# त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ
## (Limits of Trigonometric Functions)

व्यापक रूप से फलनों के बारे में निम्नलिखित तथ्य कुछ त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ हो जाते हैं।

मान लीजिए $f, g$ और $h$ वास्तविक मानवाले फलन ऐसे हैं कि परिभाषा के सर्वनिष्ठ प्रांतों के सभी $x$ के लिए

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

किसी वास्तविक संख्या $a$ के लिए यदि $\lim_{x \to a} f(x) = l, \lim_{x \to a} h(x) = l$, तो

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x) \le \lim_{x \to a} h(x)$$

$$\Rightarrow l \le \lim_{x \to a} g(x) \le l$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = l$$

उपर्युक्त तथ्य को ध्यान में रखकर त्रिकोणमितीय फलनों से संबंधित निम्नलिखित सीमायें-

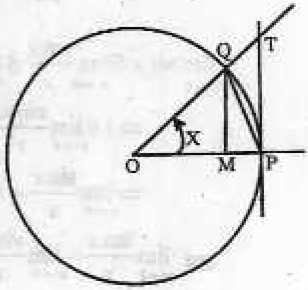
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = 1.$$

स्थापित करते हैं।

मान लिया कि इकाई वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle POQ = x$ रेडियन है जहाँ $0 \angle x \angle \frac{\pi}{2}$ वृत्त के बिन्दु $P$ पर $PT$ एक स्पर्श रेखा है जो $OQ$ रेखा से $T$ पर मिलती है। $P-Q$ को मिलाया। यहाँ हम देखते हैं कि-



$\Delta POQ$ का क्षेत्रफल < वृत्तखण्ड $POQ$ का क्षेत्रफल < $\Delta POQ$ का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}OP \cdot QM < \frac{x}{2p}p(OP)^2 < \frac{1}{2}OP \cdot PT$$

$$QM < x(OP) < PT$$

$$\frac{QM}{OQ} < x < \frac{PT}{OP.}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$\Delta OQM$ में $\sin x = \dfrac{QM}{OQ} \Rightarrow OM = \sin x$

$\Delta OPT$ में $\tan x = \dfrac{PT}{OP} \Rightarrow PT = \tan x$

$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$

चूँकि $o < x < \dfrac{\pi}{2}, \sin x$ धनात्मक है और इस प्रकार $\sin x$ से सभी को भाग देने पर, हम पाते हैं-

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

सभी का व्युत्क्रम करने पर, हम पाते हैं-

$$\cos x \angle \frac{\sin x}{x} \angle 1$$

$\Rightarrow$ अर्थात् फलन $\dfrac{\sin x}{x}$ फलन $\cos x$ और अचर फलन जिसका मान 1 हो जाता है, के बीच में स्थित है।

हम देखते हैं कि $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, अतः

$$\lim_{x \to 0} \cos x \otimes \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x \to 0} 1$$

$$\Rightarrow 1 \le \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

अब $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} . \dfrac{1}{\cos x} = 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$

तथा $\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

या, $\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

इस प्रकार निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण सीमाएँ स्थापित हुई जिनका उपयोग त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ होगा

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \sec x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} x \operatorname{cosec} x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} x \cot x = 1$$

यह ध्यान देने योग्य है कि यहाँ $x$ रेडियन में है। यदि $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^{\circ}}{x}$ ज्ञात करना हो तो $x^{\circ}$ को रेडियन में बदलकर ही सीमा ज्ञात की जा सकती है अर्थात्

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^{\circ}}{x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} \right) \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

यहाँ हमने $x \to 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{180} \to 0$

तुल्य तथ्य का प्रयोग किया है।

उदाहरण 1. $\lim_{x \to 1} \frac{px^2 + qx + r}{qx^2 + rx + p}, p + q + r \neq 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:- यहाँ $\lim_{x \to 1} \frac{px^2 + qx + r}{qx^2 + rx + p} = \frac{p + q + r}{q + r + p} = 1$

क्योंकि $p + q + r \neq 0$

उदाहरण 2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}, b \neq 0$ का मान ज्ञात करें।

हल:- हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{bx}$$

$$=\frac{1\times a}{b}=\frac{a}{b}$$

उदाहरण 3. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}$ का मान ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि $1+x=y$,

