प्रति अवकलजों के परिवार को व्यक्त करता है जहाँ C समाकलन का अचर कहलाता है। संकेत में इसे हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं:-

$$\frac{d}{dx}(f(x)+C)=g(x) \Leftrightarrow \int g(x)dx=f(x)+C$$

जहाँ $\int g(x)dx$ का अर्थ $g(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन है तथा $\int g(x)dx$ में $g(x)$ को समाकल्य कहते हैं।

फलनों के प्रमाणिक समाकलन (प्रतिअवकलज):

हम प्रमुख फलनों के अवकलजों के सूत्र जानते हैं। इन सूत्रों के संगत समाकलन के प्रमाणिक सूत्रों को लिखा जा सकता है जिसकी सहायता से दूसरे फलनों के समाकलनों को ज्ञात करने में मदद मिलेगी।

अवकलज (Derivatives)	समाकलन (प्रतिअवकलज): Integrals (Antiderivatives)
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)=x^n$	$\Rightarrow \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1$
(ii) $\frac{d}{dx}(x+c)=1$	$\Rightarrow \int dx=x+c$
(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+c\right)=(ax+b)^n$	$\Rightarrow \int (ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a}+c, n \neq -1$
(iv) $\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x$	$\Rightarrow \int \cos x=\sin x+c$

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(ax+b)}{a}+c\right)=\cos(ax+b) \Rightarrow \int\cos(ax+b)dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+c$

(vi) $\frac{d}{dx}(-\cos x+c)=\sin x \quad \Rightarrow \int\sin dx=-\cos x+c$

(vii) $\frac{d}{dx}-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c=\sin(ax+b) \Rightarrow \int\sin(ax+b)dx=-\frac{\cos(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$

(viii) $\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x \quad \Rightarrow \int\sec^2 x dx=\tan x+c$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan(ax+b)}{a}+c\right)=\sec^2(ax+b) \Rightarrow \int\sec^2(ax+b)dx=\frac{\tan(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$

(x) $\frac{d}{dx}(-\cot x+c)=\cos ec^2 x \Rightarrow \int\cos ec^2 x\, dx=-\cot x+c$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c\right)=\cos ec^2(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\cos ec^2(ax+b)dx=-\frac{\cot(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xii) $\frac{d}{dx}(\sec x+c)=\sec x\tan x \Rightarrow \int\sec x\tan x\, dx=\sec x+c$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{sec(ax+b)}{a}+c\right)=\sec(ax+b)\tan(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\sec(ax+b)\tan(ax+b)x=\frac{\sec(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xiv) $\frac{d}{dx}(-\cos ecx+c)=\cos ec\, x\cot x \Rightarrow \int\cot x\, \cos ec\, x\, dx=-\cos ec\, x+c$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos ec(ax+b)}{a}+c\right)=\cos ec(ax+b)\cot(ax+b)$

$$\Rightarrow \int\cos ec(ax+b)\cot(ax+b)\cdot dx=\frac{-\cos ec(ax+b)}{a}+c, a\neq 0$$

(xvi) $\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x \quad \Rightarrow \int e^x dx=e^x+c$

(xvii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax+b}}{a}+c\right)=e^{ax+b} \quad \Rightarrow \int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$

(xviii) $\frac{d}{dx}(\log_e|x|+c)=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx=\log_e|x|+c$

(xix) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\log_e|ax+b|}{a}+c\right)=\dfrac{1}{(ax+b)} \Rightarrow \int\dfrac{1}{(ax+b)}dx=\dfrac{1}{a}\log_e(|ax+b|)+c, a\neq 0$

(xx) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{5^x}{\log_e 5}+c\right)=5^x \qquad \Rightarrow \int 5^x dx=\dfrac{5^x}{\log_e^5}+c$

(xxi) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a^x}{\log_e a}+c\right)=a^x \quad \Rightarrow \int a^x dx=\dfrac{a^x}{\log_e a}+c, a>0, a\neq 1$

उपर्युक्त सूत्रों में उस अन्तराल का जिक्र नहीं किया गया है जिसमें विभिन्न फलन परिभाषित हैं परन्तु किसी भी विशिष्ट फलन के संदर्भ में इसे ध्यान में रखना आवश्यक होगा।

समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some properties of integrals):

हम समाकलन के कुछ गुणधर्मों को जानेंगे जिसके आधार पर समाकलन के प्रक्रम को अपनायेंगे।

(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

और $\int f'(x)dx=f(x)+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

(iii) किसी वास्तविक संख्या k के लिए $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

उदाहरण 1: निरीक्षण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int x^4 dx$

