

MP BOARD CLASS 12 PAPER 2016

गणित : कक्षा XII

खण्ड 'अ'

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए—

5 × 1 = 5

(i) $2 \cos^{-1} x$ का मान है—

- (a) $\cos^{-1} (2x^2 + 1)$, (b) $\cos^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$,
(c) $\cos^{-1} (2x^2 - 1)$, (d) $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$.

(ii) $\frac{1}{x^2 + 2x}$ का आंशिक भिन्न रूप है—

- (a) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right]$, (b) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \right]$,
(c) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} \right]$, (d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$.

(iii) $\int_a^b \cos x \, dx$ का मान है—

- (a) $-\sin b + \sin a$, (b) $\sin b + \sin a$,
(c) $\cos b - \cos a$, (d) $\sin b - \sin a$.

(iv) सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप है—

- (a) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$, (b) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$, (c) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, (d) $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

(v) $\frac{d}{dx} \sin x^2$ का मान है—

- (a) $\cos x^2$, (b) $x \sin x^2$, (c) $2x \cos x^2$, (d) $x \cos x^2$.

उत्तर—(i) (c), (ii) (a), (iii) (d), (iv) (a), (v) (c).

2. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए—

5 × 1 = 5

- (i) आंकिक विधियों में सिम्पसन के एक तिहाई नियम का सूत्र लिखिए।
(ii) न्यूटन-रैफ्सन विधि से किसी संख्या N का घनमूल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।
(iii) समीकरण $x^3 - 2x - 5 = 0$ का मूल किस अन्तराल में स्थित है ?
(iv) यदि x_n किसी समीकरण $f(x) = 0$ का सन्निकट मूल हो तो न्यूटन-रैफ्सन विधि से x_{n+1} का मान लिखिए।
(v) सिम्पसन का नियम किस सिद्धान्त पर आधारित है ?

उत्तर—(i) $\int_a^b f(x) \, dx = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})$

$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]$, (ii) $\sqrt[3]{N} = \frac{1}{3} \left[2x_n + \frac{N}{x_n^2} \right]$, (iii) (2, 3),

(iv) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, (v) समाकलन के सिद्धान्त पर।

3. सही जोड़ी बनाइए—

5 × 1 = 5

'अ'

'ब'

(a) $\int \tan x \, dx$

(i) $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}, x > a$

- (b) $\int \cot x \, dx$ (ii) $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}, x < a$
 (c) $\int \sec x \, dx$ (iii) $\log \sin x$
 (d) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx$ (iv) $-\log \cos x$
 (e) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx$ (v) $\log (\sec x + \tan x)$

उत्तर—(a) $\rightarrow$ (iv), (b) $\rightarrow$ (iii), (c) $\rightarrow$ (v), (d) $\rightarrow$ (i), (e) $\rightarrow$ (ii)।

4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

5 $\times$ 1 = 5

- (i) उस समतल का समीकरण जो अक्षों से इकाई अन्तःखण्ड काटे होगा।
 (ii) समतलों $2x - y + z = 6$ और $x + y + 2z = 3$ के मध्य न्यूनकोण है।
 (iii) x -अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण है।
 (iv) बिन्दु (18, 5, 12) की x -अक्ष से लम्बवत् दूरी है।
 (v) $\sin x^3$ का x^3 के सापेक्ष अवकल गुणांक है।

उत्तर—(i) $x + y + z = 1$, (ii) 60° , (iii) $by + cz + d = 0$, (iv) 13, (v) $\cos x^3$.

5. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य लिखिए—

5 $\times$ 1 = 5

- (i) सहसम्बन्ध गुणांक का मान 1 से अधिक होता है।
 (ii) सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है।
 (iii) जब किसी वस्तु को ऊपर की ओर फेंका जाता है तो ऊपर की ओर जाने पर g का मान धनात्मक होता है।
 (iv) सदिश बीजगणित में विस्थापन सदिश राशि है।
 (v) किसी सदिश का वर्ग उसके मापांक के वर्ग के बराबर होता है।
 उत्तर—(i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, (v) सत्य।

खण्ड 'ब'

6. सदिश $6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ की दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। 2 अथवा
 यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ हो तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात कीजिए।
 7. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हों तो अदिश λ का मान ज्ञात कीजिए। 2 अथवा
 दो सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
 8. उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र $(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ तथा त्रिज्या 5 हो। 2 अथवा
 दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ के प्रतिच्छेदी होने का प्रतिबन्ध लिखिए।
 9. $\int \sec^2 x \tan^3 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2 अथवा
 $\int \frac{1}{e^x + 1} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
 10. $\int x \sin x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2 अथवा
 $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. सिद्ध कीजिए कि : $\tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5}$. 4 अथवा

सिद्ध कीजिए कि : $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{8}{17} = \sin^{-1} \frac{77}{85}$.

12. $\frac{11-2x}{x^2+9x+14}$ को आंशिक भिन्नो में व्यक्त कीजिए। 4 अथवा

$\frac{x}{1+x^3}$ को आंशिक भिन्नो में व्यक्त कीजिए।

13. $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए। 4 अथवा

यदि $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $y = \tan x + \sec x$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$. 4 अथवा

$\sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$ का $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

15. एक घन की कोर 7 सेमी/सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। जब घन की कोर 10 सेमी लम्बी है, तब घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है ? 4 अथवा

दो धनात्मक संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 64 तथा योग न्यूनतम है।

16. निम्नांकित आँकड़ों के लिए x तथा y में सहसम्बन्ध की गुणांक की गणना कीजिए :

x	5	9	13	17	21
y	12	20	25	33	35

सहसम्बन्ध गुणांक $f(x, y)$ ज्ञात कीजिए :

जबकि $\text{cov}(x, y) = -2.25$

$\text{var}(x) = 6.25$, और $\text{var}(y) = 20.25$.

17. निम्नांकित सारणी द्वारा ग्वालियर में 75 रुपए मूल्य के संगत भोपाल में सर्वाधिक उचित मूल्य ज्ञात कीजिए।

	ग्वालियर	भोपाल
औसत मूल्य	65	67
मानक विचलन	2.5	3.5

दो नगरों में वस्तु के मूल्यों में सहसम्बन्ध गुणांक 0.8 है। 4 अथवा

यदि y की x पर समाश्रयण रेखा $ax + by + c = 0$ है तथा x की y पर समाश्रयण रेखा $a_1x + b_1y + C_1 = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि $ab_1 \leq a_1b$.

18. बिन्दु $(-1, 3, 2)$ से गुजरने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $x + 2y + 2z = 11$ तथा $3x + 3y + 2z = 15$ पर लम्ब हो। 5 अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक घन के विकर्णों के बीच का कोण $\tan^{-1}(2\sqrt{2})$ होता है।

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cot x}{1 - \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5 अथवा

यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sin bx}, & x \neq 0 \\ a/b, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर फलन के सांतत्य की विवेचना कीजिए।

20. $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5 अथवा

दो वक्रों $y^2 = 9x$ तथा $x^2 = 9y$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

21. अवकल समीकरण $x + y \frac{dy}{dx} = 2y$ को हल कीजिए।

5 अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ को हल कीजिए।

22. 1 से 16 तक अंकित टिकटों को मिला दिया गया और एक टिकट यादृच्छया खींची गई। उस पर लिखी गई संख्या 2 से 3 का गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5 अथवा एक पाँसा दो बार फेंका जाता है। प्रत्येक फेंक में सम संख्या आने पर 'सफलता' मानी जाती है। सफलताओं का प्रायिकता वितरण ज्ञात कीजिए।

23. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(1, 2, 3)$, $(3, 0, 3)$, $(-2, -3, -3)$ तथा $(3, 4, 6)$ समतलीय हैं।

