પ્રકરણ 13

પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- **લંબઘનની લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h**

  (a) લંબઘનનું ઘનફળ = lbh

  (b) લંબઘનનાં પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ = $2h(l+b)$

  (c) લંબઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $2(lb+bh+hl)$

  (d) લંબઘનનો વિકર્ણ = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$

- **સમઘનની ધાર = a**

  (a) સમઘનનું ઘનફળ = a^3

  (b) સમઘનનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ = $4a^2$

  (c) સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $6a^2$

  (d) સમઘનનો વિકર્ણ = $a\sqrt{3}$

- **નળાકારની ત્રિજ્યા r, ઊંચાઈ h**

  (a) નળાકારનું ઘનફળ = $\pi r^2 h$

  (b) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi rh$

  (c) નળાકારની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ = $2\pi r(r+h)$

- **શંકુની ઊંચાઈ h, ત્રિજ્યા r અને તિર્યક ઊંચાઈ l**

  (a) શંકુનું ઘનફળ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

  (b) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

(c) શંકુની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ = $\pi r\ (l + r)$

(d) શંકુની તિર્યક (ત્રાંસી) ઊંચાઈ (l) = $\sqrt{h^2+r^2}$

- **ગોળાની ત્રિજ્યા = r**

(a) ગોળાનું ઘનફળ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

(b) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4\pi r^2$

- **અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા = r**

(a) અર્ધગોળાનું ઘનફળ = $\frac{2}{3}\pi r^3$

(b) અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi r^2$

(c) અર્ધગોળાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ = $3\pi r^2$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 1 : એક નળાકારની ત્રિજ્યા અડધી અને ઊંચાઈ બમણી કરીએ તો ઘનફળ પર શું અસર થશે ?

(A) સરખું (B) બમણું (C) અડધું (D) ચાર ગણું

ઉકેલ : ધારો કે નળાકારની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h છે.

તેથી નળાકારનું ઘનફળ = $\pi r^2 h$

હવે નળાકારની ત્રિજ્યા $R = \frac{r}{2}$ અને ઊંચાઈ $H = 2h$ કરીએ,

તો તેથી બનતા નવા નળાકારનું ઘનફળ = $\pi R^2 H$

$$= \pi \frac{r^2}{4} \times 2h$$

$$= \frac{1}{2}(\pi r^2 h)$$

$$= \frac{1}{2}\ (\text{મૂળ નળાકારનું ઘનફળ})$$

જવાબ (C)

સ્વાધ્યાય 13.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 10 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

1. એક ગોળાની ત્રિજ્યા $2r$ છે, તો તેનું ઘનફળ ....

(A) $\frac{4}{3}\pi r^3$ (B) $4\pi r^3$ (C) $\frac{8\pi r^3}{3}$ (D) $\frac{32}{3}\pi r^3$

2. ઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ 96 સેમી^{2} છે. તો ઘનનું ઘનફળ ....

(A) 8 સેમી^{3} (B) 512 સેમી^{3} (C) 64 સેમી^{3} (D) 27 સેમી^{3}

3. એક શંકુની ઊંચાઈ 8.4 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 2.1 સેમી છે. તેને પીગાળીને ગોળામાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. તે ગોળાની ત્રિજ્યા ....

(A) 4.2 સેમી (B) 2.1 સેમી (C) 2.4 સેમી (D) 1.6 સેમી

4. એક નળાકારની ત્રિજ્યા બમણી અને ઊંચાઈ અડધી કરતાં તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ .... થશે.

(A) અડધું (B) બમણું (C) સરખું (D) ચાર ગણું

5. જેની ત્રિજ્યા $\frac{r}{2}$ અને તિર્યક ઊંચાઈ $2l$ હોય એવા શંકુની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ ....

(A) $2\pi r\,(l + r)$ (B) $\pi r\left(l + \frac{r}{4}\right)$ (C) $\pi r\,(l + r)$ (D) $2\pi rl$

6. બે નળાકારની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર 2:3 છે અને તેમની ઊંચાઈઓનો ગુણોત્તર 5:3 છે. તેમના ઘનફળનો ગુણોત્તર ....

(A) 10 : 17 (B) 20 : 27 (C) 17 : 27 (D) 20 : 37

7. સમઘનનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ 256 મી^{2} છે. તે સમઘનનું ઘનફળ ....