(ii) $\int(3x^2+4x^3)dx$

(iii) $\int \sec^2 2x\, dx$

(iv) $\int \sin 3x\, dx$

(v) $\int e^{3x-5}dx$

हल: (i) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज x^4 है।

हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(x^5)=5x^4$$

अर्थात $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5\right)=x^4$

$\Rightarrow$ फलन $\frac{x^5}{5}$ का अवकलज x^4, अतः x^4 का

प्रतिअवकलज $\frac{x^5}{5}+c$ है।

$\Rightarrow \int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+c$

(ii) हमें एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $3x^2+4x^3$ है।

हम देखते है कि-

$$\frac{d}{dx}(x^3+x^4)=3x^2+4x^3$$

अर्थात् फलन x^3+x^4 का अवकलज $3x^2+4x^3$ है इसलिए फलन $3x^2+4x^3$ का प्रतिअवकलज x^3+x^4+c है जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

$\Rightarrow \int(3x^2+4x^3)dx=x^3+x^4+c$

(iii) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\sec^2 2x$ है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(\tan 2x)=2\sec^2 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right)=\sec^2 2x$$

इसलिए $\sec^2 2x$ का प्रतिअवकलज $\frac{1}{2}\tan 2x$ है अर्थात्

$$\int \sec^2 2x\,dx=\frac{1}{2}\tan 2x+c$$

(iv) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\sin 3x$ है।

हम जानते हैं कि-

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x)=-3\sin 3x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)=\sin 3x$$

अर्थात् फलन $-\frac{\cos 3x}{3}$ का अवकलज $\sin 3x$ है।

इसलिए फलन $\sin 3x$ का प्रतिअवकलज $-\frac{\cos 3x}{3}$ है।

$$\Rightarrow \int \sin 3x\, dx = -\frac{\cos 3x}{3}+c$$

(v) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकल e^{3x-5} है।

हम जानते हैं कि–

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x-5}\right)=3e^{3x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot e^{3x-5}\right)=e^{3x-5}$$

अर्थात् फलन $\frac{e^{3x-5}}{3}$ का अवकलज e^{3x-5} होगा।

$$\Rightarrow \int e^{3x-5}dx=\frac{e^{3x-5}}{3}+c.$$

उदाहरण 2: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{x^4+1}{x^3}dx$

(ii) $\int (x^{\frac{1}{4}}+1)dx$

(iii) $\int (x^{\frac{2}{3}}+2e^x-\frac{1}{x})\cdot dx$

(iv) $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

(v) $\int (ax^2+bx+c)dx$

हल: (i) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^4+1}{x^3}=\frac{x^4}{x^3}+\frac{1}{x^3}=x+x^{-3}$$

इसलिए $\int \frac{x^4+1}{x^3}dx = \int x dx + \int x^{-3} dx$

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + c$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(ii) $\int \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)dx = \int x^{\frac{1}{4}}dx + dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + x + c$$

$$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + x + c$$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) $\int \left(x^{\frac{2}{3}} + 2e^x - \frac{1}{x}\right)dx$

$$= \int x^{\frac{2}{3}}dx + \int 2e^x dx - \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 2e^x - \log_e|x| + c$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{3}} + 2e^x - \log_e|x| + c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \int x^2(1-\frac{1}{x^2})dx = \int (x^2-1)dx$$

$$= \int x^2 dx - \int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) $\int(ax^2+bx+c)dx$

$=\int ax^2dx+bx\,dx+\int c\,dx$

$=\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx+k$, जहाँ k एक समाकलन अचर है।

उदाहरण 3: निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})$

(ii) $\sec x(\sec x+\tan x)$

(iii) $\dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}$

(iv) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

(v) $\sqrt{1+\sin 2x}$

हल: (i) यहाँ हमें फलन $2x^2-3\sin x+5\sqrt{x}$ का प्रति–अवकलज फलन ज्ञात करना है अर्थात् $\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx$ ज्ञात करना है।

समाकलन के गुण–धर्म से

$$\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})dx=2\int x^2dx-3\int\sin x\,dx+\int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\frac{x^{2+1}}{2+1}-3(-\cos x)+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) हम देखते हैं कि

$\sec x(\sec x+\tan x)=\sec^2 x+\sec x\tan x$

$\Rightarrow\int\sec x(\sec x+\tan x)=\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\int\sec^2 x\,dx+\int\sec x\tan x\,dx$

$=\tan x+\sec x+c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iii) हम देखते हैं कि

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

$$= \sec^2 x - 1 \qquad (sec^2 x - \tan^2 x = 1)$$

इस प्रकार $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx = \int(\sec^2 x - 1) \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot dx - \int dx$

