क्रमचय तथा संचय

Ex 6.1

प्रश्न 1. n का मान ज्ञात कीजिए, जबकि

(i) ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5 : 12$
(ii) ${}^{n}P_6 = 10 . {}^{n}P_5$
(iii) ${}^{56}P_{n+6} : {}^{54}P_{n+3} = 30800$
(iv) ${}^{6+n}P_2 : {}^{6-n}P_2 = 56 : 12$

हल : (i) दिया है।

$${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5 : 12$$

$$\therefore \quad \frac{{}^{n-1}P_3}{{}^{n+1}P_3} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-1-3} \times \frac{\lfloor n+1-3}{\lfloor n+1} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-4} \times \frac{\lfloor n-2}{\lfloor n+1} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lfloor n-1 \times (n-2)(n-3)\lfloor n-4}{\lfloor n-4 \times (n+1) \times n\lfloor n-1} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-2)(n-3)}{n(n+1)} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n^2-5n+6}{n^2+n} = \frac{5}{12}$$

या $\quad 12n^2 - 60n + 72 = 5n^2 + 5n$

या $\quad 7n^2 - 65n + 72 = 0$

या $\quad 7n^2 - 56n - 9n + 72 = 0$

या $\quad 7n(n - 8) - 9(n - 8) = 0$

या $\quad (n - 8)(7n - 9) = 0$

या $\quad n = 8, \frac{9}{7}$

n का मान भिन्न में नहीं हो सकता है।

$\therefore \quad n = 8$

(ii) $^{n}P_6 = 10 \,.\, ^{n}P_5$

या $\dfrac{^{n}P_6}{^{n}P_5} = 10 \Rightarrow \dfrac{\lfloor n}{\lfloor n-6} \times \dfrac{\lfloor n-5}{\lfloor n} = 10$

या $\dfrac{(n-5)\lfloor n-6}{\lfloor n-6} = 10$

या $(n-5) = 10$

$\therefore$ $n = 10 + 5 = 15$ **Ans.**

(iii) $^{56}P_{n+6} : {}^{54}P_{n+3} = 30800$

या $\dfrac{^{56}P_{n+6}}{^{54}P_{n+3}} = \dfrac{30800}{1}$

या $^{56}P_{n+6} = 30800 \times {}^{54}P_{n+3}$

या $\dfrac{\lfloor 56}{\lfloor 56-(n+6)} = 30800 \times \dfrac{\lfloor 54}{\lfloor 54-(n+3)}$

या $\dfrac{56 \times 55 \times \lfloor 54}{\lfloor 50-n} = \dfrac{30800 \times \lfloor 54}{\lfloor 51-n}$

या $\dfrac{56 \times 55}{\lfloor 50-n} = \dfrac{30800}{(51-n)(50-n)}$

या $(51-n) = \dfrac{30800}{56 \times 55}$

या $51 - n = 10$

$\therefore$ $n = 51 - 10 = 41$

(iv) $^{6+n}P_2 : {}^{6-n}P_2 = 56 : 12$

या $\dfrac{^{6+n}P_2}{^{6-n}P_2} = \dfrac{56}{12}$

या $12 \,.\, {}^{6+n}P_2 = 56 \,.\, {}^{6-n}P_2$

या $\dfrac{12\lfloor 6+n}{\lfloor 6+n-2} = \dfrac{56.\lfloor 6-n}{\lfloor 6-n-2}$

या $\dfrac{12\lfloor 6+n}{\lfloor 4+n} = \dfrac{56.\lfloor 6-n}{\lfloor 4-n}$

या $\dfrac{12 \times (6+n)(5+n)\lfloor 4+n}{\lfloor 4+n} = \dfrac{56 \times (6-n)(5-n)\lfloor 4-n}{\lfloor 4-n}$

या $\quad \dfrac{12\times(6+n)(5+n)\underline{|4+n}}{\underline{|4+n}} = \dfrac{56\times(6-n)(5-n)\underline{|4-n}}{\underline{|4-n}}$

