इकाई–4

बीजगणित

अनुक्रम एवं श्रेणी

(Sequence and Series)

प्रस्तावना:

हम लोग कक्षा X के सामान्य गणित में समान्तर श्रेणी (Arithmetic progression) के अर्थ, सामान्य एवं व्यापक रूप, n पदों को योग आदि का अध्ययन करने के बाद समान्तर श्रेणी के बारे में यहाँ और अधिक चर्चा करेंगे। साथ-ही-साथ हम समान्तर माध्यम गुणोत्तर माध्य, समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य में संबन्ध, विशेष अनुक्रमों के क्रमागत n प्राकृत संख्याओं का योग का भी अध्ययन करेंगे।

4.1 अनुक्रम (Sequence):

अनुक्रम से हमारा तात्पर्य है, "किसी नियम के अनुसार एक परिभाषित (निश्चित) क्रम में संख्याओं की व्यवस्था" अर्थात् इसका मतलब है कि समूह को इस प्रकार क्रमित किया गया है कि हम उसके सदस्यों को प्रथम, द्वितीय संख्या तथा आदि से पहचान सकते हैं। उदाहरणत:, विभिन्न समयों में मानव की जनसंख्या अथवा बैक्टीरिया अनुक्रम की रचना करते हैं। कोई धनराशि जो बैंक खाते में जमा कर दी जाती है, विभिन्न वर्षों में एक अनुक्रम का निर्माण करती है। किसी सामान की अवमूल्यित कीमतें एक अनुक्रम बनाती हैं। मानव क्रियाओं के कई क्षेत्रों में अनुक्रमों का बहुत महत्त्वपूर्ण उपयोग है।

आइए हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

(i) 2, 4, 6, 8, ..., 24

(ii) 1, 4, 7, 10, ..., 40

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

(iv) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

(v) 3, 9, 27, 81, ...

उपरोक्त उदाहरणों में जो संख्याएँ आई हैं उसे पद (term) कहते हैं। वे अनुक्रम, जिसमें पदों की संख्या सीमित रहती है उसे परिमित अनुक्रम (Finite Sequence) कहते

हैं। उदाहरण (i) और (ii) परिमित अनुक्रम हैं। क्योंकि पदों की संख्या सीमित है। एक अनुक्रम अपरिमित अनुक्रम कहा जाता है जिसमें पदों की संख्या सीमित नहीं होती है। उदाहरण (iii), (iv), (v) अपरिमित अनुक्रम हैं, क्यों?

अनुक्रम के पदों को हम $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ आदि द्वारा निरूपित करते हैं। प्रत्येक पद के साथ लगी संख्या जिसे पदांक कहते हैं, प्रत्येक पद के साथ लगी संख्या जिसे पदांक कहते हैं, उसका स्थान बताती है। अनुक्रम का n वें स्थान को निरूपित करता है और इसे a_n द्वारा निरूपित करते हैं, इसे अनुक्रम का व्यापक पद (General term) भी कहते हैं।

प्राय: यह संभव है कि अनुक्रम के विभिन्न पदों को व्यक्त करने के नियम को एक बीजगणितीय सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, प्राकृत सम संख्याओं के अनुक्रम 2,4,6,... पर विचार कीजिए।

यहाँ $a_1 = 2 = 2\times1$ $\quad a_2 = 4 = 2\times2$

$a_3 = 6 = 2\times3$ $\quad a_4 = 8 = 2\times4$

... ...

... ...

$a_{20} = 40 = 2\times20$ $\quad a_{21} = 42 = 2\times21$

और इसी प्रकार अन्य।

वस्तुत: हम देखते हैं कि अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = 2n$, लिखा जाता है, जबकि n एक प्राकृत संख्या है। इसी प्रकार, विषम प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम 1,3,5,7,..., में nवें पद के सूत्र को $a_n = 2n-1$, के रूप में निरूपित किया जा सकता है, जबकि n एक प्राकृत संख्या है।

व्यवस्थित संख्याओं 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... का कोई स्पष्ट पैटर्न नहीं है, किन्तु अनुक्रम की रचना पुनरावृत्ति संबन्ध द्वारा व्यक्त की जा सकती है। उदाहरणत:

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \cdot n > 2$$

इस अनुक्रम को Fibonacci Sequence कहते हैं।

अभाज्य संख्याओं के अनुक्रम 2, 3, 5, 7, ... में n वीं अभाज्य संख्या का कोई सूत्र नहीं है। ऐसे वर्णित अनुक्रम को केवल मौखिक निरूपित किया जा सकता है।