$= \tan x - x + c,$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(iv) हम देखते हैं कि

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} = \frac{x^3 - x^2}{x-1} + \frac{x-1}{x-1}$$

$$= \frac{x^2(x-1)}{(x-1)} + 1 = x^2 + 1$$

अब $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} dx = \int (x^2 + 1) dx$

$$= \int x^2 dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + x + c$$

$= \frac{x^3}{3} + x + c,$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \sin 2x} = \cos x + \sin x$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1 + \sin 2x} \cdot dx = (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \int \cos x\, dx + \int \sin x\, dx$$

$= \sin x - \cos x + c,$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

प्रश्नावली-7

निम्नलिखित फलनों के प्रति अवकलज (समाकलन) ज्ञात कीजिए:

1. $\cos 3x$ 2. e^{3x} 3. $(px-q)^2$

4. $\sec^2 3x$ 5. $\sin 2x - 3e^{5x}$ 6. $\sec 2x \tan 2x$

7. $x - \frac{1}{x}$ 8. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 9. $x^2 - x + 2$

10. $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

11. $\int (1-x)\sqrt{x}dx$ 12. $\int (2x - 3\sin x + e^x)dx$

13. $\int \sqrt{x}(3x^2 + x - 5)dx$ 14. $\int (x + \frac{1}{x})^3 dx$ 15. $\int \frac{3 - 2\sin x}{\cos^2 x} dx$

16. $\int (4x^3 - \frac{3}{x^4})dx$ 17. $\int (5^x - 6^x)dx$ 18. $\int \left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)dx$

19. $\int \frac{5^{2x} + 2 \cdot 15^x + 3^{2x}}{3^x + 5^x} dx$ 20. $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} dx$ 21. $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} dx$

22. $\int \cot^2 x\, dx$ 23. $\int (\sin x \cos 3x)dx$ 24. $\int (\sin 3x \cos 2x)dx$

25. $\int \frac{(1 + \sin 2x)}{\sin x + \cos x} dx$ 26. $\int \left(\frac{1 - \sin 2x}{\cos x - \sin x}\right)dx$ 27. $\int \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} dx$

28. $\int \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} dx$ 29. $\int \frac{x^3 + \frac{1}{x^3}}{x + \frac{1}{x}} dx$ 30. $\int \left(e^{2x} + 5^x - \frac{1}{x}\right)dx$

अब तक हमलोग प्रमाणिक रूप में व्यक्त फलनों के प्रति–अवकलज (समाकलन) निरीक्षण द्वारा निकाल चुके हैं। अब हमलोग कुछ वैसे फलन जो प्रमाणिक रूप में नहीं दिखते हैं परन्तु प्रतिस्थापन या आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा फलन को प्रमाणिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है, का समाकलन ज्ञात करते हैं जैसे $\int \tan^2 x\, dx$ ज्ञात करने में

हम देखते हैं कि $\tan^2 x$ प्रमाणिक अवकलज के रूप में नहीं है। परन्तु $\tan^2 x$ को $\sec^2 x-1$ में रूपान्तरित करने पर फलन का प्रमाणिक स्वरूप में होने के कारण समाकलन $\tan x - x$ होगा अर्थात्

$$\int \tan^2 x\,dx = \int(\sec^2 x-1)dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + c,$$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

आइए एक और फलन के समाकलन पर विचार करते हैं-

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

यहाँ $\sqrt{x} = t$ लें तो,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$$

इसप्रकार $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \cos t \cdot 2dt$

$$= 2\int \cos t\,dt$$

$$= 2\sin t + c$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + c,$$ जहाँ c समाकलन अचर है।

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि फलन $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ प्रमाणिक रूप में नहीं व्यक्त है जिससे हम इसका प्रतिअवकलज निरीक्षण द्वारा लिख सकते हैं परन्तु प्रतिस्थापन $(\sqrt{x} = t)$ के द्वारा इसे प्रमाणिक रूप $\int 2\cos t$ में व्यक्त किया गया जहाँ से निरीक्षण द्वारा हम इसका प्रति-अवकलज $2\sin t = 2\sin\sqrt{x}$ लिखते हैं।

अब हम प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन पर विचार करेंगे। प्रतिस्थापन द्वारा हम ऐसे फलन के लिए प्रतिस्थापन करते हैं जिसका अवकलज भी समाकल्य में सम्मिलित हों जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है-

उदाहरण 4: निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(i) $x^3 \sin(x^4+5)$

(ii) $x\sec x^2 \tan x^2$

(iii) $\tan x$

(iv) $\cot x$

उदाहरण 5: निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए-

(i) $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$

(ii) $\int \frac{1}{1+\tan x}dx$

(iii) $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$

(iv) $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$

(v) $\int \frac{1}{x+x\log x}dx$

हल:

