1

वास्तविक संख्याएँ
(Real Numbers)

अध्याय एक दृष्टि में

- **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय** – प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में गुणनखण्डित किया जा सकता है। यह गुणनखण्डन अद्वितीय होता है। अभाज्य संख्याओं का कोई भी क्रम हो सकता है।
- माना x एक परिमेय संख्या है, जिसका दशमलव प्रसार सांत है, x को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं; जहाँ p और q सह अभाज्य हैं, $q \neq 0$ तथा q का अभाज्य गुणनखण्डन $2^n \cdot 5^m$ के रूप का है; जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं।
- यदि p कोई अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है, तो p, a को विभाजित करेगा, जहाँ a कोई धनात्मक पूर्णांक है।
- माना $x = \frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि q का अभाज्य गुणनखण्डन $2^n \cdot 5^m$ के रूप का है; जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो x का दशमलव प्रसार सांत होगा।
- माना $x = \frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि q का अभाज्य गुणनखण्डन $2^n \cdot 5^m$ के रूप का नहीं है; जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो x का प्रसार असांत आवर्ती होगा।
- यदि a और b धनात्मक पूर्णांक संख्याएँ हैं, तब
  HCF (a तथा b) × LCM (a तथा b) = $a \times b$
- HCF संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों की सबसे छोटी घात का गुणनफल होता है।
- LCM संख्याओं में सम्बद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल होता है।

बहुविकल्पीय प्रश्न 1 अंक

1. परिमेय संख्या $\frac{14587}{1250}$ का दशमलव प्रसार निम्नलिखित किन दशमलव स्थानों के बाद समाप्त हो जायेगा? [UP 2019 BA]
(a) एक (b) दो (c) तीन (d) चार

2. हर के $2^m \times 5^n$ रूप के आधार पर ज्ञात कीजिए कि $\frac{1458}{1250}$ का दशमलव प्रसार कितने स्थानों तक होगा? [UP 2020 MV]
(a) एक (b) दो (c) तीन (d) चार

3. सांत दशमलव संख्या में व्यक्त हो सकने वाली परिमेय संख्या होगी— [UP 2019 AV]
(a) $\frac{124}{164}$ (b) $\frac{131}{30}$ (c) $\frac{227}{625}$ (d) $\frac{625}{462}$

4. सांत दशमलव संख्या में व्यक्त हो सकने वाली परिमेय संख्या होगी— [UP 2019 AW]
(a) $\frac{77}{210}$ (b) $\frac{129}{2^2 \times 5^7 \times 7^5}$
(b) $\frac{13}{3125}$ (d) $\frac{8}{17}$

5. संख्याओं 616 और 32 का HCF है—
(a) 19712 (b) 616 (c) 8 (d) 32

6. संख्या 140 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं—
(a) $2^2 \times 5^1 \times 7^1$ (b) $7^2 \times 5^1 \times 2^2$
(c) $7^1 \times 5^2 \times 2^3$ (d) $2^4 \times 5^2 \times 7^2$

7. संख्याओं 15, 18, 24 का ल.स. (LCM) है— [UP 2020 MZ]
(a) 90 (b) 120 (c) 240 (d) 360

8. निम्न में अपरिमेय संख्या है—
(a) $\sqrt{25}$ (b) $5 - \sqrt{3}$
(c) (a) एवं (b) दोनों (d) इनमें से कोई नहीं

9. एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग होता है—
(a) परिमेय संख्या (b) अपरिमेय संख्या
(c) एक (d) (a) और (b) दोनों

10. संख्या 3125 का घातांक रूप है—
(a) 5^4 (b) 5^6 (c) 5^5 (d) 5^8

11. यदि संख्याओं 306 और 657 का HCF 9 है, तब संख्याओं 306 और 657 का LCM है— [UP 2022 AV]
(a) 22338 (b) 33228 (c) 83232 (d) 32832

12. निम्न में सांत दशमलव है—
(a) $\frac{35}{50}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{10}{11}$

13. निम्न में परिमेय संख्या है—
(a) $\sqrt{31}$ (b) $\sqrt{5}$
(c) $3 + \sqrt{23} - \sqrt{23}$ (d) $\sqrt{11}$