प्रत्येक अनुक्रम में यह अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए कि उसके लिए विशेष सूत्र होगा। किन्तु फिर भी ऐसे अनुक्रम के निर्माण के लिए कोई न कोई सैद्धांतिक योजना अथवा नियम की आशा तो की जा सकती है, जो पदों $a_1, a_2 a_3, \ldots, a_n, \ldots$ का क्रमागत रूप दे सके।

उपर्युक्त तथ्यों के आधार पर, एक अनुक्रम को हम एक फलन के रूप में ले सकते हैं जिसका प्रांत (domain) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो अथवा उसका उपसमुच्चय $\{1,2,3,\ldots k\}$ के प्रकार का हो। कभी-कभी हम फलन को संकेत a_n के लिए $a(n)$ का उपयोग करते हैं।

4.2 श्रेणी (Series):

यदि $a_1, a_2 a_3, \ldots, a_n$ अनुक्रम है, तो व्यंजक $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ श्रेणी कहलाती है। श्रेणी परिमित अथवा अपरिमित होगी। यदि अनुक्रम क्रमशः परिमित अथवा अपरिमित होगी, यदि अनुक्रम क्रमशः परिमित अथवा अपरिमित है।

परिमित श्रेणी $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ का संक्षिप्त रूप $\sum_{k=1}^{n} ak$ है, जहाँ $\sum$ एक ग्रीक अक्षर है जिसे सिग्मा कहते हैं जिसका अर्थ है जोड़ना।

अपरिमित श्रेणी $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \ldots\ldots$ का संक्षिप्त रूप $\sum_{k=1}^{n} ak$ है। आइए, हमलोग कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1: निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम चार पद बताइए:

(i) $a_n = 2n + 5$

(ii) $a_n = n^2(n+1)$

(iii) $a_n = \dfrac{2n}{3n+4}$

हल: $n = 1,2,3,4$ रखने पर हम वांछित पद पाते हैं

(i) यहाँ $a_n = 2n + 5$

$\therefore \quad a_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$

$a_2 = 2 \times 2 + 5 = 9$

$a_3 = 2 \times 3 + 5 = 11$

$a_4 = 2 \times 4 + 5 = 13$

∴ प्रथम चार पद 7,9,11,13 होंगे।

(ii) यहाँ $a_n = n^2(n+1)$

$$a_1 = 1^2(1+1) = 2$$
$$a_2 = 2^2(2+1) = 12$$
$$a_3 = 3^2(3+1) = 36$$
$$a_4 = 4^2(4+1) = 80$$

∴ प्रथम चार पद 2,12,36,80 होंगे।

(iii) यहाँ $a_n = \dfrac{2n}{3n+4}$

$$a_1 = \frac{2\times 1}{3\times 1+4} = \frac{2}{7}$$
$$a_2 = \frac{2\times 2}{3\times 2+4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$
$$a_3 = \frac{2\times 3}{3\times 3+4} = \frac{6}{13}$$
$$a_4 = \frac{2\times 4}{3\times 4+4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

∴ प्रथम चार पद $\frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}$ होंगे।

उदाहरण 2: अनुक्रम a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है, तो,

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 2$ जहाँ $n \geq 2$

तो अनुक्रम के पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए।

हल: यहाँ $a_1 = 1$ तथा $a_n = a_{n-1} + 2$

अब $n = 2$ रखने पर,

$$a_2 = a_{2-1} + 2$$
$$= a_1 + 2$$
$$= 1 + 2 = 3$$

$n = 3$ रखने पर,

$$a_3 = a_{3-1} + 2$$
$$= a_2 + 2$$

$=3+2=5$

$n=4$ रखने पर,

$a_4 = a_{4-1} + 2$

$= a_3 + 2$

$= 5+2 = 7$

$n=5$ रखने पर,

$a_5 = a_{5-1} + 2$

$= a_4 + 2$

$= 7+2 = 9$

प्रश्नावली-1

1. प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम पाँच पद लिखिए जिनका n वाँ पद दिया गया है:

(i) $a_n = n^n$ (ii) $a_n = \frac{3n-4}{5}$

(iii) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ (iv) $a_n = (-1)^{n-1}5^{n+1}$

2. अनुक्रम $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित अनुक्रम का प्रथम चार पद ज्ञात कीजिए और संगत श्रेणी लिखिए।

(i) $a_1 = a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ जहाँ $n \geq 3$

(ii) $a_1 = -1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

(iii) $a_1 = a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 1$, $n > 2$

(iv) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}(3a_{n-1} - 2a_{n-2})$

4. अनुक्रम $a_n = 4n - 3$ का 17 वाँ एवं 24 वाँ पद क्या है?

