

* ਜਮਾਤ ਦਸਵੀਂ *

ਅਧਿਆਇ-ਮਈ:- ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਹੁਪਦ, ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ
ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ, ਸੰਭਾਵਨਾ

* 1. ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ *

1.1

- 1) 1 ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ. (H.C.F.) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਜੁਕਲਿਡ
ਵੱਡ ਅੰਲਗੇਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ:

ਪ੍ਰ) 135 ਅਤੇ 225 (ii) 196 ਅਤੇ 38220 (iii) 867 ਅਤੇ 255

ਪ੍ਰ) 135 ਅਤੇ 225

ਇੱਥੇ $225 > 135$ ਹੈ। 225 ਅਤੇ 135 (ਉੱਪਰ ਜੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ
ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 225} \\ \underline{-135} \\ 90 \end{array}$$

$$225 = 135 \times 1 + 90$$

∵ ਚਾਕੀ $90 \neq 0$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ 135 ਅਤੇ 90 ਦੇ ਵੀ ਜੁਕਲਿਡ
ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$135 = 90 \times 1 + 45$$

$$\begin{array}{r} 90 \overline{) 135} \\ \underline{-90} \\ 45 \end{array}$$

∵ ਚਾਕੀ $45 \neq 0$, ∴ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 90 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਚਾਕੀ 45
ਨੂੰ ਵੀ ਜੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ
ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 90} \\ \underline{-90} \\ 0 \end{array}$$

$$90 = 45 \times 2 + 0$$

ਇੱਥੇ ਚਾਕੀ 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪੁਨਰਿਧਿਆਇਕ
ਸ਼ੁੱਧ ਹੋਵੇਗਾ। ∴ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 45 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ
225 ਅਤੇ 135 ਦਾ (H.C.F.) ਮ.ਸ.ਵ. = 45 ਹੈ।

ਪ੍ਰ) 196 ਅਤੇ 38220

ਇੱਥੇ $38220 > 196$ ਹੈ। 38220 ਅਤੇ 196 (ਉੱਪਰ ਜੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ
ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$38220 = 196 \times 195 + 0$$

$$\begin{array}{r} 196 \overline{) 38220} \\ \underline{-196} \\ 1882 \\ \underline{-1764} \\ 980 \\ \underline{-980} \\ 0 \end{array}$$

∴ ਇੱਥੇ ਚਾਕੀ 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ
ਪੁਨਰਿਧਿਆਇਕ ਸ਼ੁੱਧ ਹੋਵੇਗਾ।

∴ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 196 ਹੈ।

∴ 38220 ਅਤੇ 196 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ. 196 ਹੈ।

iii) 867 ਅਤੇ 255

$\therefore 867 > 255$ ਹੈ। 867 ਅਤੇ 255 'ਤੇ ਭੁਕਤਿਤ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$867 = 255 \times 3 + 102$$

$$\begin{array}{r} 255 \overline{) 867} 3 \\ \underline{-765} \\ 102 \end{array}$$

$\therefore$ ਚਾਕੀ $102 \neq 0$; ਇਸ ਲਈ 255 ਅਤੇ 102 'ਤੇ ਭੁਕਤਿਤ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$255 = 102 \times 2 + 51$$

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 255} 2 \\ \underline{-204} \\ 51 \end{array}$$

$\therefore$ ਚਾਕੀ $51 \neq 0$; $\therefore$ 102 ਅਤੇ 51 'ਤੇ ਭੁਕਤਿਤ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$102 = 51 \times 2 + 0$$

$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 102} 2 \\ \underline{-102} \\ 0 \end{array}$$

ਇੱਥੇ ਚਾਕੀ 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪੁਰਤਿਆ ਇੱਥੇ ਸ਼ੁੱਧ ਹੋਈ ਹੈ। $\therefore$ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 51 ਹੈ

$\therefore$ 867 ਅਤੇ 255 ਦਾ ਮ.ਸ.ਦ. (H.C.F) = 51 ਹੈ।

2) ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਪਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q+1$ ਜਾਂ $6q+3$ ਜਾਂ $6q+5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ a ਕੋਈ ਪਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $b=6$ ਹੈ।

ਭੁਕਤਿਤ ਵੰਡ ਐਕਸ਼ੇਰਿਬਮ ਅਨੁਸਾਰ

$$6 \overline{) a} r$$

ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $q \geq 0$ ਦੇ ਲਈ $a = 6q + r$