14. यदि दो धनात्मक संख्याएँ a और b, $a = x^5 y^2$, $b = x^3 y^3$ के रूप में लिखी जाती है, जहाँ x और y अभाज्य संख्याएँ हैं, तब HCF (a, b) है—
(a) xy (b) x^2y^2 (c) x^3y^2 (d) x^5y^3

15. दो संख्याओं 'a' और 'b' का HCF 5 है और उनका LCM 200 है। तब 'a' और 'b' का गुणनफल है–

(a) 205 (b) 1000 (c) 200 (d) 195

16. $\frac{22}{7} - \pi$ है–

(a) शून्य (b) एक परिमेय संख्या

(b) एक अपरिमेय संख्या (c) एक प्राकृत संख्या

17. धन पूर्णांक $(6a + 5)$ से ठीक पहले आने वाला धन पूर्णांक होगा–

(a) $5a + 4$ (b) $6a + 4$ (b) $15a + 5$ (d) $5a + 6$

18. अपरिमेय संख्या है–

(a) $\frac{22}{7}$ (b) π (c) 0·69 (d) $\frac{5}{\sqrt{16}}$

19. यदि दो संख्याओं का HCF 1 है, तो वे संख्याएँ कहलाती हैं–

(a) यमज (जुड़वाँ) अभाज्य (b) सह अभाज्य

(c) भाज्य (d) संपूर्ण संख्याएँ

20. एक परिमेय संख्या को एक सांत दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है यदि हर के गुणनखंड हैं–

(a) 2, 3 या 5 केवल (b) 2 या 3 केवल

(c) 3 या 5 केवल (d) 2 या 5 केवल

21. $\frac{23}{2^3 \times 5^2}$ का दशमलव प्रसार होगा–

(a) सांत (b) असांत

(c) असांत और आवर्ती (c) असांत और अनावर्ती

22. दिया है म.स. (99, 153) = 9, तो ल.स. (99, 153) है– [UP 2021 HL]

(a) 99 (b) 153 (c) 99 × 153 (d) 1683

23. दिया है ल.स. (132, 288) = 3168, तो म.स. (132, 288) है– [UP 2022 RE, 23 DX]

(a) 288 (b) 132 (c) 48 (d) 12

24. संख्या 144 के अभाज्य गुणनखंड में अभाज्य गुणनखण्डों की घातों का योग है– [UP 2022 HI, 23 DX, EB, ZZ]

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

25. दी गई संख्याओं में अभाज्य संख्या होगी– [UP 2022 AV, 23 EA]

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 8

26. यदि 26, 156 का ल. स. 156 है, तो म. स. का मान है– [UP 2022 AZ, 23 DY]

(a) 156 (b) 26 (c) 13 (d) 6

27. किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए [UP 2023 DV]

(a) a = म.स. $(a, b) \times b$

(b) $a \times b$ = ल.स. (a, b)

(c) b = म.स. $(a, b) \times$ ल.स. (a, b)

(d) $a \times b$ = म.स. $(a, b) \times$ ल.स. (a, b)

28. एक शून्येतर परिमेय संख्या एवं अपरिमेय संख्या का भागफल होता है– [UP 2023 DV]

(a) प्राकृतिक संख्या (b) अपरिमेय संख्या

(c) परिमेय संख्या (d) पूर्ण संख्या

29. किसी परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्याएँ होंगी– (UP 2023 DV)

(a) एक (b) दो

(c) तीन (d) अपरिभाषित

30. निम्नलिखित संख्याओं में परिमेय संख्या है– (UP 2023 DW)

(a) $\sqrt{9}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{0.1}$ (d) 0.101101110.....