तो जब $x\to 0\Rightarrow y\to 1$ तथा $x=y-1$

अब $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^7-1^7}{y-1}=7(1)^{7-1}=7$

हम $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}$ का हल इस प्रकार भी कर सकते हैं।

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1^7}{x+1-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^7-1^7}{x+1-1}=\lim\frac{y^7-1^7}{y-1}\text{, जहाँ } y=x+1$$

$$=7.(1)^{7-1}=7.$$

उदाहरण 4. सीमा $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$ का परिकलन करें।

हल: $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0} 4\cos^2\frac{x}{2}=4\times 1=4$$

उदाहरण 5. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x-\cot x)$ का मान ज्ञात कीजिए-

हल: यहाँ, हम देखते हैं कि -

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x-\cot x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\tan 0=0$$

उदाहरण 6. सीमा $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:- हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3.\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x).2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\left(\frac{\tan x}{x}\right).x.\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{x^2}{4}}{x^3.\cos x}$$

$$=2\times 1\times 1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

उदाहरण 7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$ का मान निकालें-

हल:- मान लिया कि $x-\frac{\pi}{2}=y$

तो $2x=2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=\pi+2y$

तथा $x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0$

उपर्युक्त मान्यता के आधार पर, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\tan(\pi+2y)}{y}$

$$=\lim\frac{\tan 2y}{2y}.2=1\times 2=2$$

उदाहरण 8. यदि $a_r=\lim_{x\to 0}\frac{\tan r\cdot x}{x}$, तो

$a_1+a_2+a_3+a_4+.....+a_{100}$ का मान ज्ञात करें।

हल:- यहाँ $a_r=\lim_{x\to 0}\frac{\tan r\cdot x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan r\cdot x}{r\cdot x}\right)r=1\times r=r$

इस प्रकार

$$a_1+a_2+a_3+a_4+......+a_{100}=1+2+3+4+......+100$$
$$=\frac{100\times 101}{2}=50\times 101$$
$$=5050$$

उदाहरण 9. $\lim_{x\to 0}g(x)$ और $\lim_{x\to 1}g(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ-

$$g(x)=\begin{Bmatrix}2x+3; x\le 0\\ 3(x+1); x>0\end{Bmatrix}$$

हल:- यहाँ हम देखते हैं कि दिया गया फलन 0 (शून्य) के पड़ोस (*neighbourhood*) में बायीं और दाहिनी ओर अलग-अलग परिभाषित है। इसलिए यहाँ पर हमें- $\lim_{x\to 0^-}g(x)$ तथा $\lim_{x\to 0^+}g(x)$ निकालना पड़ेगा।

$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}g(x)=2x+3$ (शून्य तथा शून्य की बायीं ओर $g(x)=2x+3$)

$=2\times0+3=3$

तथा $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 3(x+1)$ (शून्य के दायीं ओर $g(x)=3(x+1)$ )

$$=3(0+1)=3$$

यहाँ हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=3=\lim_{x\to0^+} g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} g(x)=3$$

पुनः $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1} 3(x+1)$ ($\because x=1$ का पड़ोस शून्य के दायीं ओर ही है।)

$$=3(1+1)=6$$

उदाहरण 10. $\lim\limits_{x\to0} g(x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}; x\neq0\\ 0; x=0\end{cases}$$

हल: यहाँ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}; x\neq0\\ 0; x=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x}, x>0\\ -\dfrac{x}{x}, x<0\\ 0, x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\\ 0, x=0\end{cases}$$

हम देखते हैं कि-

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{h\to0} g(o-h) = \lim_{h\to0} g(-h)$$

$$= \lim_{h\to0}(-1) = -1$$

तथा $$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{h\to0} g(o+h) = \lim_{h\to0} g(h)$$

$$= \lim_{h\to0}(1) = 1$$

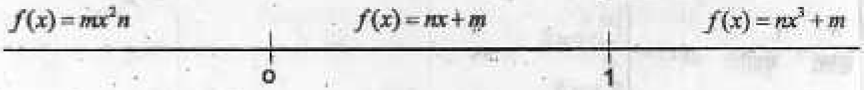
इस प्रकार $\lim_{x\to0^-} g(x)$ $\lim_{x\to0^+} g(h)$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0} g(x) \text{ अस्तित्वहीन है।}$$