या $\quad 12 \times (6 + n)(5 + n) = 56 \times (6 - n)(5 - n)$

$\quad 12 \times (n^2 + 11n + 30) = 56 \times (30 - 11n + n^2)$

या $\quad 12n^2 + 132n + 360 = 1680 - 616n + 56n^2$

या $\quad 56n^2 - 616n + 1180 - 12n^2 - 132n - 360 = 0$

या $\quad 44n^2 - 748n + 1320 = 0$

या $\quad n^2 - 17n + 30 = 0$

या $\quad (n - 15)(n - 2) = 0$

$\quad n = 2$ या 15

n का मान 15 नहीं हो सकता है।

$\therefore \quad n = 2$

प्रश्न 2. ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बने विभिन्न शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ पर कुल अक्षर 11 हैं। इनमें से चार A, दो L के अक्षर हैं।
अतः अभीष्ट संख्या होगी

$$\frac{\underline{|9}}{\underline{|4}\,\underline{|2}}$$

प्रश्न 3. TRIANGLE शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं? इनमें से कितने शब्द T से आरम्भ एवं E पर समाप्त होते

हल- TRIANGLE में सभी 8 अक्षर भिन्न-भिन्न हैं।
सभी 8 अक्षर लेकर क्रमचय (शब्द) बनाये जायें, तो शब्दों की कुल संख्या

कुल संख्या $= {}^8P_8 = \underline{|8}$

$\underline{|8} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 40320$

प्रत्येक शब्द T से प्रारम्भ हो तथा E पर समाप्त हो तो फिर D तथा। स्थिर हो जाते हैं और इसलिए हमें केवल 6 अक्षरों को ही व्यवस्थित करना है। अतः शब्दों की संख्या होगी

${}^6P_6 = \underline{|6} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

प्रश्न 4. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 3000 तथा 4000 के मध्य ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जो 5 से विभाज्य हैं ?

हल- 3000 से 4000 के मध्य प्रत्येक संख्या चार अंकों से बनती है और यह अंक 3 से आरम्भ होनी

चाहिए। अतः हमें शेष 5 अंकों 1, 2, 4, 5, 6 में से केवल 3 अंकों को ही चुनकर व्यवस्थित करना है, क्योंकि यहाँ अंकों की पुनरावृत्ति नहीं करनी है।
अतः अभीष्ट संख्याओं की गिनती = $^5P_3$

$$= \frac{|\underline{5}}{|\underline{5-3}} = \frac{|\underline{5}}{|\underline{2}}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times |\underline{2}}{|\underline{2}} = 60$$

इसे खण्ड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता है

1	6	5	2

$= 1 \times 6 \times 5 \times 2 = 60$

↑3
स्थिर

अब, दूसरे भाग में हम देखते हैं कि केवल वे ही संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी जिनके अन्त में अंक 5 होगा। अतः 4 अंकों वाली संख्याओं में अंक 3 आरम्भ के स्थान पर तथा अंक 5 अन्तिम स्थान पर निश्चित होंगे। इस प्रकार हमें शेष 4 अंकों में से केवल 2 अंकों को ही चुनकर व्यवस्थित करना है।

अतः अभीष्ट संख्याओं की गिनती = $^4P_2 = \frac{|\underline{4}}{|\underline{4-2}}$

$$= \frac{|\underline{4}}{|\underline{2}} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

इसे खण्ड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता।

1	4	3	1

$= 1 \times 4 \times 3 \times 1 = 12$

↑3 ↑
(स्थिर) (स्थिर)

प्रश्न 5. अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5 से छः अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

हल- दिए गए अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 से छः अंकों की बनने वाली संख्याएँ = 6
किन्तु इनमें वह संख्याएँ भी शामिल हैं जो 0 से प्रारम्भ होती है। अतः 0 से प्रारम्भ होने वाली संख्याएँ
$= 1 \times |\underline{5}$
अतः दिए गए अंकों में छः अंक की बनने वाली कुल संख्याएँ
$= |\underline{6} - |\underline{5} = 720 - 120 = 600$

प्रश्न 6. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 1000 से छोटी तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जबकि अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो?