31. परिमेय संख्या $\frac{17}{2^2 \times 5}$ का दशमलव प्रसार निम्नलिखित में से किस दशमलव स्थान के बाद समाप्त होगा? (UP 2023 DX)

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

32. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या, जिसमें 245 और 1037 को विभाजित करने पर प्रत्येक दशा में शेषफल 5 प्राप्त होता है; होगी– (UP 2023 DY)

(a) 22 (b) 23 (c) 24 (d) 25

33. कौन सह-अभाज्य संख्याओं का युग्म है? (UP 2023 EB)

(a) (18, 25) (b) (5, 15) (c) (7, 21) (d) (31, 93)

उत्तरमाला

1.	(d)	2.	(d)	3.	(c)	4.	(c)	5.	(c)
6.	(a)	7.	(d)	8.	(b)	9.	(b)	10.	(c)
11.	(a)	12.	(a)	13.	(c)	14.	(c)	15.	(b)
16.	(c)	17.	(b)	18.	(b)	19.	(b)	20.	(d)
21.	(a)	22.	(d)	23.	(d)	24.	(d)	25.	(c)
26.	(b)	27.	(d)	28.	(b)	29.	(d)	30.	(b)
31.	(b)	32.	(c)	33.	(a)				

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न 2 अंक

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 140 **(ii) 156** [UP 2022 AW, 23 DW]

(iii) 3825 **(iv) 5005**

हल : (i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

$= 2^2 \times 5 \times 7$ उत्तर

(ii) $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$= 2^2 \times 3 \times 13$ उत्तर

(iii) $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

$= 3^2 \times 5^2 \times 17$ उत्तर

(iv) $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ उत्तर

प्रश्न 2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है :

(i) 26 और 91 [UP 2022 AW] **(ii) 510 और 92**

हल : (i) 26 और 91

26 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 13$

91 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 7 \times 13$

अतः उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $= 13$

$\therefore$ HCF $= 13$

अब $LCM = 2 \times 7 \times 13 = 182$

∵ दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

∴ **बायाँ पक्ष** = दोनों संख्याओं का गुणनफल

$= 26 \times 91 = \mathbf{2366}$

दायाँ पक्ष = HCF × LCM

$= 13 \times 182 = \mathbf{2366}$

अतः **बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष** इति सिद्धम्

(ii) 510 और 92

510 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 3 \times 5 \times 17$

और 92 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 23$

अतः उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 2

∴ HCF = 2

अब $LCM = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$

∵ दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

∴ **बायाँ पक्ष** = दोनों संख्याओं का गुणनफल

$= 510 \times 92 = 46920$

दायाँ पक्ष = HCF × LCM $= 2 \times 23460 = 46920$

अतः **बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष** इति सिद्धम्

प्रश्न 3. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए :

(i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29

हल : (i) 12, 15 और 21

12 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 3$

15 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 3 \times 5$

और 21 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 3 \times 7$

अतः उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 3

∴ HCF = **3** उत्तर

अब $LCM = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = \mathbf{420}$ उत्तर

(ii) 17, 23 और 29

17 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 1 \times 17$

23 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 1 \times 23$

और 29 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 1 \times 29$

अतः उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 1

∴ HCF = **1** उत्तर

अब $LCM = 1 \times 17 \times 23 \times 29 = \mathbf{11339}$ उत्तर

प्रश्न 4. यदि 306 तथा 1314 का HCF 18 है , तो उनका LCM ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ HCF (306 तथा 1314) = 18

तथा संख्याएँ = 306 और 1314

दोनों संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

$$\therefore LCM = \frac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{HCF}$$

$$= \frac{306 \times 1314}{18} = 17 \times 1314 = \mathbf{22338}$$ उत्तर

प्रश्न 5. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में प्रिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में मयूर को 12 मिनट लगते हैं। माना वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे।

हल : प्रिया को एक चक्कर लगाने में लगा समय = 18 मिनट

मयूर को एक चक्कर लगाने में लगा समय = 12 मिनट

∵ वे एक ही समय चलना प्रारम्भ करते हैं तथा एक ही दिशा में चलते हैं, इसलिए सर्वप्रथम दोनों समयों का LCM निकालते हैं।

18 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 3 \times 3$

और 12 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 3$

∴ $LCM = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

अतः **36 मिनट बाद प्रिया एवं मयूर प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे।** उत्तर

प्रश्न 6. बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए, ज्ञात कीजिए कि क्या निम्नलिखित संख्याओं का दशमलव प्रसार सांत होगा या असांत आवर्ती होगा। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

(i) $\frac{987}{10500}$ **[UP 2019 BB]**

(ii) $\frac{129}{2^2 \times 5^7 \times 7^5}$ **[UP 2020 MY]**

हल : (i) $\frac{987}{10500} = \frac{987}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}$