5. अनुक्रम $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n^3$ का 9 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

6. Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है।

$1 = a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ तो $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि

$n = 1,2,3,4,5$

4.3 समान्तर श्रेढ़ी [Arithmetic Progression (A.P.)]:

हमलोग वर्ग X का सामान्य गणित में जान चुके हैं कि वैसे अनुक्रम जो एक निश्चित प्रतिरूप (certain pattern) एक अनुसरण करते हैं, श्रेढ़ी (Progression) कहलाते हैं। साथ ही समान्तर श्रेढ़ी वैसा अनुक्रम है जिसके सार्व अन्तर (common difference) समान होते हैं अर्थात $a_n - a_{n-1} =$ अचर (constant), जहाँ $n \in N$.

उदाहरण के लिए-

(i) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

(ii) 2, 7, 12, 17, ...

(iii) 50, 45, 40, 35, ...

ये सभी समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

हम जानते हैं कि $a, a+d, a+2d, a+3d, ...$ समान्तर श्रेढ़ी में हैं तो n वाँ पद: $a_n = a+(n-1).d = \ell$ जहाँ a प्रथम पद है, d सार्व अन्तर है तथा n पदों की संख्या है। a_n को $A.P.$ का व्यापक पद (general term) भी कहते हैं तथा यह उसके अंतिम पद को निरूपित करता है, जिसे ℓ से दिखाया जा सकता है। साथ ही

$$s_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}(a+\ell)$$

$$= \frac{n}{2} \text{ (first term + last term)}$$

समान्तर श्रेढ़ी की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं-

(i) यदि समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में एक अचर जोड़ा जाए तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समान्तर श्रेढ़ी होता है।

मान लीजिए कि $a, a+d, a+2d, ...$ समान्तर श्रेढ़ी में है। यदि एक अचर c प्रत्येक पद में जोड़ा जाए तो इसका अनुक्रम इस प्रकार होगा-

$$a+c,\ a+d+c,\ a+2d+c, ...$$

$$a+c,\ (a+c)+d,\ (a+c)+2d, ...$$

स्पष्ट है कि यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है क्योंकि इसका प्रथम पद $a+c$ तथा सार्व अन्तर d है।

इसका n वाँ पद, $a_n=(a+c)+(n-1)\cdot d.$

(ii) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में से एक अचर घटाया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समान्तर श्रेढ़ी होता है।

(iii) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में एक अचर (शून्योत्तर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समान्तर श्रेढ़ी होता है।

मान लीजिए, $a, a+d, a+2d, a+3d, ...$ समान्तर श्रेढ़ी में है। इस श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में अचर $c(\neq 0)$ से गुणा किया जाय तो अनुक्रम इस प्रकार होगा।

$$ac, (a+d)c, (a+2d), (a+3d)c, ...$$

$$ac, ac+cd, ac+2cd, ac+3cd, ...$$

स्पष्ट है कि उपरोक्त अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी में है जिसका प्रथम पद ac तथा सार्व अन्तर cd है।

इसका n वाँ पद, $a_n=ac+(n-1)\cdot cd.$

(iv) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद को एक अशून्य अचर से भाग दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक समान्तर श्रेढ़ी होगा।

आइए कुछ उदाहरण लेते हैं-

उदाहरण 4: अनुक्रम 4+11+18+...... का कौन सा पद 158 है?

हल: दिया गया अनुक्रम 4+11+18+...... समान्तर श्रेढ़ी में है। यहाँ $a=4$, $d=7$ तथा $a_n=158.$

$\because \quad a_n=a+(n-1)\cdot d$

या, $\quad 158=4+(n-1)\cdot 7$

या, $\quad 154=(n-1)\cdot 7$

या, $\quad n-1=22$

या, $\quad n=23$

$\therefore \quad$ 158 दिए गए अनुक्रम का 23 वाँ पद है।

उदाहरण 5: अनुक्रम $17, \frac{81}{5}, \frac{77}{5}, \frac{73}{5}, ...$ का कौन पद प्रथम ऋणात्मक पद है?