हल- 6 अंकों में से 3 अंकों को लेकर बनने वाली संख्याएँ होंगी

$$^6P_3 = \frac{\lfloor 6}{\lfloor 6-3} = \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 120$$

प्रश्न 7. एक समिति के 15 सदस्ये एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि सचिव, अध्यक्ष के एक ओर तथा उप सचिव दूसरी ओर बैठता है?

हल- समिति में कुल सदस्यों की संख्या = 15
सचिव, अध्यक्ष एक ओर और उपसचिव दूसरी ओर बैठता है।
इस स्थिति में समिति में सदस्यों की संख्या = 13 हुई।
13 सदस्यों को गोल मेज के चारों ओर बैठाने के तरीके

$$= \lfloor 13-1 = \lfloor 12$$

अब सचिव, अध्यक्ष व उपसचिव को इस प्रकार बैठाने के तरीके जबकि सचिव, अध्यक्ष एक ओर और उपसचिव दूसरी ओर = 2 होंगे।
अतः दी गई शर्त के अनुसार समिति के 11 सदस्यों को गोल मेज के चारों ओर बैठाने के कुल तरीके

$$= \lfloor 12 \times \lfloor 2$$

प्रश्न 8. एक रेलवे लाइन पर 15 स्टेशन हैं। इसके लिए एक श्रेणी के कितने विभिन्न प्रकार के टिकट छपवाने चाहिए कि किसी भी स्टेशन से एक व्यक्ति इस लाइन के किसी अन्य स्टेशन को टिकट खरीद सके?

हल- एक रेलवे लाइन पर 15 स्टेशन हैं। इसलिए एक स्टेशन से दूसरे स्टेशन तक जाने के लिए अलग-अलग तरह की 14 टिकट की आवश्यकता पड़ेगी। इसका अर्थ यह हुआ कि प्रत्येक स्टेशन पर 14 तरह की अलग-अलग टिकट होनी चाहिए। अतः 15 स्टेशन के लिए = 14 x 15
= 210 तरह की टिकटों की आवश्यकता होगी।
इसलिए टिकटों की आवश्यकता = 210

प्रश्न 9. एक माला बनाने में 10 विभिन्न मोती कितने प्रकार से पिरोए जा सकते हैं, जबकि उनमें से चार विशेष मोती कभी भी पृथक् नहीं रहे?

हल- यहाँ पर हम चार विशेष मोती को एक मोती के बराबर मान लेंगे। इस प्रकार अब मोतियों की संख्या = 7

यहाँ पर यदि मोती दक्षिणावर्त दिशा में पिरोये जाते हैं तो माला को दूसरी ओर बदलने पर वे वामावर्त दिशा

में हो जाते हैं । इस प्रकार दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं से एक ही क्रम प्राप्त होता है। अतः विन्यासों की संख्या

$$= \frac{\lfloor 7-1}{2} = \frac{\lfloor 6}{2}$$

वे चार मोती जो कि कभी भी पृथक् नहीं होते हैं। वे आपस में 4 तरह से बदल सकते हैं।
अत: विन्यासों की कुल संख्या

$$= \lfloor 4 \times \frac{\lfloor 6}{2}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2 \times \lfloor 6}{2 \times 1} = 12 \times \lfloor 6$$

$$= 12 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 12 \times 30 \times 24 = 8640$$

प्रश्न 10. अंकों 0, 1, 2, …… 9 से ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जो 6000 या इससे बड़ी तथा 7000 से छोटी हो और 5 से विभाज्य हो । जबकि किसी भी अंक की कितनी भी बार पुनरावृत्ति हो सकती है?

हल- 6000 या इससे बड़ी तथा 7000 से छोटी संख्या का मतलब है कि संख्या 6000 से 6999 तक है। हमें यहाँ संख्या 4 अंकों की बनानी है, जिसमें पहला अंक 6 रहेगा तथा अन्तिम अंक 5 या शून्य का रहेगा। यहाँ अंकों की कितनी भी बार पुनरावृत्ति हो सकती है। इसे खण्ड बनाकर अग्रानुसार आसानी से समझा जा सकता है–

| 1 | 10 | 10 | 2 |

↑6 (स्थिर) ↑0 या 5 (स्थिर)

$$= 1 \times 10 \times 10 \times 2 = 200$$

प्रश्न 11. शब्द SCHOOL के अक्षरों से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं, जबकि दोनों O साथ-साथ नहीं आते हों?

