पाठ–2 बहुपद

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

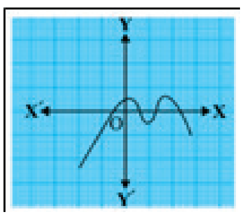
प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए है। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए :

1. यदि बहुपद x^2-9x+a के शुन्यकों का गुणनफल 8 है, तब इसके शून्यक हैं:

(a) -1,-8 (b) 1,-8

(c) -1,8 (d) 1,8

2. किसी बहुपद p(x) के लिए ग्राफ आकृति में दिया गया है। बहुपद के शून्यकों की संख्या निम्न में से चुनें :–



(a) 4 (b) 1

(c) 2 (d) 3

3. x^2-15 का शून्यक होगा :

(a) $\sqrt{15}$ (b) $-\sqrt{15}$

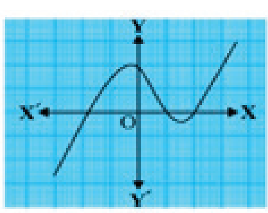
(c) a तथा b दोनों (d) इनमें से कोई नहीं

4. यदि शुन्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 3 और -2 हो तो, द्विघात बहुपद क्या होगा ?

(a) x^2+3x-1 (b) x^2+3x-2

(c) x^2-3x-2 (d) x^2+x-3

5. किसी बहुपद p(x) के लिए ग्राफ आकृति में दिया गया है। बहुपद के शून्यकों की संख्या कितनी होगी ?



(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

6. बहुपद $4u^2+8u$ का शून्यक होगा :

(a) 0 (b) -1/2

(c) -2 (d) a तथा c दोनो

7. द्विघात बहुपद x^2-7x+12 के शून्यकों का योग निम्न में से चुनें:-

(a) 6 (b) 7

(c) -7 (d) 12

8. बहुपद $3x^2$-12x का शून्यक निम्न में से चुनें :-

(a) 0,4 (b) 0,-4

(c) 1,4 (d) 0,-2

9. द्विघात बहुपद x^2+7x+10 के शून्यकों का गुणनफल निम्न में से चुनें:

(a) 10 (b) 7

(c) 3 (d) 10/7

10. घात 1 के बहुपद को .... बहुपद कहते हैं।

(a) द्विघात (b) रैखिक

(c) त्रिघात (d) इनमें से कोई नही

हल (Solution)

1 (d), 2 (a), 3 (c), 4 (c), 5 (d), 6 (d), 7(b), 8 (a), 9 (a), 10 (b)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

11. एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक कितने शून्यक हो सकते हैं और त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक कितने शून्यक हो सकते हैं।

हल. एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक 2 शून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक 3 शून्यक हो सकते हैं।

12. द्विघात बहुपद x^2-2x-8 के शून्यक ज्ञात कीजिएं।

हल. हमें द्विघात बहुपद x^2-2x-8 के शून्यक ज्ञात करना है।

माना $p(x) = x^2-2x-8$

तब $p(x) = x^2-2x-8$

$= x^2-4x-2x-8$ (मध्य पद को विभक्त करने पर)

$= x(x-4) + 2(x-4)$

$= (x-4)(x+2)$

$p(x)$ के शून्यकों के लिए

$P(x) = 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x-4 = 0$ या $x+2 = 0$

$\Rightarrow x = 4$ या $x = -2$

$\therefore x = 4, -2$

अतः $P(x)$ के शून्यक 4 और –2 हैं।

13. यदि द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2+bx+c$ के शून्यक α और β हैं, तो बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध बताइए।

हल. यदि द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2+bx+c$ के शून्यक α और β हैं, तो बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध–

$$\alpha+\beta = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a}$$

तथा $$\alpha\times\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-c}{a}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

14. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यको का योग तथा गुणनफल क्रमशः **(4, 1)** है।

हल. एक द्विघात बहुपद ज्ञात करना है जिसके शून्यको का योग तथा गुणनफल क्रमशः 4, 1 हैं।

माना द्विघात बहुपद ax^2+bx+c है और इसके शून्यक α और β हैं।

तब $\alpha+\beta = 4 = \frac{-b}{a}$

और $\alpha\times\beta = 1 = \frac{c}{a}$

इसलिए $\frac{4}{1} = \frac{-b}{a}$

तथा $\frac{1}{1} = \frac{c}{a}$

यदि $a = 1$ है, तो $b = -4$ और $c = 1$ होगा।

अतः अभीष्ट द्विघात बहुपद $x^2 - 4x + 1$ है।

15. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः $(0, \sqrt{5})$ है।

हल एक द्विघात बहुपद ज्ञात करना है जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमश : $0, \sqrt{5}$ है।

माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

तब $\alpha+\beta = 0 = \frac{-b}{a}$

और $\alpha\times\beta = \sqrt{5} = \frac{-b}{a}$

अर्थात $\frac{0}{1} = \frac{-b}{a}$

और $\frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$

यदि $a = 1$ है, तो $b = 0$ और $c = \sqrt{5}$ होगा।

अतः एक द्विघात बहुपद, जिसमें दी गई शर्ते संतुष्ट होती हैं, $x^2 + \sqrt{5}$ है।

16. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके **$p(x) = x^4-5x+6$, $g(x) = 2-x^2$** में **$p(x)$** को **$g(x)$** से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात करें।

हल. दिया है $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

$p(x)$ मानक रूप में है। $g(x)$ मानक रूप में, $-x^2 + 2$ है। अब हम दिए गए बहुपदों $p(x)$ और $g(x)$ पर विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं।

$$\begin{array}{r} -x^2 - 2 \\ -x^2+2 \,\overline{)\, x^4 - 5x + 6} \\ \underset{(-)}{x^4} \quad \underset{(+)}{-2x^2} \\ \hline 2x^2 - 5x + 6 \\ \underset{(-)}{2x^2} \quad \underset{(+)}{-4} \\ \hline -5x + 10 \end{array}$$

हम यहाँ रूक जाते हैं

क्योंकि शेषफल $(-5x + 10)$ की घात 1, भाजक $(-x^2 + 2)$ की घात 2 से कम है। इसलिए भाग की क्रिया करके शेषफल $-5x + 10$ और भागफल $-x^2 - 2$ प्राप्त होता है। अब

भाजक $\times$ भागफल + शेषफल

$= (-x^2 + 2) \times (-x^2 - 2) + (-5x + 10)$

$= x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 4 - 5x + 10$

$= x^4 - 5x + 6 =$ भाज्य

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित हो गया।

17. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके **$p(x) = x^3-3x^2+5x-3$, $g(x) = x^2-2$** में **$p(x)$** को **$g(x)$** से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात करें।

हल. दिया गया है $p(x) = x^3-3x^2+5x-3,\ g(x) = x^2-2$

दिए गए बहुपद मानक रूप में है। अब हम दिए गए बहुपदों $p(x)$ और $g(x)$ पर विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं –

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ x^2 - 2 \,\overline{)\, x^3 - 3x^2 + 5x - 3} \\ \underset{(-)}{x^3} \quad \underset{(+)}{-2x} \\ \hline -3x^2 + 7x^2 - 3 \\ \underset{(+)}{-3x^2} \quad \underset{(-)}{+6} \\ \hline 7x - 9 \end{array}$$

हम यहाँ रूक जाते हैं, क्योंकि शेषफल $(7x-9)$ की घात 1, भाजक x^2-2 की घात 2 से कम है।

इसलिए भाग की क्रिया करके शेषफल $7x - 9$ तथा भागफल $x - 3$ प्राप्त होता है।

अब,

भाजक $\times$ भागफल + शेषफल

$= (x^2 - 2) \times (x - 3) + (7x - 9)$

$= x^3 - 2x - 3x^2 + 6 + 7x - 9$

$= x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ = भाज्य

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित हो गया।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

18. यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ है तो $g(x)$ ज्ञात करें।

हल. $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$, $q(x) = x - 2$ और $r(x) = -2x + 4$

बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x) \times q(x) + r(x)$$

$$\Rightarrow g(x) \times (x - 2) = x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4$$

$$\Rightarrow g(x) \times (x - 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{(x-2)}$$

अब हम $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ और $x - 2$ पर विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं।

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 1 \\ x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\ & x^3 - 2x^2 \\ & (-)\quad (+) \\ \hline & -x^2 + 3x - 2 \\ & -x^2 + 2x \\ & (+)\quad (-) \\ \hline & x - 2 \\ & x - 2 \\ & (-)\quad (+) \\ \hline & 0 \end{array}$$

अतः $g(x) = x^2 - x + 1$

19. $6x^2 - 3 - 7x$ द्विघात बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंधों की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल. $6x^2 - 3 - 7x$

माना $p(x) = 6x^2 - 3 - 7x$, तब $p(x) = 6x^2 - 7x - 3$

$$\Rightarrow p(x) = 6x^2 - 7x - 3$$

$$= 6x^2 - (9-2)x - 3$$

$$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$$

$$= 3x(2x-3) + 1(2x - 3)$$

$$= (2x-3)(3x+1)$$

$p(x)$ के शून्यकों के लिए

$$(2x-3)(3x+1) = 0$$

$\Rightarrow$ $2x-3 = 0$ या $3x+1 = 0$

$\Rightarrow$ $2x = 3$ या $3x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ या $x = \frac{-1}{3}$

$\Rightarrow$ $x = \frac{3}{2}$ या $x = \frac{-1}{3}$

अतः $p(x)$ के शून्यक $\frac{3}{2}$ और $\frac{-1}{3}$ है।

सत्यापन,

इसके शून्यकों का योग $= \frac{3}{2} + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{3\times3-1\times2}{6}$

$$= \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6}$$

$$= \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

शून्यकों का गुणनफल $= \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-3}{6}$

$$= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$