हल: माना कि a_n ऋणात्मक पद है

यहाँ $a=17, d=\frac{81}{5}-17=\frac{81-85}{5}=\frac{-4}{5}$

$$a_n=17+(n-1)(\frac{-4}{5})$$

$$=\frac{85-4n+4}{5}$$

$$=\frac{89-4n}{5}$$

जैसा कि a_n ऋणात्मक है अत: $\frac{89-4n}{5}<0$ या $89<4n$ या $4n>89$ अत: n का न्यूनतम मान 23 होगा।

∴ a_{23} प्रथम ऋणात्मक पद है।

उदाहरण 6: यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी का m वाँ पद n तथा n वाँ पद m, जहाँ $m\neq n$, हो तो p वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं:

$a_m=a+(m-1)d=n$ ......(i)

तथा $a_n=a+(n-1)d=m$ ......(ii)

(i) और (ii) को हल करने पर हम पाते हैं-

$(m-n)d=n-m$

या, $d=-1$

तथा $a=n+m-1$

इसलिए $a_p=a+(p-1)d$

$=n+m-1+(p-1)(-1)$

$=n+m-p$

अत: p वाँ पद $n+m-p$ है।

उदाहरण 7: यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $nP+\frac{1}{2}n(n-1)Q$ है जहाँ

P तथा Q अचर हो तो सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $a_1, a_2, ...a_n$ दी गई समान्तर श्रेढ़ी है, तो

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_{n-1} + a_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$$

इसलिए $S_1 = a_1 = P$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$$

इसलिए $a_2 = S_2 - S_1 = P + Q$

अतः सार्व अन्तर है।

$$d = a_2 - a_1 = (P+Q) - P = Q$$

उदाहरण 8: किसी समान्तर श्रेढ़ी का चौथा पद उसके प्रथम पद का तिगुना है और सातवाँ पद उसके तीसरे पद के दुगने से 1 अधिक है। प्रथम पद और अनुक्रम ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व अन्तर d है।

$\therefore\ a_4 = a + 3d = 3a_1$

$\Rightarrow a + 3d = 3a$

$\Rightarrow 2a = 3d$

$\therefore\ d = \frac{2}{3}a$ ......(i)

पुनः $a_7 = a + 6d = 2a_3 + 1$

$\Rightarrow a + 6d = 2(a + 2d) + 1$

$\Rightarrow a + 6d = 2a + 4d + 1$

$\Rightarrow 2d = a + 1$

$\Rightarrow a + 1 = 2(\frac{2}{3}a)$ (i) के प्रयोग से

$\Rightarrow 3a + 3 = 4a$

$\Rightarrow a = 3$

$\therefore\ d = \frac{2}{3} \times 3 = 2$

$\therefore$ प्रथम पद=3 तथा अनुक्रम 3,5,7,9,11, ...

उदाहरण 9: दो समान्तर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल का अनुपात

$(3n+8):(7n+15)$ है। 12वें पद का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि a_1, a_2 तथा d_1, d_2 क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय समान्तर श्रेढ़ियों के प्रथम पद तथा सार्व अन्तर है, तो दी हुई शर्त के अनुसार हम पाते हैं:

$$\frac{\text{प्रथम समान्तर श्रेढ़ी के } n \text{ पदों का योग}}{\text{द्वितीय समान्तर श्रेढ़ी के } n \text{ पदों का योग}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

या, $$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+18}{7n+15}$$

या, $$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+18}{7n+15}$$

अब,

$$\frac{\text{प्रथम समान्तर श्रेढ़ी का 12 वाँ पद}}{\text{द्वितीय समान्तर श्रेढ़ी का 12 वाँ पद}} = \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times 23+8}{7\times 23+15}$$

(1) में $n=23$ रखने पर

या, $$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \frac{7}{16}$$

अतः वांछित अनुपात 7:16 है।

उदाहरण 10: एक फर्म की प्रथम वर्ष मे आय 5,00,000 रुपये हैं तथा उसकी आय 50,000 रुपये प्रतिवर्ष नौ वर्षों तक बढ़ती है, तो उसके द्वारा 10 वर्षों में प्राप्त आय ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं कि बराबर मात्रा में आय बढ़ने से समान्तर श्रेणी बनेगा, जिसका,

$$a = 5,00,000, \ d = 50,000 \text{ और } n = 10$$

योग सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का उपयोग करने पर

हम पाते हैं कि

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 5,00,000 + 9 \times 50,000)$$
$$= 5 \times 14,50,000$$
$$= 72,50,000$$