हल- यहाँ पर कुल अक्षर 6 हैं। इनमें से दो O के अक्षर हैं। अतः
अभीष्ट शब्दों की संख्या

$$= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2}$$

दिया गया है कि O साथ-साथ आते हैं। इसलिए दोनों अक्षरों को एक ही मान लेंगे और इससे बनने वाले शब्द = 5
इसलिए अभीष्ट शब्दों की संख्या जबकि दोनों O साथ-साथ नहीं आते हों

$= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2} - \lfloor 5$

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} - 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 360 - 120 = 240$

Ex 6.2

प्रश्न 1. n का मान ज्ञात कीजिए, जबकि

(i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$
(ii) $^{20}C_{n-2} = {}^{20}C_{n+2}$
(iii) $^nC_{10} = {}^nC_{15}$

हल-

(i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$

$\Rightarrow \quad \frac{^{2n}C_3}{^nC_3} = \frac{11}{1}$

$\Rightarrow \quad {}^{2n}C_3 = 11 \,.\, {}^nC_3$

$\Rightarrow \quad \frac{\lfloor 2n}{\lfloor 2n-3 \times \lfloor 3} = \frac{11.\lfloor n}{\lfloor n-3 \times \lfloor 3}$

$\Rightarrow \quad \frac{2n.(2n-1)(2n-2)\lfloor 2n-3}{\lfloor 2n-3} = \frac{11.n(n-1)(n-2)\lfloor n-3}{\lfloor n-3}$

$\Rightarrow 2n(2n - 1)(2n - 2) = 11. n(n - 1)(n - 2)$
$\Rightarrow 2(4n^2 - 6n + 2) = 11(n^2 - 3n + 2)$

$\Rightarrow 8n^2 - 12n + 4 = 11. n^2 - 33n + 22$
$\Rightarrow 11n^2 - 33n + 22 - 8n^2 + 12n - 4 = 0$
$\Rightarrow 3n^2 - 21n + 18 = 0$
या $n^2 - 7n + 6 = 0$
या $(n - 6)(n - 1) = 0$
$\therefore n = 1, 6.$
लेकिन n = 1 रखने पर $^{2n}C_3$ और $^nC_3$ का मान निकालना सम्भव नहीं होगा इसलिए n = 6 होगा।

(ii) ${}^{20}C_{n-2} = {}^{20}C_{n+2}$
हम जानते हैं ${}^{n}C_{x} = {}^{n}C_{y} \Rightarrow x = y$ या $x + y = n$.
इस सूत्र का प्रयोग करते हुए
$n - 2 + n + 2 = 20$
$\Rightarrow 2n = 20$
$\Rightarrow n = 10$

(iii) ${}^{n}C_{10} = {}^{n}C_{15}$
उपरोक्त सूत्र से $n = 10 + 15 = 25$

प्रश्न 2. ${}^{50}C_{11} + {}^{50}C_{12} + {}^{51}C_{13} - {}^{52}C_{13}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल-

$({}^{50}C_{12} + {}^{50}C_{11}) + {}^{51}C_{13} - {}^{52}C_{13}$
अब सूत्र ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$ से
$= {}^{51}C_{12} + {}^{51}C_{13} - {}^{52}C_{13}$
$= ({}^{51}C_{13} + {}^{51}C_{12}) - {}^{52}C_{13}$
$= {}^{52}C_{13} - {}^{52}C_{13} = 0$

प्रश्न 3. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC, CA पर क्रमशः 3, 4 तथा 5 बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं से रचित कुल त्रिभुजों की संख्या कितनी होगी?