(ਜਿੱਥੇ $0 \leq r < 6$)

$$\begin{array}{l} \text{ਕਿਸੇ } r = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ r > 0 \end{array}$$

$\therefore$ ਚਾਕੀ ਜੋ ਸੰਭਾਵਿਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ 0, 1, 2, 3, 4 ਅਤੇ 5 ਤੋਂ ਹੋਣਗੇ

ਭਾਵ a ਸੰਖਿਆਵਾਂ $6q, 6q+1, 6q+2, 6q+3, 6q+4$ ਜਾਂ $6q+5$

ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ a ਇੱਕ ਪਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\therefore$ ਇਹ $6q, 6q+2$ ਅਤੇ $6q+4$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ $\therefore$ ਤਿੰਨੋਂ 2 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ

$$\left(\begin{array}{l} \frac{6q}{2} = 3q \quad \frac{6q+2}{2} = \frac{2(3q+1)}{2} \\ \frac{6q+4}{2} = \frac{2(3q+2)}{2} \end{array} \right)$$

$\therefore$ ਕੋਈ ਵੀ ਪਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ

$6q+1$ ਜਾਂ $6q+3$ ਜਾਂ $6q+5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

3) ਕਿਸੇ ਪਰੇਡ ਵਿੱਚ 616 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੈਨਾ (ਆਰਮੀ) ਦੀ ਟੁਕੜੀ ਨੇ 32 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸੈਨਾ ਚੈਂਡ ਦੇ ਘਿੱਠੇ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੂਹ ਨੇ ਪਰਾਚਰ ਗਿਣਤੀ ਵਾਲੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮਾਰਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ?

ਸਤੰਭਾਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ

ਭੁਕਤਿ ਅੰਗੋਭਿਕਮ ਅਨੁਸਾਰ 616 ਅਤੇ 32 ਦਾ ਮ:ਸ: 8 ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ

$$\therefore 616 > 32 \text{ ਹੈ।}$$

$$616 = 32 \times 19 + 8$$

$\therefore$ ਚਾਕੀ $8 \neq 0$ $\therefore$ 32 ਅਤੇ 8 ਦੇ ਭੁਕਤਿ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦ

ਖੁੱਲ੍ਹਾ ਕਰਦੇ

$$32 = 8 \times 4 + 0$$

$\therefore$ ਚਾਕੀ 0 ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਖੁੱਲ੍ਹਿਆ ਘਿੱਠੇ ਤੇ ਗਈ

ਅਤੇ 616 ਅਤੇ 32 ਦਾ (HCF) ਮ:ਸ: 8 = 8 ਹੈ।

$\therefore$ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 8 ਸਤੰਭਾਂ ਵਿੱਚ ਆਰਮੀ ਮਾਰਚ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ।

4) ਭੁਕਤਿ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦਾ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ $x = 3q$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸਦੀ $a = 6q + r$ ਤਕ ਤੁਲਨਾ ਕਰਦੇ

$$b = 3 \therefore 0 \leq r < b \therefore 0 \leq r < 3$$

($\therefore$ ਸੰਭਵਿਤ ਚਾਕੀ 0, 1 ਅਤੇ 2 ਹਨ)

$\therefore x = 3q$ ਜਾਂ $x = 3q + 1$ ਜਾਂ $x = 3q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤਿਆਰ।

ਜੇਕਰ

$$x = 3q$$

ਤੋਂ ਪਾਸੇ ਵਰਤਦੇ

$$x^2 = (3q)^2$$

$$x^2 = 9q^2 = 3 \times (3q^2) = 3m_1 \quad \text{--- (1)} \quad \text{(ਜਿੱਥੇ } m_1 = 3q^2 \text{ ਅਤੇ } m_1 \text{ ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।)}$$

ਜੇਕਰ

$$x = 3q + 1$$

ਤੋਂ ਪਾਸੇ ਵਰਤਦੇ

$$x^2 = (3q + 1)^2$$

$$x^2 = 9q^2 + 1^2 + 2 \times 3q \times 1$$

$$x^2 = 9q^2 + 6q + 1$$

$$x^2 = 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3m_2 + 1 \quad \text{--- (2)} \quad \text{(ਜਿੱਥੇ } m_2 = (3q^2 + 2q) \text{ ਅਤੇ } m_2 \text{ ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।)}$$