अर्थात फर्म को 10 वर्ष के अन्त में कुल आय 72,50,000 रुपये प्राप्त होंगे।

4.4 समान्तर माध्य (ArithmeticMean):

दो संख्याएँ a और b इस प्रकार दिया हुआ है कि इनके बीच एक संख्या A ले सकते हैं ताकि a, A, b समान्तर श्रेढ़ी में हों, हम संख्या A को a और b का समान्तर माध्य ($A.M.$) कहते हैं।

यहाँ, $A-a=b-A$

अर्थात $A=\frac{a+b}{2}$

इस प्रकार दो संख्याएँ a और b के बीच समान्तर माध्य को इनके औसत $\frac{a+b}{2}$ के रूप मे लिखा जा सकता है।

उदाहरण स्वरूप, दो संख्याओं 6 और 18 का समान्तर माध्य 12 है। अत: हम एक संख्या 12 को 6 और 18 के बीच रखकर एक समान्तर श्रेढ़ी 6,12,18 की रचना कर सकते हैं। यहाँ इस बात पर गौर किया जा सकता है कि क्या दो संख्याओं के बीच दो या अधिक संख्याओं को रखने से समान्तर श्रेढ़ी $A.P.$) हो सकेंगे? देखा जाय तो संख्याओं 6 और 18 के बीच 12 के अलावे 9 और 15 रखे जाने पर 6,9,12,15,18 समान्तर श्रेढ़ी में हो जाती है।

सामान्यत: किन्हीं दो संख्याओं a और b बीच कितने भी संख्याओं को रखकर समान्तर श्रेढ़ी ($A.P.$) में परिणित किया जा सकता है।

आइए, अब हम दो संख्याओं के माध्य n संख्याओं को रखकर समान्तर श्रेढ़ी को समझ सकते हैं।

माना कि दो संख्याओं a और b के माध्य n संख्याएँ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ इस

प्रकार हैं कि $a, A_1, A_2, A_3 ..., A_n$, b समान्तर श्रेढ़ी में है। यहाँ, b, $(n+2)$वाँ पद है, अर्थात्

$$b = a + [(n+2)-1]\cdot d$$
$$= a + (n+1)d.$$

इससे, $d = \frac{b-a}{n+1}$

इस प्रकार a तथा b के बीच n संख्याएँ निम्नलिखित है:

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

उदाहरण (11): दो संख्याएँ 4 और 20 के बीच तीन ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिससे कि प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी बन जाए।

हल: माना कि A_1, A_2, A_3 4 और 20 के बीच तीन अभिष्ट संख्याएँ हैं। इसलिए $4, A_1, A_2, A_3, 20$ समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

यहाँ $a = 4, b = 20, n = 5$

इसलिए $20 = 4 + (5-1).d$

या, $16 = 4.d$

$$d = \frac{16}{4} = 4$$

इस प्रकार $A_1 = a + d = 4 + 4 = 8$

$$A_2 = a + 2d = 4 + 2 \times 4 = 12$$

$$A_3 = a + 3d = 4 + 3 \times 4 = 16$$

अत: संख्याएँ 4 और 20 के बीच अभिष्ट तीन संख्याएँ 8,12,16 हैं।

प्रश्नावली-2

1. समान्तर श्रेढ़ी 3,7,11, ... का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. *A.P.*: 3,8,13,18, ... का कौन-सा पद 78 है?
3. क्या *A.P.*: 11,8,5,2, ... का एक पद-150 है?
4. 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।
5. तीन अंको वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य है?
6. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज है?
7. 5 और 29 के बीच पाँच संख्याएँ इस प्रकार रखें कि प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी बन जाए।
8. 100 और 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हैं।
9. समान्तर श्रेढ़ी $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ के कितने पदों का योगफल -25 है?
10. वह *A.P.* ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7 वाँ पद 5 वें पद से 12 अधिक है।
11. *A.P.* 3,8,13,... 253 में अन्तिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।
12. यदि किसी *A.P.* के तीसरे और नौवें पद क्रमश: 4 और -8 हैं, तो इसका कौन सा पद शून्य होगा?
13. दो समान्तर श्रेढ़ियों का सार्व अन्तर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अन्तर 100 है, तो इनके 1000 वें पदों का अन्तर क्या होगा?
14. उस समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका k वाँ पद $5k+1$ है।
15. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम P पदों का योग प्रथम 2 पदों के योगफल के बराबर हो तो प्रथम $(p+2)$ का योगफल ज्ञात कीजिए।
16. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम P, q, r पदों का योगफल क्रमश: a, b तथा

c हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$

17. यदि $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$, a तथा b के मध्य समान्तर माध्य हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