हल- यहाँ पर समतल में कुल बिन्दुओं की संख्या होगी
$= 3 + 4 + 5 = 12$
किसी त्रिभुज को बनाने के लिए 3 बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। इसलिए यदि 12 बिन्दुओं में से कोई भी तीन बिन्दु एक सरल रेखा में न हों तो 12 बिन्दुओं से ${}^{12}C_{3}$ त्रिभुज बन सकते हैं। किन्तु 3 बिन्दु एक सरल रेखा में होने के कारण ${}^{3}C_{3}$ त्रिभुज कम बनेंगे। इसी तरह से ${}^{4}C_{3}$ व ${}^{5}C_{3}$ त्रिभुज कम बनेंगे।

अतः त्रिभुज की अभीष्ट संख्या होगी।
$= {}^{12}C_{3} - ({}^{3}C_{3} + {}^{4}C_{3} + {}^{5}C_{3})$
$= 20 - (1 + 4 + 10)$
$= 20 - 15$
$= 5$

प्रश्न 4. एक सन्दूक में दो सफेद, तीन काली व चार लाल गेंदें हैं। इस सन्दूक से तीन गेंदें कितनी विधियों से निकाली जा सकती हैं, जिनमें कम से कम एक काली गेंद अवश्य हो?

हल- सन्दूक में कुल गेंदें $= 2 + 3 + 4 = 9$ जिनमें तीन काली तथा 6 अन्य गेंदें हैं।

अतः
स्थिति (i) जब एक काली व 2 अन्य गेंदें आयें तो कुल तरीके

$$= {}^6C_2 \times {}^3C_1 = \frac{6.5}{2.1} \times 3 = 45$$

स्थिति (ii) यदि दो काली व एक अन्य गेंद आये तो कुल तरीके

$$= {}^6C_1 \times {}^3C_2 = 6 \times \frac{3.2}{2.1} = 18$$

स्थिति (iii) यदि तीनों ही गेंदें काली आयें तो कुल तरीके
$= {}^3C_3 = 1$

इसलिए कुल तरीके (विधि) = 45 + 18 + 1 = 64

प्रश्न 5. छः विभिन्न रंगों की झण्डयों से एक या अधिक लेकर कितने प्रकार से संकेत दिये जा सकते हैं?

हल-

(i) एक झण्डी लेकर संकेत दिये जा सकते हैं = ${}^6C_1$ x 1
(ii) दो झण्डी लेकर संकेत दिये जा सकते हैं = ${}^6C_2$ x 2
(iii) तीन झण्डी लेकरे संकेत दिये जा सकते हैं = ${}^6C_3$ x 3
....
....
इसी तरह से छः झण्डी लेकर संकेत दिये जा सकते हैं।

$$= {}^6C_6 \times \underline{|6}$$

अतः कुल संकेत दिये जा सकते हैं

$${}^6C_1 \times \underline{|1} + {}^6C_2 \times \underline{|2} + {}^6C_3 \times \underline{|3} + {}^6C_4 \times \underline{|4} + {}^6C_5 \times \underline{|5} + {}^6C_6 \times \underline{|6}$$

$$= 6 + 6 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 + 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$$

प्रश्न 6. किसी बहुभुज में विकर्णो की संख्या 44 हैं, तो उसकी भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल- n भुजाओं वाले बहुभुज में n शीर्ष हैं, तो इन शीर्षों में से दोदो को लेकर बनाये जाने वाले विकर्णो की संख्या ${}^nC_2$ होगी।

अर्थात् $^nC_2 = \frac{\lfloor n}{\lfloor 2 \lfloor n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

लेकिन इनमें बहुभुज की n भुजाएँ भी शामिल हैं, अतः विकर्णों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

लेकिन विकर्णों की संख्या = 44 दिया है।

$$\therefore \quad 44 = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 88 = n(n-3) \Rightarrow n^2 - 3n = 88$$

$$n^2 - 3n - 88 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n-11)(n+8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 11, -8$$

n = -8 असम्भव है चूँकि बहुभुज की भुजाएँ ऋणात्मक नहीं हो सकतीं, इसलिए n = 11 होगा।

प्रश्न 7. 1, 2, 3, 4, 5, 6

हल : दिये गये अंक = 1, 2, 3, 4, 5, 6
अंकों की संख्या = 6
अब हमें 6 अंकों में से चार अंक चुनकर संख्याएँ बनानी हैं तथा संख्याओं में अंक 4 व 5 का होना आवश्यक है।
अंक 4 व 5 चुनने के तरीके = 1

अब हमें 2 अंकों की आवश्यकता और है। अतः शेष 4 अंकों में से 2 अंक चुनने के तरीके = $^4C_2$ = 6.
अतः 6 में से 4 अंक चुनने के कुल तरीके = 6 x 1 = 6.
अब चुने गये 4 अंकों से 4 अंकों की संख्या बनाने के तरीके

$$= {}^4P_4 = \lfloor 4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ = 6 x 24 = 144

प्रश्न 8. छः '+' तथा चार '-' चिह्नों को एक सरल रेखा में कुल कितने प्रकार से रखा जा सकता है कि कोई भी दो '-' के चिह्न पास पास नहीं आते हों ?