6 अथवा

किसी गोले के एक व्यास के सिरों के निर्देशांक $(1, 0, 1)$ और $(5, 4, 5)$ हैं। गोले का समीकरण, केन्द्र व व्यास ज्ञात कीजिए।

24. यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ तथा $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6 अथवा

सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज जिसके शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ तथा $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ हैं, एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है।

E-445(H/E) HIGHER MATHEMATICS 2016

Time : 3 Hours]

Class : 12th

[M. M. : 100

Instructions-

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) Read instructions carefully of the question paper and then answers of the questions.
- (iii) Question paper has two sections-Section 'A' and Section 'B'.
- (iv) In the section-'A' Question Nos. 1 to 5 are objective type. Each question carries 5 marks.
- (v) In the section 'B' Question Nos. 6 to 24 has Internal option.
- (vi) Q.Nos. 6 to 10 carry 2 marks each.
- (vii) Q.Nos. 11 to 17 carry 4 marks each.
- (viii) Q.Nos. 18 to 22 carry 5 marks each.
- (ix) Q.Nos. 23 to 24 carry 6 marks each.

Section 'A'

Q. 1.

Choose the correct options:

5 × 1 = 5

(i) The value of $2\cos^{-1}x$ is:

- (a) $\cos^{-1}(2x^2+1)$ (b) $\cos^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$
 (c) $\cos^{-1}(2x^2-1)$ (d) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(ii) The partial fraction form of $\frac{1}{x^2+2x}$ is:

- (a) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right]$ (b) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right]$
 (c) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\right]$ (d) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$

(iii) The value of $\int_a^b \cos x \, dx$ is:

- (a) $-\sin b + \sin a$ (b) $\sin b + \sin a$
 (c) $\cos b - \cos a$ (d) $\sin b - \sin a$

(iv) Projection of vector $\vec{a}$ on $\vec{b}$

- (a) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ (b) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
 (c) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ (d) $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{b}|}$

(v) The value of $\frac{d}{dx} \sin x^2$ is:

- (a) $\cos x^2$ (b) $x \sin x^2$
 (c) $2x \cos x^2$ (d) $x \cos x^2$

Q. 2.

Answer in one word/sentence:

5 × 1 = 5

- (i) Write Simpson's one-third rule formula in numerical methods.
 (ii) In Newton-Raphson's method write the formula for finding cube root of the number N.
 (iii) In which interval does the root of equation $x^3 - 2x - 5 = 0$ lie.
 (iv) If x_n is a nearer root of equation $f(x) = 0$, then write the value of x_{n+1} by Newton-Raphson's method.
 (v) On which principle is Simpson's rule based?

Q.3. Match the correct pair:

5 × 1 = 5

'A'

'B'

(a) $\int \tan x dx$

1. $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}, x > a$

(b) $\int \cot x dx$

2. $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}, x < a$

(c) $\int \sec x dx$

3. $\log \sin x$

(d) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$

4. $-\log \cos x$

(e) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$

5. $\log (\sec x + \tan x)$

Q.4. Fill in the blanks:

5 × 1 = 5

- (i) Equation of the plane which intercepts unit length from coordinate axes is
- (ii) The acute angle between the planes $2x - y + z = 6$ and $x + y + 2z = 3$ is
- (iii) The equation of plane parallel to x - axis is
- (iv) The perpendicular distance of point (18, 5, 12) from x - axis is
- (v) Differential coefficient of $\sin x^3$ with respect to x^3 is

Q.5. Write True/False in the following statements:

5 × 1 = 5

- (i) The value of coefficient of correlation is greater than 1.
- (ii) The coefficient of correlation is the geometric mean of the regression co-efficients.
- (iii) When a body is thrown up, the sign of g is positive when it goes up.
- (iv) In vector Algebra displacement is a vector quantity.
- (v) Square of a vector is equal to square of its modulus.