(A) 512 મી^{3} (B) 64 મી^{3} (C) 216 મી^{3} (D) 256 મી^{3}

8. 16 મી લંબાઈ, 12 મી પહોળાઈ અને 4 મી ઊંડાઈ ધરાવતા ખાડામાં 4 મી × 50 સેમી × 20 સેમી પરિમાણ ધરાવતા .... પાટિયાં સમાઈ શકે.

(A) 1900 (B) 1920 (C) 1800 (D) 1840

9. 10 મી × 10 મી × 5 મી પરિમાણવાળા ઓરડામાં મૂકી શકાય એવા લાંબામાં લાંબા થાંભલાની લંબાઈ ....

(A) 15 મી (B) 16 મી (C) 10 મી (D) 12 મી

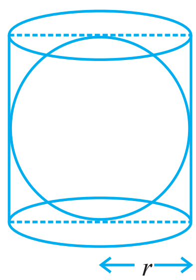
10. અર્ધગોળાકાર ફુગ્ગામાં હવા ભરતાં તેની ત્રિજ્યા 6 સેમી થી વધીને 12 સેમી થાય છે. તો બંને કિસ્સામાં ફૂગ્ગાની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર ....

(A) 1 : 4 (B) 1 : 3 (C) 2 : 3 (D) 2 : 1

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો અને તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો :

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 13.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે r ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો, એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં ચુસ્ત બંધ કરેલો છે. ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ એ નળાકારની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું થાય.



આકૃતિ 13.1

ઉકેલ : સત્ય.

અહીં, ગોળાની ત્રિજ્યા = નળાકારની ત્રિજ્યા = r

ગોળાનો વ્યાસ = નળાકારની ઊંચાઈ = $2r$

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4\pi r^2$

નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi r\,(2r) = 4\pi r^2$

ઉદાહરણ 2 : એક ઘનની ધાર r સેમી માપની છે. જો આ ઘનમાંથી શક્ય તેટલો મોટામાં મોટો લંબવૃત્તીય શંકુ કાપવામાં આવે, તો શંકુનું ઘનફળ $\frac{1}{6}\pi r^3$ સેમી^{3} થાય.

ઉકેલ : અસત્ય.

શંકુની ઊંચાઈ = r સેમી, પાયાનો વ્યાસ = r સેમી

તેથી, શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 .r$

$= \frac{1}{12}\pi r^3$

સ્વાધ્યાય 13.2

નીચેનાં પૈકી પ્રત્યેક વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો અને તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો.

1. ગોળાનું ઘનફળ, જેની ઊંચાઈ અને વ્યાસ ગોળાના વ્યાસ જેટલો છે તેવા નળાકારના ઘનફળના બે તૃતીયાંશ જેટલું છે.
2. જો લંબવૃત્તીય શંકુની ત્રિજ્યા અડધી અને ઊંચાઈ બમણી કરીએ તો તેનું ઘનફળ બદલાતું નથી.
3. એક લંબવૃત્તીય શંકુમાં ઊંચાઈ, ત્રિજ્યા અને તિર્યક ઊંચાઈ હંમેશાં કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ ન હોઈ શકે.
4. જો નળાકારની ત્રિજ્યા બમણી કરીએ અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ બદલવામાં ન આવે તો તેની ઊંચાઈ અડધી જ થાય.
5. એક $2r$ ધારવાળા ઘનમાં બંધબેસતો હોય તેવા સૌથી મોટા લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ r ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોળાના ઘનફળ બરાબર હોય છે.
6. એક નળાકાર અને એક લંબવૃત્તીય શંકુ સમાન પાયાના અને સમાન ઊંચાઈના છે. નળાકારનું ઘનફળ, શંકુના ઘનફળ કરતાં ત્રણ ગણું હોય.
7. એક શંકુ, અર્ધગોળો અને નળાકાર સમાન પાયા પર અને સમાન ઊંચાઈ ધરાવે છે. તેમનાં ઘનફળનો ગુણોત્તર 1 : 2 : 3 થાય.
8. જો એક ઘનના વિકર્ણની લંબાઈ $6\sqrt{3}$ સેમી હોય, તો તે ઘનની ધારની લંબાઈ 3 સેમી છે.
9. જો એક ગોળો, ઘનની અંતર્ગત હોય, તો ઘનના ઘનફળ અને ગોળાના ઘનફળનો ગુણોત્તર $6 : \pi$.
10. જો નળાકારની ત્રિજ્યા બમણી અને ઊંચાઈ અડધી કરીએ તો તેનું ઘનફળ બમણું થશે.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 5 સેમી ત્રિજ્યાના ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ, 4 સેમી ત્રિજ્યાના શંકુની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ કરતાં પાંચ ગણું છે. તો શંકુનું ઘનફળ અને ઊંચાઈ શોધો. $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

ઉકેલ : ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4\pi \times 5 \times 5$ સેમી^{2}.