$= \frac{141 \times 7}{2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7}$

$= \frac{141}{2^2 \times 3 \times 5^3} = \frac{47 \times 3}{2^2 \times 5^3 \times 3} = \frac{47}{2^2 \times 5^3}$

∵ दी गई परिमेय संख्या में हर के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n 5^m$ के रूप के हैं।

अतः **इसका दशमलव प्रसार सांत होगा।** उत्तर

(ii) ∵ $\frac{129}{2^2 \times 5^7 \times 7^5}$ का हर $2^m . 5^n$ के रूप का नहीं है

अतः **इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।**

लघु उत्तरीय प्रश्न 4 अंक

प्रश्न 1. संख्या 0.666..... को p/q के रूप में प्रदर्शित कीजिए। **[UP 2020 MV]**

हल : माना $x = 0.6666.....$ (i)

यहाँ दी गई संख्या के दशमलव प्रसार में केवल एक ही अंक की पुनरावृत्ति हो रही है।

समीकरण (i) में 10 से गुणा करने पर,

$10x = 6.6666.....$ (ii)

समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर,

$9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

∴ दी गई संख्या $= \frac{2}{3}$ उत्तर

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $5 + \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। **[UP 2023 EB]**

हल : माना $5 + \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है, जो x/y के बराबर है, तथा $y \neq 0$

∴ $\frac{x}{y} = 5 + \sqrt{3}$ ...(i)

या $\sqrt{3} = \frac{x}{y} - 5$

$\because$ 5 तथा $\frac{x}{y}$ परिमेय संख्याएँ हैं।

$\therefore \frac{x}{y} - 5$ भी एक परिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt{3}$ = परिमेय सेख्या

परन्तु $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\because$ एक अपरिमेय संख्या एक परिमेय संख्या के बराबर नहीं हो सकती।

अतः $\sqrt{3} \neq \frac{x}{y} - 5$

अतः हमारी कल्पना असत्य है कि दी गयी संख्या परिमेय है।

अतः $5 + \sqrt{3}$ **एक अपरिमेय संख्या होगी।** **इति सिद्धम्**

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए $2 - \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। [UP 2022 RE]

हल : माना, यदि सम्भव है, तो $2 - \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

माना $2 - \sqrt{5} = \frac{p}{q}$, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

$\Rightarrow \quad \sqrt{5} = 2 - \frac{p}{q} \Rightarrow \quad \sqrt{5} = \frac{2q - p}{q}$

$\because$ p और q पूर्णांक हैं

$\therefore \quad \frac{2q - p}{q}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

जो एक विरोधाभास है, अत: हमारी कल्पना गलत है।

अतः $2 - \sqrt{5}$ एक एक अपरिमेय संख्या है। **इति सिद्धम्**

प्रश्न 4. सिद्ध करो $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

[UP 2019 AX, 23 EA, ZZ]

हल : माना $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

जहाँ p तथा q सह अभाज्य संख्याएँ हैं तथा $q \neq 0$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow p^2, 2$ से भाज्य है।

$\therefore p, 2$ से भाज्य है। ...(i)

माना $p = 2r$ किसी धनात्मक पूर्णांक r के लिए

$\Rightarrow \quad p^2 = 4r^2$

$\therefore \quad 2q^2 = 4r^2 \quad (\because p^2 = 2q^2)$

$\Rightarrow \quad q^2 = 2r^2$

$\Rightarrow q^2, 2$ से भाज्य है।

$\therefore q, 2$ से भाज्य है। ...(ii)

समीकरण (i) व समीकरण (ii) से स्पष्ट है कि p तथा $q, 2$ से भाज्य है। यह कथन प्रारम्भ में प्राप्त तथ्य कि p व q सह अभाज्य हैं, का विरोधी है।

अतः हमारी कल्पना गलत है।

$\therefore \sqrt{2}$ **एक अपरिमेय संख्या है।** **इति सिद्धम्**

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए $(2 + \sqrt{3})$ एक अपरिमेय संख्या है।

[UP 2022 BA]