ਜੇਕਰ

$$x = 3q + 2$$

ਤੋਂ ਪਾਸੇ ਵਰਤਦੇ

$$x^2 = (3q + 2)^2$$

$$x^2 = (3q)^2 + (2)^2 + 2(3q) \times 2$$

$$x^2 = (3q)^2 + (2)^2 + 2(3q) \times 2$$

$$x^2 = 9q^2 + 4 + 12q$$

$$x^2 = 9q^2 + 12q + 4$$

$$x^2 = 9q^2 + 12q + 3 + 1$$

$$x^2 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$$

$$x^2 = 3m_3 + 1 \quad \text{--- (3) (ਜਿੱਥੇ } m_3 = 3q^2 + 4q + 1 \text{ ਅਤੇ } m_3 \text{ ਕੋਈ ਜੰਪੂਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)}$$

①, ② ਅਤੇ ③ ਸਮੀਪਤੀਆਂ ਦੇ ਸਿੱਟੇ ਅਨੁਸਾਰ

ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਜੰਪੂਰ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਕਿਸੇ ਜੰਪੂਰ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਚੋਟੀ ਤਕ ਜਾਂ $3m+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਵੱਡੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਯੁਗਲ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਜੰਪੂਰ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ $9m$, $9m+1$ ਜਾਂ $9m+8$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ $x = 3q$ ਜਿੱਥੇ q ਧਨਾਤਮਕ ਜੰਪੂਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$$q = 6r + k \text{ ਜਿੱਥੇ } k \text{ ਦੁਆਰਾ ਕਰਕੇ}$$

$$b=3 \quad \therefore 0 \leq k < 6 \quad \therefore 0 \leq k < 3 \quad (\because \text{ਸੰਭਵਿਤ ਚਾਰੀ } 0, 1, 2 \text{ ਹਨ})$$

$\therefore x = 3q$ ਜਾਂ $x = 3q+1$ ਜਾਂ $x = 3q+2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਜੇਕਰ } x = 3q$$

ਦੇ ਘਣ ਪਾਸੇ ਘਣ ਕਰਕੇ

$$x^3 = (3q)^3$$

$$x^3 = 27q^3 = 9(3q^3) = 9m_1 \quad \text{--- (1) (ਜਿੱਥੇ } m_1 = 3q^3 \text{ ਅਤੇ } m_1 \text{ ਕੋਈ ਜੰਪੂਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)}$$

$$\text{ਜੇਕਰ } x = 3q+1$$

ਦੇ ਘਣ ਪਾਸੇ ਘਣ ਕਰਕੇ

$$x^3 = (3q+1)^3 = (3q)^3 + (1)^3 + 3 \cdot 3q \cdot 1 \cdot (3q+1)$$

$$x^3 = 27q^3 + 1 + 9q(3q+1)$$

$$x^3 = 27q^3 + 1 + 27q^2 + 9q$$

$$x^3 = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$$

$$x^3 = 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1$$

$$x^3 = 9(m_2) + 1 \quad \left[\text{where } m_2 = (3q^3 + 3q^2 + q) \right. \\ \left. \text{--- (2) ਅਤੇ } m_2 \text{ ਕੋਈ ਜੰਪੂਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} \right]$$

ਜੇਕਰ

$$n = 3q + 2$$

ਦੋਨੋਂ ਧਾਮੇ ਘਾਟ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$(n)^3 = (3q+2)^3$$

$$(n)^3 = (3q)^3 + (2)^3 + 3(3q) \cdot 2(3q+2)$$

$$n^3 = 27q^3 + 8 + 18q(3q+2)$$

$$n^3 = 27q^3 + 8 + 54q^2 + 36q$$

$$n^3 = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$$

$$n^3 = 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8$$

$$n^3 = 9m_3 + 8 \quad \left(\text{where } m_3 = 3q^3 + 6q^2 + 4q \right)$$

— ③ (ਅਤੇ m_3 ਕੋਈ ਜੁੜਿਆ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

①, ② ਅਤੇ ③ ਸਵਿਤੀਆਂ ਦੇ ਸਿੱਟੇ ਅਨੁਸਾਰ

• ਜਿਸੇ ਵਰਗਤਮਰ ਸੰਖਿਅਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਾਟ $9m$, $9m+1$ ਜਾਂ $9m+8$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।