हल- छः '+' चिह्न एक-एक स्थान छोड़कर एक तरीके से लिखे जा सकते हैं। अब इन चिह्नों के मध्य पाँच

स्थान तथा सिरों पर दो स्थान खाली होंगे। अब इन सात स्थानों पर चार '-' चिह्न लिखने के तरीके

$= {}^7C_4$

$= \frac{\lfloor 7}{\lfloor 7-4 \times \lfloor 4} = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 3 \times \lfloor 4}$

$= \frac{7.6.5.\lfloor 4}{3 \times 2 \times \lfloor 4} = 35$

प्रश्न 9. 8 विद्यार्थियों और 5 प्राध्यापकों में से 5 विद्यार्थियों और 2 प्राध्यापकों की एक कॉलेज परिषद् बनानी है। इस प्रकार की कितनी विभिन्न परिषदें बन सकती हैं ?

हल- 8 विद्यार्थियों में से 5 विद्यार्थियों के चुनने के प्रकार = ${}^8C_5$
5 प्राध्यापकों में से 2 प्राध्यापकों के चुनने के प्रकार = ${}^5C_2$

अतः 8 विद्यार्थियों और 5 प्राध्यापकों में से 5 विद्यार्थियों और 2 प्राध्यापकों की एक कॉलेज परिषद् बनाने के लिए विभिन्न परिषदों की संख्या = ${}^8C_5 \times {}^5C_2$
= 56 x 10
= 560

प्रश्न 10. 14 खिलाड़ियों में से क्रिकेट के लिए 11 खिलाड़ियों की एक टोली बनानी है, जिसमें कम से कम 2 गेंदबाज विद्यमान हों, जबकि केवल 4 खिलाड़ी ही गेंद फेंक सकते हैं। यह टोली कितने प्रकार से बनाई जा सकती है?

हल- कुल खिलाड़ियों की संख्या = 14
कुल गेंदबाजों की संख्या = 4
उन खिलाड़ियों की संख्या जो गेंदबाजी नहीं कर सकते
= 14 – 4 = 10

एक क्रिकेट टीम 11 खिलाड़ियों की बनाने के लिए जिसमें कम से कम 2 गेंदबाज विद्यमान हों, निम्न प्रकार से चयन कर सकते

${}^{10}C_9 \times {}^4C_2 + {}^{10}C_8 \times {}^4C_3 + {}^{10}C_7 \times {}^4C_4$

$\Rightarrow 10 \times 6 + 45 \times 4 + 120 \times 1$

$\Rightarrow 60 + 180 + 120$

$\Rightarrow 360$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. यदि $^nP_{n-2} = 60$ हो, तो n का मान होगा

(A) 2
(B) 4
(C) 5
(D) 3
हल : (C)

प्रश्न 2. $^nP_r \div {}^nC_r$ बराबर है
(A) n!
(B) (n – r)!
(C) $\frac{1}{r!}$
(D) r!

हल : (D)

प्रश्न 3. 5 व्यक्ति एक गोल मेज पर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं ?
(A) 120
(B) 24
(C) 60
(D) 12

हल : (B)

प्रश्न 4. BHILWARA के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं।

(A) $\frac{8!}{2!}$
(B) 8!
(C) 7!
(D) $\frac{6!}{2!}$

हल : (A)

प्रश्न 5.
$$^{47}C_4 + \sum_{r=1}^{5} {}^{52-r}C_3$$
बराबर है
(A) $^{51}C_4$

(B) $^{52}C_4$
(C) $^{53}C_4$
(D) इनमें से कोई नहीं
हल : (B)