हल : माना, यदि सम्भव है, तो $(2 + \sqrt{3})$ एक अपरिमेय संख्या है।

माना $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, जहाँ p और q, पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2 \Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{p - 2q}{q}$

$\because$ p और q, पूर्णांक हैं।

$\therefore \quad \frac{p - 2q}{q}$ एक परिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

जो एक विरोधाभास है। अत: हमारी कल्पना गलत है।

इस प्रकार, $(2 + \sqrt{3})$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 6. बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए दिखाइए कि परिमेय संख्

$\frac{1351}{1250}$ **सांत दशमलव है।** [UP 2022 AY]

हल : $\frac{1351}{1250} = \frac{1351}{2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1351}{2 \times 5^4}$

यहाँ हर के अभाज्य गुणनखण्डों में केवल 2 और 5 हैं।

अत: $\frac{1351}{1250}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

प्रश्न 7. परिमेय संख्या $\frac{129}{2^3 \times 5^7}$ का सांत दशमलव प्रसार ज्ञात कीजि

[UP 2022 AZ]

हल : $\frac{129}{2^3 \times 5^7} = \frac{129 \times 2^4}{2^7 \times 5^7} = \frac{129 \times 16}{10^7}$

$= \frac{2064}{10^7} = 0.0002064$ उत्त

प्रश्न 8. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 96 और 404 का HCF अ LCM ज्ञात कीजिए। [UP 2022 A

हल :

2 | 96	2 | 404
2 | 48	2 | 202
2 | 24	101
2 | 12	
2 | 6	
3	

$\therefore$ 96 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3^1$

404 $= 2 \times 2 \times 101 = 2^2 \times 101^1$

HCF (96, 404) $= 2^2 = 4$

LCM (96, 404) $= 2^5 \times 3^1 \times 101^1 = 9696$

प्रश्न 9. बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए दिखाइए कि परिमेय संख

$\frac{66}{180}$ **सांत दशमलव है या असांत आवर्ती दशमलव है। बि**

वास्तविक विभाजन किए परिमेय संख्या $\frac{13}{125}$ का दशम

प्रसार भी ज्ञात कीजिए। [UP 2022

हल : $\frac{66}{180}=\frac{2\times3\times11}{2\times2\times3\times3\times5}=\frac{11}{2\times3\times5}$

$\because$ हर के अभाज्य गुणनखण्ड में 3 भी है।

$\therefore$ $\frac{66}{180}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

अब, $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times2^3}{2^3\times5^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$ **उत्तर**

विस्तृत उत्तरीय प्रश्न 6 अंक

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

[UP 2019 AY, 20 NB, 22 AX, 23 DX]

हल : माना $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है,

$\therefore \frac{a}{b}=\sqrt{3}$, जहाँ a तथा b सह अभाज्य तथा पूर्णांक हैं व $b\neq0$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\frac{a^2}{b^2}=3$$

$$\Rightarrow \quad a^2=3b^2$$

$\Rightarrow a^2, 3$ से भाज्य है।

$\therefore a, 3$ से भाज्य है। ...(i)

पुनः माना $a=3c$

$$(3c)^2=3b^2 \quad (\because a^2=3b^2)$$

$$\Rightarrow \quad 9c^2=3b^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2=3c^2$$

$\Rightarrow b^2, 3$ से भाज्य है।

$\therefore b, 3$ से भाज्य है। ...(ii)

समीकरण (i) व समीकरण (ii) से,

$3, a$ तथा b का गुणनखण्ड है जबकि हमने प्रारम्भ में माना था कि a तथा b सह अभाज्य हैं।

अत: हमारी कल्पना गलत है कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है

अत: $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। **इति सिद्धम्**

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

[2020 NA, 21 HJ, 22 AW]

हल : आइए हम इसके विपरीत मान लेते हैं कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है, जहाँ a तथा b दो सहअभाज्य पूर्णांक हैं जबकि $b\neq0$

तब $$3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2}=\frac{a}{3b}$$

$\Rightarrow \sqrt{2}$ परिमेय संख्या है

[$\because 3, a$ और b पूर्णांक हैं। $\therefore \frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या है।]

यह इस तथ्य का विरोधाभास है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है। अतः हमारी परिकल्पना गलत है।

अतः $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 3. बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं—