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\pi \times 4 \times l$ સેમી^{2},

અહીં l એ શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ છે,

આપેલા વિધાન પ્રમાણે,

$4\pi \times 5 \times 5 = 5 \times \pi \times 4 \times l$

$\therefore l = 5$ સેમી

હવે $l^2 = h^2 + r^2$

તેથી, $(5)^2 = h^2 + (4)^2$

જ્યાં h એ શંકુની ઊંચાઈ છે.

$\therefore (5)^2 - (4)^2 = h^2$

$\therefore 9 = h^2$

$\therefore h = 3$ સેમી

$\therefore$ શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$ સેમી^{3}

$= \frac{22 \times 16}{7}$ સેમી^{3}

$= \frac{352}{7}$ સેમી^{3} $= 50.29$ સેમી^{3} (આશરે)

ઉદાહરણ 2 : ગોળાની ત્રિજ્યા 10% વધે છે. સાબિત કરો કે તેનું ઘનફળ આશરે 33.1% વધે છે.

ઉકેલ : ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

ત્રિજ્યામાં 10% વધારો $= \frac{r}{10}$

વધેલી ત્રિજ્યા $= r + \frac{1}{10}r = \frac{11r}{10}$

હવે ગોળાનું ઘનફળ $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{11r}{10}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1331}{1000} r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 1.331 r^3$

ઘનફળમાં થતો વધારો $= \frac{4}{3}\pi \times 1.331 r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi r^3 (1.331 - 1) = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 0.331$

ઘનફળમાં થતો પ્રતિશત વધારો $= \left[\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \times 0.331}{\frac{4}{3}\pi r^3} \times 100\right] = 33.1$

સ્વાધ્યાય 13.3

1. એક લંબઘન ખોખાનાં અંદરનાં પરિમાણ 16 સેમી × 8 સેમી × 8 સેમી છે. જો આ ખોખાને 2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા 16 ગોળા અને સંરક્ષક પ્રવાહીથી સંપૂર્ણ ભરવામાં આવે, તો આ પ્રવાહીનું ઘનફળ શોધો. તમારો જવાબ નજીકના પૂર્ણાંકમાં આપો. ($\pi = 3.14$ લો.)
2. એક સંગ્રાહક ટાંકી ઘનાકાર છે. જ્યારે તે પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલી હોય, ત્યારે તેમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ 15.625 મી^{3} છે. જો પાણીની ઊંડાઈ 1.3 મી હોય, તો ટાંકીમાંથી વપરાયેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.
3. 4.2 સેમી વ્યાસના ઘન ગોળાકાર દડાને પાણીમાં સંપૂર્ણપણે ડૂબાડતાં, તેણે ખસેડેલા પાણીનો જથ્થો શોધો.
4. એક શંકુ આકારના તંબુની ઊંચાઈ 3.5 મી અને પાયાની ત્રિજ્યા 12 મી છે. આવા તંબુને બનાવવા કેટલા ચોરસ મીટર તાડપત્રી જોઈએ ?
5. એક જ ધાતુના બનેલા બે નક્કર ગોળાઓનાં વજન અનુક્રમે 5920 ગ્રામ અને 740 ગ્રામ છે. જો નાના ગોળાનો વ્યાસ 5 સેમી હોય, તો મોટા ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.
6. એક શાળા વિદ્યાર્થીઓને રોજ 7 સેમી વ્યાસના નળાકાર ગ્લાસમાં દૂધ આપે છે. જો ગ્લાસમાં 12 સેમીની ઊંચાઈ સુધી દૂધ ભરેલું હોય તો 1600 વિદ્યાર્થીઓને આપવા માટે કેટલા લિટર દૂધ જોઈએ ?