प्रश्न 6. $^{61}C_{57} - {}^{60}C_{56}$ का मान है

(A) $^{61}C_{58}$
(B) $^{60}C_{57}$
(C) $^{60}C_{58}$
(D) $^{60}C_{56}$

हल : (B)

प्रश्न 7. यदि $^{15}C_{3r} = {}^{15}C_{r+3}$, तो r बराबर है

(A) 5
(B) 4
(C) 3
(D) 2

हल : (C)

प्रश्न 8. एक वृत्त की परिधि पर 6 बिन्दु हैं, इनको मिलाने वाली सरल रेखाओं की संख्या होगी

(A) 30
(B) 15
(C) 12
(D) 20

हल : (B)

प्रश्न 9. BHOPAL के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

(A) 124
(B) 240
(C) 360
(D) 720

हल : (D)

प्रश्न 10. एक वृत्त की परिधि पर 4 बिन्दु हैं, इनको मिलाकर कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) 12

हल : (A)

प्रश्न 11. यदि $^nC_9 = {^nC_7}$, तो $^nC_{16}$ ज्ञात कीजिए।

हल- प्रश्नानुसार
$^nC_9 = {^nC_7}$
$\therefore 7 + 9 = n$
$\therefore n = 16$

क्योंकि $^nC_x = {^nC_y}$
$\Rightarrow x + y = n$
अतः $^nC_{16} = {^{16}C_{16}}$

$$= \frac{\lfloor 16}{\lfloor 16-16 \times \lfloor 16}$$

$$= \frac{\lfloor 16}{\lfloor 0 \times \lfloor 16}$$

$= 1$

प्रश्न 12. n का मान ज्ञात कीजिए।
(i) $^{2n}C_3 : {^nC_3} = 12 : 1$
(ii) $^{2n}C_3 : {^nC_3} = 11 : 1$

हल- (i) $^{2n}C_3 : {^nC_3} = 12 : 1$

या $\frac{^{2n}C_3}{^{n}C_2} = \frac{12}{1}$

या $^{2n}C_3 = 12\ ^{n}C_2$

या $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor 2n-3 \times \lfloor 3} = \frac{12 \lfloor n}{\lfloor n-2 \times \lfloor 2}$

$\left[\because\ ^{n}C_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \times \lfloor r}\right]$

या $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{12n(n-1)}{2}$

या $\frac{4n(2n-1)(n-1)}{6} = 6n\ (n-1)$

या $2n - 1 = \frac{6 \times 6}{4} = 9$

या 2n – 1 = 9

या 2n = 9 + 1 = 10

n = 5

(ii) $^{2n}C_3 : {^{n}C_3} = 11 : 1$

या $\frac{^{2n}C_3}{^{n}C_3} = \frac{11}{1}$

या $^{2n}C_3 = 11\ ^{n}C_3$

या $\frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{1 \times 2 \times 3} = 11 \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$

या $\frac{4n\,(2n-1)\,(n-1)}{6} = 11 \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6}$

या 4 (2n – 1) = 11 (n – 2)

या 8n – 4 = 11n – 22

या 8n – 11n = – 22 + 4

या – 3n = – 18

या n = 6

प्रश्न 13. किसी वृत्त पर स्थित 11 बिन्दुओं से होकर जाने वाली जीवाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल- एक वृत्त के किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने पर ही एक जीवा प्राप्त होती है। अतः 11 बिन्दुओं से एक

जीवा $^{11}C_2$ प्रकार से खींची जा सकती है। अर्थात्

$$^{11}C_2 = \frac{\lfloor 11}{\lfloor 11-2 \times \lfloor 2} = \frac{\lfloor 11}{\lfloor 9 \times \lfloor 2}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times \lfloor 9}{\lfloor 9 \times 2} = 11 \times 5 = 55$$

प्रश्न 14. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या ज्ञात कीजिए यदि प्रत्येक संचय में तथ्यतः एक इक्का है।

हल- 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी में 4 इक्के तथा 48 अन्य ताश होते हैं। अब हम एक इक्का व 4 अन्य ताश चुन सकते हैं तथा यह $^4C_1 \times {}^{48}C_4$ प्रकार से किया जा सकता है।

अर्थात् $^4C_1 \times {}^{48}C_4 = \frac{4}{1} \times \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$$\left[\because {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)}{1.2.3............n}\right]$$

= 778320

प्रश्न 15. एक समतल में n बिन्दु हैं, जिनमें m बिन्दु समरेखीय हैं। इन बिन्दुओं को मिलाकर बनाये जाने वाले त्रिभुजों की संख्या कितनी होगी?