उदाहरण 11. पूर्णांक $m$ और $n$ को ज्ञात करें जब $\lim_{h\to0} f(x)$ और $\lim_{x\to1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है,

यदि $$f(x) = \begin{cases} mx^2+n, x<0 \\ nx+m, 0\le x\le1 \\ nx^3+m, x>1 \end{cases}$$

हल: संख्या रेखा पर $f(x)$ के मान को दर्शाने पर हम देखते हैं कि




$x$ का मान शून्य से कम है तो $f(x) = mx^2+n$

$x$ का मान शून्य या शून्य से बड़ा और 1 या 1 से कम है, तो $f(x) = nx+m$

और $x$ का मान 1 से बड़ा होने की स्थिति में $f(x) = nx^3+m$.

इस प्रकार $\lim_{x\to o^-} f(x) = \lim_{h\to o} f(o-h) = \lim_{h\to o} m(-h)^2+n = n.$

$$\lim_{x\to o^+} f(x) = \lim_{h\to o} f(o+h) = \lim_{h\to o}(nh+m) = m$$

चूँकि $\lim f(x)$ अस्तित्व में है, अतः

$$\lim_{x\to o^-} f(x) = \lim_{x\to o^+} f(x)$$

$$\Rightarrow n=m$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{h\to o} f(1-h)=\lim_{h\to o} m(1-h)+m=n+m$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{h\to o} f(1+h)=\lim_{h\to o} n(1+h)^3+m=n+m$$

अत: $\lim_{x\to o} f(x)$ के अस्तित्व हेतु $m=n$ अनिवार्य रूप से होना चाहिए; $m$ तथा $n$ के किसी पूर्णांक मान के लिए $\lim_{x\to 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

## प्रश्नावली–5

प्रश्न 1 से 25 तक निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए:

1. $\lim_{x\to 1}(2014x-2013)$

2. $\lim_{x\to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$

3. $\lim_{x\to \frac{22}{7}}(x-\pi)$

4. $\lim_{r\to 1}\pi r^2$

5. $\lim_{x\to 5}\frac{5x-5}{5-x^2}$

6. $\lim_{x\to -1}\frac{x^{20}+x^{15}+1}{x-1}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx-d}, d\neq 0$

8. $\lim_{z\to 1}\frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$

9. $\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$

10. $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin px+qx}{px+\sin qx}, p,q,p+q\neq 0$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}, a,b\neq 0$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\pi-x}$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 7x}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

16. $\lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$

17. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

18. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}$

19. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$

20. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos bx}{x^2}$

21. $\lim_{x\to 0} x\left(\frac{\sin px-\sin qx}{\cos px-\cos qx}\right), p\neq q$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin px-\sin qx}{x(\cos px+\cos qx)}$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x-\tan 3x}{x\cos 4x}$

24. $\lim_{x\to -5}|x|-5$

25. $\lim_{x\to -5}|x-5|$

26. $\lim_{x\to 1} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\le 1\\ -x^2-1, x>1\end{cases}$$

27. मान लीजिए $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)$ से परिभाषित है। $\lim_{x\to a_1} f(x)$ क्या है?

किसी $a\neq a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ के लिए $\lim_{x\to a} f(x)$ का परिकलन कीजिए।

28. मान लीजिए कि $f(x)=\frac{25^x}{25^x+5}$, तो सिद्ध करें कि $f(p)+f(1-p)=1$.

$\lim_{x\to \frac{1}{2015}} f(x) + \lim_{x\to \frac{2014}{2015}} f(x)$ परिकलन कीजिए।

29. मान लीजिए कि $g(x)=\begin{cases}p+qx, x<1\\ 5, x=1\\ q-px, x>1\end{cases}$

और यदि $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)$ तो $p$ और $q$ के संभव मान क्या हैं?