7. એક નળાકાર રોલરની લંબાઈ 2.5 મી અને ત્રિજ્યા 1.75 મી છે. તેને રોડ પર ફેરવતાં તે 5500 મી^{2} નું ક્ષેત્રફળ આવરે છે. તેના માટે કેટલાં પરિભ્રમણ કરવાં પડે ?
8. એક નાના ગામની વસ્તી 5000 છે, દરરોજ એક વ્યક્તિ દીઠ 75 લિટર પાણીની જરૂર પડે છે. ગામમાં આવેલી ટાંકીનું માપ 40 મી × 25 મી × 15 મી છે. આ ટાંકીનું પાણી કેટલા દિવસ ચાલશે ?
9. એક દુકાનદાર પાસે 5 સેમી ત્રિજ્યાનો ગોળાકાર લાડુ છે. એક સમાન વસ્તુના 2.5 સેમી ત્રિજ્યાના આવા કેટલા લાડુ બનાવી શકાય ?
10. બાજુઓ 6 સેમી, 8 સેમી અને 10 સેમી વાળા કાટકોણ ત્રિકોણને 8 સેમી બાજુ તરફથી ભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે. તેથી બનતી આકૃતિની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 6 મી લંબાઈ અને 4 મી પહોળાઈની એક સમથળ લંબચોરસ સપાટી પર વરસાદનું પાણી પડે છે તેની અંદરની ત્રિજ્યા 20 સેમી હોય તેવા નળાકાર પાત્રમાં ભરાય છે. જો વરસાદ 1 સેમી પડે તો નળાકાર પાત્રમાં પાણીની ઊંચાઈ કેટલી હશે ? તમારો જવાબ નજીકના પૂર્ણાંકમાં આપો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : ધારો કે નળાકાર પાત્રમાં પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ h સેમી છે.

વરસાદી પાણીનું ઘનફળ = $600 \times 400 \times 1$ સેમી^{3}

નળાકાર પાત્રમાં પાણીનું ઘનફળ = $\pi (20)^2 \times h$ સેમી^{3}

વિધાન પ્રમાણે

$$600 \times 400 \times 1 = \pi (20)^2 \times h$$

અથવા
$$h = \frac{600}{3.14} \text{ સેમી} = 191 \text{ સેમી}$$

સ્વાધ્યાય 13.4

1. લોખંડના પતરાંમાંથી બનેલી 2 સેમી જાડી નળાકાર નળી બંને છેડેથી ખુલ્લી છે. જો બહારનો વ્યાસ 16 સેમી અને તેની લંબાઈ 100 સેમી હોય, તો આ નળી બનાવવા કેટલા ઘન સેમી લોખંડની જરૂર પડી હશે ?
2. એક અર્ધવર્તુળાકાર ધાતુના પતરાનો વ્યાસ 28 સેમી છે. તેને વાળીને ખુલ્લો શંકુ આકાર કપ બનાવવામાં આવે છે. આ કપની ક્ષમતા શોધો.
3. 5 મી ત્રિજ્યાનો શંકુ આકારનો તંબુ, 165 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળા કાપડમાંથી બનાવવામાં આવ્યો છે,
   (i) જો એક વિદ્યાર્થી, જમીન પર સરેરાશ $\frac{5}{7}$ મી^{2} જગ્યા રોકે, તો આ તંબુમાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ બેસી શકે ?
   (ii) આ શંકુનું ઘનફળ શોધો.
4. એક કારખાના માટેનું પાણી એક 14 મી અંદરના વ્યાસવાળી અર્ધગોળાકાર ટાંકીમાં ભરેલું છે. ટાંકીમાં 50 કિલોલિટર પાણી ભરેલું છે. ટાંકીની ક્ષમતા જેટલું પાણી તેમાં ભરવામાં આવે છે. ટાંકીમાં ભરવામાં આવેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.
5. બે ગોળાઓના ઘનફળનો ગુણોત્તર 64 : 27 છે. તેમની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.
6. 4 સેમી બાજુવાળા એક ઘનમાં તેની બાજુઓને અડે તેમ એક ગોળો ગોઠવેલો છે. તો વચ્ચેની ખાલી જગ્યાનું ઘનફળ શોધો.
7. સમાન ત્રિજ્યાવાળા એક ગોળા અને વૃત્તીય નળાકારનાં ઘનફળ સમાન છે. નળાકારનો વ્યાસ તેની ઊંચાઈથી કેટલા ટકા વધુ હોય ?
8. 30 વર્તુળાકાર તાસક પૈકી પ્રત્યેકની ત્રિજ્યા 14 સેમી અને જાડાઈ 3 સેમી છે તેને એકબીજા પર મૂકીને ઘન નળાકાર બનાવવામાં આવે છે. તો
   (i) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
   (ii) તેથી બનતા નળાકારનું ઘનફળ શોધો.