हल- तीन बिन्दुओं को मिलाकर एक त्रिभुज बनता है, लेकिन जो बिन्दु समरेखीय है, उनसे त्रिभुज नहीं बन सकते हैं।
अतः इन बिन्दुओं को मिलाकर बनाये जाने वाले त्रिभुजों की संख्या = $^nC_3 - {}^mC_3$

प्रश्न 16. एक दशभुज में विकर्णों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल- विकर्णो की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$ होगी।
प्रश्नानुसार n = 10 दिया है।
$\therefore$ विकर्णो की संख्या = $\frac{10(10-3)}{2} = \frac{10 \times 7}{2}$
= 5 × 7
= 35

प्रश्न 17. एक रेलगाड़ी में 5 सीटें खाली हैं, तो तीन यात्री इन सीटों पर कुल कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

हल- खाली सीटों की संख्या = 5

यात्रियों की संख्या = 3
तीन यात्री इन सीटों पर निम्न प्रकार से बैठ सकते हैं

$$= {}^5C_3 \times 3!$$

$$= \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} \times 3! = \frac{5! \times 3!}{2! \times 3!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

प्रश्न 18. 6 लड़कों तथा 4 लड़कियों में से 7 का एक समूह बनाना है। यदि समूह में लड़के बहुसंख्यक रहें, तो समूह कितने प्रकार से बनाया जा सकता है?

हल- लड़कों की संख्या = 6
लड़कियों की संख्या = 4

हमें यहाँ पर 7 का समूह बनाना है जिसमें लड़के बहुसंख्यक रखने हैं, इनका समूह निम्न प्रकार से बनाया जा सकता है

$= {}^6C_6 \times {}^4C_1 + {}^6C_5 \times {}^4C_2 + {}^6C_4 \times {}^4C_3$
= 1 x 4 + 6 x 6 + 15 x 4
= 4 + 36 + 60
= 100

प्रश्न 19. 8 व्यक्तियों के सम्मेलन में यदि प्रत्येक व्यक्ति एक-दूसरे से एक ही बार हाथ मिलाता हो, तो हाथ मिलने की कुल संख्या कितनी होगी?

हल- व्यक्तियों की संख्या = 8
प्रत्येक व्यक्ति एक दूसरे से हाथ मिलाता है।
हाथ मिलाने की कुल संख्या होगी

$$= {}^8C_2 = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!}$$

$$= \frac{8!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1}$$

= 28

प्रश्न 20. 6 पुरुष एवं 6 महिलाएँ एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि कोई भी दो महिलाएँ साथ-साथ नहीं बैठे?

हल- 6 पुरुष एक गोल मेज के चारों ओर निम्न प्रकार से बैठ सकते हैं
= $\lfloor 6-1 = \lfloor 5$
पुरुषों के बीच में रिक्त स्थानों पर 6 महिलाएँ बैठ सकती हैं। जब कोई भी दो महिलाएँ साथ-साथ नहीं बैठें, उसके प्रकार
$= \lfloor 5 \times \lfloor 6$
= 120 x 720
= 86400

प्रश्न 21. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाएं जा सकते हैं, जबकि सभी 'S' एक साथ रहें?

हल- शब्द ASSASSINATION में कुल 13 अक्षर हैं जिसमें A-तीन, S-चार, I-दो, N-दो तथा T-1 है। दी गई शर्त के अनुसार चारों S एक साथ रहें तो इनको एक अक्षर मानना पड़ेगा। अतः अब कुल अक्षर = 10 इसमें A-3, I-2 तथा N-2 हैं। अतः इस शब्द के अक्षरों का विन्यास जबकि चारों S एक साथ हों—

$$= \frac{10!}{3!2!2!}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1\times2\times1}$$

= 151200