पाठ–4 द्विघात समीकरण

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए है। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए :

1. निम्नलिखित में से कौन सा द्विघात समीकरण है?

(a) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$
(b) $x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(x + 2)$
(c) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$
(d) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

2. द्विघात समीकरण $3x^2 - 2x - 1 = 0$ एक हल है :–

(a) 1 (b) **2**
(c) **3** (d) **4**

3. विविक्तकर **D** निम्न में से किसके बराबर होता है:

(a) $b^2 - 4ac$ (b) $b^2 + 4ac$
(c) $b^2 - ac$ (d) $b^2 + ac$

4. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो भिन्न वास्तविक मूल होंगे यदि :

(a) $b^2 - 4ac < 0$ (b) $b^2 - 4ac = 0$
(c) $b^2 - ac > 0$ (d) निम्न में से कोई नहीं

5. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर, $b^2 - 4ac = 0$ हो, तो समीकरण के मूल होगे :

(a) वास्तविक तथा असमान
(b) वास्तविक तथा समान
(c) वास्तविक नहीं,
(d) इनमें से कोई नहीं

6. द्विघात समीकरण $x^2 + 2x - 8 = 0$ मूल है :

(a) 4 , 2 (b) -4 , 2
(c) 4 , -2 (d) -4 , -2

7. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में निम्न में से किसका मान 0 नहीं होना चाहिए ?

(a) b (b) c
(c) a (d) इनमें से कोई नहीं

8. $x(2x + 3) = x^2 - 1$ किस प्रकार का समीकरण है?

(a) रैखिक (b) द्विघात
(c) त्रिघात (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 4x + k = 0$ का मूल समान हो, तो k का मान होगा:

(a) 3 (b) 5
(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

10. द्विघात समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ मूल होगा :

(a) 2 , 3 (b) 2 , 2
(c) 3 , 0 (d) इनमें से काई नहीं

हल (Solution)

1 (c), 2 (a), 3 (a), 4 (c), 5 (b), 6 (b), 7(c), 8 (b), 9 (c), 10 (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

11. जाँच कीजिए कि $x(2x + 3)$ द्विघात समीकरण है या नहीं।

हल. दिया गया समीकरण है:

$$x(2x + 3) = x^2 + 1$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 3x = x^2 + 1$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 - x^2 + 3x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 3x - 1 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

12. जाँच कीजिए कि x का दिया गया मान समीकरण का हल है या नहीं।

$3x^2 - 2x - 1 = 0,\ x = 1$

हल. प्रदत्त समीकरण है:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

L.H.S. $3x^2 - 2x - 1$; R.H.S. = 0

$x = 1$ के लिए

$$\text{L.H.S.} = 3(1)^2 - 2(1) - 1$$
$$= 3 - 2 - 1$$
$$= 3 - 3$$
$$= 0$$
$$= \text{R.H.S}$$

अतः $x = 1$ द्विघात समीकरण $3x^2 - 2x - 1 = 0$ का हल है।

13. द्विघाती समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल. दिया गया द्विघात समीकरण है:

$$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

यहाँ $a = 3,\ b = -2,\ c = \frac{1}{3}$

$\because$ विविक्तकर (D) $= b^2 - 4ac$

$$= (-2)^2 - 4(3)\left(\frac{1}{3}\right)$$

© JCERT not to be republished

$= 4 - 4 = 0$

अतः दिए गए द्विघात समीकरण के दो बराबर वास्तविक मूल हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (5 अंक)

14. निम्न द्विघात समीकरण के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो, तो द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए।

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

हल. दिया गया समीकरण है :

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

यहां $a = 3,\ b = -5,\ c = 2$

$\therefore$ विविक्तकर $(D) = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(3)(2)$

$= 25 - 24$

$= 1 > 0$

अतः दिए गए द्विघात समीकरण के दो भिन्न मूल हैं।

द्विघात सूत्र से,

$$\because\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$\therefore x = \frac{5+1}{6} \text{ या } \frac{5-1}{6}$$

$$\therefore x = \frac{6}{6} \text{ या } \frac{6}{4}$$

$$\therefore x = 1, \frac{2}{3}$$

अतः दिए गए द्विघात समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल 1 और $\frac{2}{3}$ हैं।

15. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल. माना एक संख्या x है तथा दूसरी संख्या $= (27 - x)$

[$\because$ दोनों संख्याओं का योग 27 है।]

$\because$ संख्याओं का गुणनफल $= x(27 - x)$

प्रश्नानुसार,

$\because\ x(27 - x) = 182 \Rightarrow 27x - x^2 = 182$

$x^2 - 27x + 182 = 0 \Rightarrow x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$

$\Rightarrow x(x - 13) - 14(x - 13) = 0 \Rightarrow (x - 13)(x - 14) = 0$

$\Rightarrow x - 13 = 0$ या $x - 14 = 0 \Rightarrow x = 13$ या $x = 14$

$\Rightarrow x = 13, 14$

$\Rightarrow 27 - x = 14, 13$

अतः दो संख्याएँ 13 और 14 है। Ans.

16. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।

हल. माना दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक x और $x+1$ हैं।

[$\because$ दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक में 1 का अंतर होता है।]

तब उनके वर्गों का योग $= x^2 + (x + 1)^2$

प्रश्नानुसार,

$x^2 + (x + 1)^2 = 365$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 365$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 364 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 182 = 0$ [2 से भाग देने पर]

$\Rightarrow x^2 + (14 - 13)x - 182 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 14x - 13x - 182 = 0$

$\Rightarrow x(x + 14) - 13(x + 14) = 0$

$\Rightarrow (x + 14)(x + 13) = 0$

$\Rightarrow x + 14 = 0$ या $x - 13 = 0$

$\Rightarrow x = -14$ या $x = 13$

$\Rightarrow x = 14, 13$

$\because x$ एक धनात्मक पूर्णांक है। $\therefore x = -14$ अग्राह्य है।

$\therefore x = 13 \qquad \Rightarrow x + 1 = 13 + 1 = 14$

अतः दो क्रमागत पूर्णांक 13 और 14 हैं।

17. 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग $\frac{1}{3}$ है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल. माना रहमान की वर्तमान आयु x वर्ष है।

तब 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु $= (x - 3)$ वर्ष और

अब से 5 वर्ष पश्चात् रहमान की आयु $= (x + 5)$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु का व्युत्क्रम + 5 वर्ष पश्चात् आयु का व्युत्क्रम $= \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5) + (x-3)}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+5) = 3(2x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 3x - 15 = 6x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 - 6x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

जो x में एक द्विघात समीकरण है।

© JCERT not to be republished

यहाँ $a = 1,\ b = -4,\ c = -21$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21)$

$= 16 + 84 = 100$

$\because D > 0$

$\therefore$ द्विघात समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल होगें।

द्विघाती सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-21)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 10}{2} = \frac{4 + 10}{2},\ \frac{4 - 10}{2} = 7, -3$$

$\because$ x आयु है और आयु ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$\therefore x = -3$ अग्राह्य है।

$\therefore$ $x = 7$ वर्ष

अतः रहमान की वर्त्तमान आयु 7 वर्ष है।

सत्यापन–

3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु $= (7 - 3)$ वर्ष $= 4$ वर्ष अब से 5 वर्ष पश्चात् रहमान की आयु $= (7+5)$ वर्ष $= 12$ वर्ष

$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3 + 1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

अतः प्राप्त हल सही है।

© JCERT not to be republished