Section 'B'

Q.6. Find the direction cosines of the vector $6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ 2

(OR) If $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ and $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ then find the value of $\vec{a} \times \vec{b}$

Q.7. If $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ are perpendicular to each other then find the value of scalar λ 2

(OR) Find the angle between two vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

Q. 8. Find the vector equation of the sphere with centre $(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ and radius 5 units. 2

(OR) Write the condition for intersecting the two lines $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ and $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$

Q. 9. Find the value of $\int \sec^2 x \tan^3 x \, dx$. 2

(OR) Find the value of $\int \frac{1}{e^x + 1} \, dx$

Q. 10. Find the value of $\int x \sin x \, dx$ 2

(OR) Find the value of $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx$

Q. 11. Prove that: 4

$$\tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5}$$

(OR) Prove that:

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{8}{17} = \sin^{-1} \frac{77}{85}$$

Q. 12. Resolve $\frac{11-2x}{x^2+9x+14}$ into partial fractions. 4

(OR) Resolve $\frac{x}{1+x^3}$ into partial fractions.

Q. 13. Differentiate $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ with respect to x . 4

(OR) If $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$

Q. 14. If $y = \tan x + \sec x$, then prove that $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ 4

(OR) Find the differential coefficient of $\sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$ with respect to $\tan^{-1} x$.

- Q. 15. The edge of a cube is increasing at the rate of 7 cm/sec. How fast is the volume of the cube increasing when the edge is 10 cm long? 4

(OR) Find two positive numbers whose product is 64 and the sum is minimum.

- Q. 16. Calculate the correlation coefficient between x and y for the following data: 4

x	5	9	13	17	21
y	12	20	25	33	35

(OR) Find correlation coefficient $r(x, y)$, where

$$\text{cov}(x, y) = -2.25,$$

$$\text{var}(x) = 6.25,$$

$$\text{and var}(y) = 20.25$$

- Q. 17. An article costs Rs. 75 at Gwalior. Find the corresponding most appropriate value at Bhopal using the following data: 4

	Gwalior	Bhopal
Mean value	65	67
Standard Deviation	2.5	3.5

The correlation coefficient between the values of the two cities is 0.8.

(OR) If the regression line of y on x is $ax + by + c = 0$ and that of x on y is $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, then prove that $ab_1 \leq a_1b$.

- Q. 18. Find the equation to the plane through the point $(-1, 3, 2)$ and perpendicular to the planes $x + 2y + 2z = 11$ and $3x + 3y + 2z = 15$. 5

(OR) Prove that the angle between any two diagonals of a cube is $\tan^{-1}(2\sqrt{2})$

- Q. 19. Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cot x}{1 - \cos x}$ 5

(OR)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sin bx}, & x \neq 0 \\ \frac{a}{b}, & x = 0 \end{cases}$$
 Test the continuity of function at $x = 0$.

- Q.20. Find the value of $\int \frac{dx}{3+2\cos^2 x}$ 5
- (OR) Find the area included between the two curves $y^2 = 9x$ and $x^2 = 9y$.
- Q.21. Solve the differential equation $x + y \frac{dy}{dx} = 2y$. 5
- (OR) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$.
- Q.22. Tickets are marked from 1 to 16 and mixed up. One ticket is taken out at random. Find the probability of its being a multiple of 2 or 3. 5
- (OR) A dice is thrown twice. A success is an even number on each throw. Find the probability distribution of the number of successes.
- Q.23. Prove that the points (1, 2, 3), (3, 0, 3), (-2, -3, -3) and (3, 4, 6) are coplanar. 6
- (OR) The coordinates of ends of one diameter of a sphere are (1, 0, 1) and (5, 4, 5). Find the equation, centre and diameter of sphere.
- Q.24. If $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ then find the value of $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ and $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ 6
- (OR) Prove that the triangle, whose position vectors of the vertices are $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ and $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ respectively, is an isosceles right angled triangle.