30. $\lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+12}$ का मान ज्ञात करें।

## 2.4 अवकलज (Derivatives ):

**प्रस्तावना:**

आप फलन की सीमा के अस्तित्व के संबन्ध में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। अब फलन के प्रांत में बिन्दुओं के परिवर्तन से फलन के मान में होनेवाले परिवर्तन का अध्ययन करेंगे। यहाँ हम जानना चाहते हैं कि एक प्राचाल (Parameter) में दूसरे किसी प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन किस प्रकार होता है।

**परिभाषा:** मान लिया कि $f$ एक वास्तविक मानीय फलन है और इसी परिभाषा के प्रांत (Domain) में एक बिन्दु $a$ है। $a$ पर $f$ का अवकलज

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ से परिभाषित किया जाता है बशर्ते कि इसकी सीमा का अस्तित्व हो। फलन की सीमा के अस्तित्व से हम जानते हैं कि सीमा के दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ होती हैं।

$$\text{अतः } \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

$$\overset{x=a-h}{\longrightarrow} \; a \; \overset{x=a+h}{\longleftarrow}$$

$a$ पर $f(x)$ का अवकलज $f'(a) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a}$ से निरूपित होती है जो $a$ पर $x$ के सापेक्ष परिवर्तन का परिमाण बताता है।

इस प्रकार

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$ को बायाँ पक्ष अवकलज (Left hand derivative)

तथा $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ दायाँ पक्ष अवकलज (Right hand derivative) कहा

जाता है जिसे क्रमशः $Lf'(a)$ तथा $Rf'(a)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

अतः $f'(a) = Lf'(a) = Rf'(a)$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

आइए, $x = 3$ पर $f(x) = 4x^2$ का अवकलज ज्ञात करते हैं।

हम देखते हैं कि

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(3+h)^2 - 4 \times 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4[9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} 4(6+h) = 24$$

अतः $x = 3$ पर दत्त फलन $4x^2$ का अवकलज 24 है।

**उदाहरण 1:** फलन $f(x) = xinx$ का अवकलज $x = Q$ पर ज्ञात कीजिए।

**हल:** हम पाते हैं कि

$$f'(Q) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+h-a}{2}\right)}{h}$$

[ त्रिकोणमिति में रूपान्तरण सूत्र (Transformation formula) से हम जानते हैं कि $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$ ]

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{h \to 0} 2\cos(a + \frac{h}{2}) \cdot \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2\cos a \cdot 1 \times \frac{1}{2} = \cos a.$$

$$\Rightarrow f'(a)=\cos a$$

अत: $x=a$ पर फलन $\sin x$ का अवकलज $\cos a$ है।

**उदाहरण 2:** $f(x)=\frac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

**हल:** हम पाते हैं

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{h\,x(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

**उदाहरण 3:** $f(x)=\cot x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

**हल:** हम देखते हैं

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\sin x-\sin(x+h)\cos x}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin(x+h-x)}{h\sin x\sin(x+h)}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)\frac{1}{\sin x\sin(x+h)}$$

$$=-1\times\frac{1}{\sin x\sin x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cot x)=-\cos ec^2 x$$

**उदाहरण 4:** $f(x)=\cos^2 x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

**हल:** हम पाते हैं कि

$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1+\cos 2(x+h)}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x-2x-2h}{2}}{2h}$$

[त्रिकोणमिति के रूपान्तरण सूत्र हम जानते हैं कि

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(2x+h)\sin(-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(2x+h)(-\frac{\sin h}{h})$$

$$= -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos^2 x) = -\sin 2x = -2\sin x\cos x.$$

**उदाहरण 5:** $f(x) = \sec x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

**हल:** हम देखते हैं कि

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{x+x+h}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h\cos x cox(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\sin(x+\frac{h}{2})\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\cdot 2}\right)\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$= 2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x)}$$

$$= \tan x\sec x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$$

# फलनों के अवकलज का बीजगणित

## ( Algebra of derivative of functions )

हम फलन की सीमा को जानते हैं तथा अवकलज की परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों में सीमा के नियमों की निकटता महसूस करते हुए निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण प्रमेयों को स्थापित करने की कोशिश करते हैं-

**प्रमेय 1:** मानलिया कि $f$ और $g$ दो दिए गए फलन हैं जिनके उभयनिष्ठ प्रांत (Domain) में उनके अवकलन (Differentiation) परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx(g(x))}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{d}{dx(f(x)+g(x))}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$$

(ii) दो फलनों के अन्तर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अन्तर होता है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) \;=\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$$

हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$