

131/1 334(DW)

2018

गणित

प्रथम प्रश्नपत्र

(बीजगणित, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

तथा निर्देशांक ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Instruction : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- नोट :
- i) इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।
 - ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

334(DW)

2

- iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
- vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Note : i) There are in all *eight* questions in this question paper.

- ii) All questions are compulsory.
- iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- v) Start from the first question and proceed to the last one.
- vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

934571

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = A$, तो $\sin 2A$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$, जहाँ $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. 1

ग) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से होकर जाता है और अक्षों से अन्तःखण्ड 3 तथा 4 काटता है। 1

घ) अतिपरवलय $2x^2 - 3y^2 = 15$ की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 1

ङ) बिन्दुओं $(2, 3, 4)$ और $(3, 4, 5)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 1

1. Attempt any four parts of the following :

a) If $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = A$, then find the value of $\sin 2A$. 1

b) Prove that $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$, where $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. 1

c) Find the equation of that circle which passes through origin and cuts off intercepts 3 and 4 from the axes. 1

d) Find the eccentricity of hyperbola $2x^2 - 3y^2 = 15$. 1

e) Find the distance between the points $(2, 3, 4)$ and $(3, 4, 5)$. 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$,

तो AB का मान ज्ञात कीजिए।

2

- ख) सिद्ध कीजिए कि

$$2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{a}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-b}{a+b} \right).$$

2

- ग) असमिका $\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$ को हल

कीजिए।

2

- घ) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका

केन्द्र $(1, -3)$ है और रेखा

$$2x - y - 4 = 0 \text{ को स्पर्श करता है।}$$

2

- ङ) एक परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए

जिसका शीर्ष $(0, 0)$ और नाभि $(0, 2)$ हैं।

2

2. Attempt any *four* parts of the following :

a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$,

then find the value of AB .

2

- b) Prove that

$$2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{a}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-b}{a+b} \right).$$

2

- c) Solve the inequality

$$\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}.$$

2

- d) Find the equation of that circle

whose centre is $(1, -3)$ and

touches the line $2x - y - 4 = 0$.

2

- e) Find the equation of the parabola

whose vertex is $(0, 0)$ and focus is

$(0, 2)$.

2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12. \quad 2$$

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$3 \sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3). \quad 2$$

ग) यदि $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \quad 2$$

घ) सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4a(x + a)$ को स्पर्श करेगी यदि $c = ma + \frac{a}{m}$. 2

ङ) यदि $P(3, 2, -4)$, $Q(5, 4, -6)$ और $R(9, 8, -10)$ संरेख हैं, तो अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें Q रेखा PR को विभाजित करता है। 2

3. Attempt any *four* parts of the following :

a) Solve graphically the following system of inequalities :

$$2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12. \quad 2$$

b) Prove that

$$3 \sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3). \quad 2$$

c) If $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$, then prove that

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \quad 2$$

d) Prove that straight line $y = mx + c$ will touch the parabola $y^2 = 4a(x + a)$ if $c = ma + \frac{a}{m}$. 2

e) If $P(3, 2, -4)$, $Q(5, 4, -6)$ and $R(9, 8, -10)$ are collinear, then find the ratio in which Q divides the line PR . 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $[x - 5 - 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 3

ख) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$. 3

ग) सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{27}{11} \right)$. 3

घ) उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि की संगत नियता से दूरी $\frac{16}{3}$ तथा उत्केन्द्रता $\frac{3}{5}$ है। 3

4. Attempt any three parts of the following :

a) If $[x - 5 - 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, then find the value of x . 3

- b) Prove that $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$. 3
- c) Prove that $\sin^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{27}{11} \right)$. 3
- d) Find the equation of that ellipse whose distance of focus from the corresponding directrix is $\frac{16}{3}$ and eccentricity is $\frac{3}{5}$. 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए : $3x + 2y \leq 12, x \geq 1, y \geq 2$. 3

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ और I ,

A जैसा समान कोटि का इकाई आव्यूह है, तो दिखाइए कि

$(I + A) = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$. 3

- ग) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियों के बीच की दूरी 16 तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है। 3

- घ) सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \sin^{-1} \frac{63}{65}. \quad 3$$

5. Attempt any *three* parts of the following :

- a) Solve by graphical method, the following inequality system :

$$3x + 2y \leq 12, x \geq 1, y \geq 2. \quad 3$$

- b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ and I is the

unit matrix of the same order as A , then show that

$$(I + A) = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad 3$$

- c) Find the equation of that hyperbola whose distance between foci is 16 and eccentricity is $\sqrt{2}$. 3

[Turn over

- d) Prove that

$$\cos^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \sin^{-1} \frac{63}{65}. \quad 3$$

6. निर्मालिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निर्मालिखित समीकरण निकाय को क्रमर के नियम से हल कीजिए :

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 5y + 7z = 52$$

$$2x + y - z = 0. \quad 4$$

- ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ का

A^{-1} ज्ञात कीजिए। 4

6. Attempt any *one* part of the following :

- a) Solve by Cramer's rule the following equation system :

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 5y + 7z = 52$$

$$2x + y - z = 0. \quad 4$$

b) Find A^{-1} of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad 4$$

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) यदि l_1 तथा l_2 परवलय $y^2 = 4ax$ की किसी नाभीय जीवा के खण्डों की लम्बाइयाँ हों तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{a}$. 4

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = (1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x). \quad 4$$

7. Attempt any one part of the following :

a) If l_1 and l_2 are the lengths of segment of focal chord of a parabola $y^2 = 4ax$, then prove that

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{a}. \quad 4$$

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} =$$

$$(1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x). \quad 4$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित समीकरण निकाय का आव्यूह

विधि से हल कीजिए :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4. \quad 4$$

ख) यदि एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक $(1, 5, -1)$, $(0, 4, -2)$ और $(2, 3, 4)$ हैं, तो इसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 4

8. Attempt any *one* part of the following :

- a) Solve by the matrix method the following system of equations :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4. \quad 4$$

- b) If the coordinates of mid-points of a triangle are (1, 5, -1), (0, 4, -2) and (2, 3, 4), then find the coordinates of its vertices. 4

334(DW)-1,60,000