(i) हम देखते हैं कि

$$\int \cos^3 \sin^2 dx$$

$$=\int \cos^2 x \sin^2 x \cos x\,dx \qquad (\sin x = z \text{ रखने पर } \cos x\,dx = dz)$$

$$=\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$=\int z^2\left(1-z^2\right)dz$$

$$=\int (z^2-z^4)dz = \frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+c$$

$$=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+c,$$ जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) $$\int \frac{1}{1+\tan x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x+\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int t\cdot dt$$

(माना कि $\cos x+\sin x = t$

$\Rightarrow (\cos x-\sin x)dx = dt$)

(v) sec x

हल:

(i) मान लिया कि $x^4+5=t$

तो $4x^3dx=dt$

$$x^3dx=\frac{1}{4}dt$$

इसप्रकार $$\int x^3\sin(x^4+5)dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{4}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos t)+c,$$

$$=\frac{1}{4}\cos(x^4+5)+c,$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

(ii) मान लिया कि $x^2=t$

$$\Rightarrow 2xdx=dt$$

$$\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$$

$$\int x\sec x^2\tan x^2dx=\int\sec t\tan t\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\sec t\tan t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\sec t+c$$

$$=\frac{1}{2}\sec(x^2)+c,$$

जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) मान लिया कि

$$\cos x=t$$

$$\Rightarrow -\sin x\,dx = dt$$

$$\Rightarrow \sin x\,dx = -dt$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= \int -\frac{1}{t}dt$$

$$= -\log|t| + c$$

$$= -\log|\cos x| + c$$

$= \log|\sec x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) माना कि $\sin x = z$

$$\cos x\,dx = dz$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= \int \frac{1}{z}dz$$

$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|\sin x| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(v) हम देखते हैं कि

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}dx$$

मान लिया कि

$$\sec x + \tan x = z$$

$$\Rightarrow \sec x \tan x\,dx + \sec^2 x\,dx = dz$$

$$\Rightarrow \sec x(\sec x + \tan x)dx = dz$$

$$= \int \frac{1}{z}dz$$

$$= \log_e|z| + c$$

$= \log_e|(\sec x + \tan x)| + c$, जहाँ c एक समाकलन अचर है।

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log|t|+c$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iii) दिया गया समाकलन

$$=\int\frac{x}{e^{x^2}}=\int x\cdot e^{-x^2}$$

($-x^2$ को t से प्रतिस्थापित करने पर

$-x^2=t, -2xdx=dt$)

$$\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt$$

$$=\int-\frac{1}{2}e^t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+c$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}=\frac{-1}{2e^{x^2}}+c,$$ जहाँ c एक समाकलन अचर है।

(iv) $e^{2x}+e^{-2x}$ के बदले में z रखने पर

$$e^{2x}+e^{-2x}=z$$

$$\Rightarrow(2e^{2x}-2e^{-2x})dx=dz$$

$$\Rightarrow(e^{2x}-e^{-2x})dx=\frac{1}{2}dz$$

इसप्रकार $\int\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}dz$

$$=\frac{1}{2}\log|z|+c$$

$$=\frac{1}{2}\log_e|e^{2x}+e^{-2x}+c|$$

जहाँ c एक स्वेच्छा अचर है।

(v) $1+\log x$ के बदले में z रखने पर

$$1 + \log x = z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} dx = dz$$

इस प्रकार $\int \frac{1}{x + x\log x} dx = \int \frac{1}{x(1+\log x)} dx = \int \frac{1}{z} dz = \log|z| + c$

$= \log_e |1 + \log x| + c$, जहाँ c एक स्वच्छ अचर है।

प्रश्नावली-8

निम्नलिखित फलनों का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$
2. $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx$
3. $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx$
4. $\int \frac{x}{x^2-a^2} dx$
5. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$
6. $\int \frac{1}{x^2+2x-1} dx$
7. $\int \sin^2(2x+5) dx$
8. $\int \cos^2(3x+5) \cdot dx$
9. $\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x \, dx$
10. $\int \tan 2x \tan 3x \tan 5x \, dx$
11. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+5)} dx$
12. $\int \frac{5^x \log 5 + 5x^4}{5^x + x^5} dx$
13. $\int \sin^3 x \, dx$
14. $\int \cos^3 x \, dx$
15. $\int \frac{(\log x+1)^2}{x} dx$
16. $\int \frac{x^2}{x^6-9}$
17. $\int \frac{1}{9x^2+6x-3} dx$
18. $\int \frac{1}{e^x+1} dx$
19. $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$
20. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