(i) $\frac{13}{3125}$ **[UP 2018 AZ]** **(ii)** $\frac{17}{8}$

(iii) $\frac{637}{7280}$ **[UP 2020 NA]** **(iv)** $\frac{15}{1600}$ **[UP 2019 AX]**

हल : (i) $\frac{13}{3125}$

सर्वप्रथम भिन्न के हर के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

$$3125=5\times5\times5\times5\times5=5^5$$

$\because$ हर के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n\ 5^m$ के रूप के हैं, इसलिए दशमलव प्रसार सांत होगा, परन्तु दी हुई समस्या में केवल 5^m का वर्णन है अर्थात् 2^n के लिए हमें 2^0 का प्रयोग करना उचित होगा।

$\therefore \quad 3125=2^0.5^5$

अतः **$\frac{13}{1325}$ का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

(ii) $\frac{17}{8}$

सर्वप्रथम भिन्न के हर के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

$$8=2\times2\times2=2^3$$

चूँकि हर के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n\ 5^m$ के रूप के हैं, इसलिए दशमलव प्रसार सांत होगा। परन्तु दी हुई समस्या में 2^n का वर्णन है अर्थात् 5^m के लिए हमें 5^0 का प्रयोग करना उचित होगा।

$\therefore \quad 8=2^3.5^0$

अतः **$\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

(iii) $\frac{637}{7280}$ सर्वप्रथम भिन्न के हर के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

$$7280=2\times2\times2\times2\times5\times13\times7$$
$$=2^4\times5^1\times13^1\times7^1$$

हर के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n\ 5^m$ के रूप के नहीं हैं।

$\therefore$ **$\frac{637}{7280}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।** **उत्तर**

(iv) $\frac{15}{1600}$

सर्वप्रथम भिन्न से हर के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर,

$$1600=2\times2\times2\times2\times2\times5\times5=2^6\times5^2$$

$\because$ हर के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n\ 5^m$ के रूप के हैं।

$\therefore$ **$\frac{15}{1600}$ का दशमलव प्रसार सांत आवर्ती होगा।** **उत्तर**

प्रश्न 4. निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{13}{3125}$ **(ii)** $\frac{31}{2^2\times5^3}$ **[UP 2020 NB]**

(iii) $\frac{15}{1600}$ **(iv)** $\frac{6}{15}$

हल : $\frac{13}{3125}$

भिन्न के हर 3125 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$=5\times5\times5\times5\times5=5^5$$

$$\therefore \quad \frac{13}{3125}=\frac{13}{5^5}=\frac{13\times2^5}{2^5\times5^5}$$

[$\because$ अंश एवं हर में 2^5 का गुणा करने पर]

$$= \frac{13 \times 32}{(2 \times 5)^5} = \frac{13 \times 32}{(10)^5} = \frac{416}{100000} = \mathbf{0.00416}$$

उत्तर

(ii) $\because$ $\frac{31}{2^2 \times 5^3}$ का हर $2^m \times 5^n$ के रूप का है

अतः स्पष्ट है कि दी गई भिन्न का दशमलव प्रसार सांत होगा।

अब $$\frac{31}{2^2 \times 5^3} = \frac{31 \times 2}{2^3 \times 5^3} = \frac{62}{(2 \times 5)^3}$$

$$= \frac{62}{(10)^3} = \frac{62}{1000} = \mathbf{0.062}$$ **उत्तर**

(iii) $\frac{15}{1600}$

भिन्न के हर 1600 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^6 \times 5^2$

$\therefore$ $$\frac{15}{1600} = \frac{15}{2^6 \times 5^2} = \frac{15 \times 5^4}{2^6 \times 5^2 \times 5^4}$$

[$\because$ अंश एवं हर में 5^4 का गुणा करने पर]

$$= \frac{15 \times 625}{2^6 \times 5^6} = \frac{9375}{(2 \times 5)^6}$$

$$= \frac{9375}{(10)^6} = \frac{9375}{1000000} = \mathbf{0.009375}$$ **उत्तर**

(iv) $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ $$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2}$$ [$\because$ अंश एवं हर में 2 का गुणा करने पर]

$$= \frac{4}{10} = \mathbf{0.4}$$ **उत्तर**