18. m संख्याओं को 1 और 31 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी है और 7वीं एवं $(m-1)$वीं संख्याओं का अनुपात 5:9 है तो m का मान ज्ञात कीजिए।

19. एक व्यक्ति ऋण का भुगतान 100 रूपये की प्रथम किश्त से शुरू करता है। यदि वह प्रत्येक किश्त में 5 रूपये प्रति माह बढ़ता है तो 30वीं किश्त की राशि क्या होगी?

20. मदन लाल ने 1995 में 5000 रू0 के मासिक वेतन पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 रू0 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन 7000 रू0 हो जायगा?

4.5 गुणोत्तर श्रेढ़ी [Geometric Progression(G.P.)]:

आइए, अब हम निम्नांकित अनुक्रमों पर विचार करते हैं-

(i) 1, 3, 9, 27, ...

(ii) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

(iii) .01, .0001, .000001, ...

(iv) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$

उपर्युक्त प्रत्येक अनुक्रम में हम पाते हैं कि प्रथम पद को छोड़ सभी पद एक विशेष क्रम में बढ़ते हैं।

(i) में हम पाते हैं:

$$a_1=1, \frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{1}=3; \frac{a_3}{a_2}=\frac{9}{3}=3$$

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{27}{9}=3$ और इसी प्रकार

(ii) में हम पाते हैं कि:

$$a_1=\frac{1}{2},\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2},\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{-\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$$

(iii) में हम पाते हैं कि:

$$a_1=.01,\frac{a_2}{a_1}=\frac{.0001}{.01}=.01,\frac{a_3}{a_2}=\frac{.000001}{.0001}=.01$$

इत्यादि।

इसी प्रकार (iv) में पद कैसे अग्रसर होते हैं बताइए?

निरीक्षण से यह ज्ञात हो जाता है कि प्रत्येक स्थिति में, प्रथम पद को छोड़ हर अगला पद अपने पिछले पद से अचर अनुपात में बढ़ता है। (i) में यह अचर अनुपात 3 है, (ii) में $-\frac{1}{2}$ है, (iii) में यह .01 है, (iv) में यह अचर अनुपात $\sqrt{3}$ है ऐसे अनुक्रमों को गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) कहा जाता है।

इस प्रकार, अनुक्रम $a_1,a_2,a_3,...a_n,...$ को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहा जाता है, यदि प्रत्येक पद अशून्य हो तथा $\frac{a_{k+1}}{a_k}=r$ (अचर), $k\geq 1$ के लिए।

$a_1=a$ लिखने पर हम गुणोत्तर श्रेढ़ी पाते हैं:

$$a,ar,ar^2,ar^3,ar^4,....$$

जहाँ a को प्रथम पद तथा r को गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्व अनुपात [Common ratio (c.r)] कहते हैं।

उदाहरण (i),(ii),(iii) तथा (iv) में दी गई गुणोत्तर श्रेढ़ियों का सार्व अनुपात

क्रमश: $3, -\frac{1}{2}$, 0.01 तथा $\sqrt{3}$ है।

4.5.1 गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General term of a G.P.):

अब हम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) जिसका प्रथम अशून्य पद (non-zero term) 'a' तथा सार्व अनुपात 'r' है, पर विचार करते हैं। आइए, इसके कुछ पदों को लिखिए। दूसरा पद, प्रथम पद a को सार्व अनुपात r से गुणा करने पर प्राप्त होता है अर्थात $a_2 = ar$, इसी प्रकार तीसरा पद a_3 को दूसरा पद a_2 में r से गुणा करने पर प्राप्त होगा अर्थात $a_3 = a_2 . r = ar^2$ आदि। इस प्रकार हम इन्हें तथा कुछ और पदों को निम्न प्रकार लिख सकते हैं-

प्रथम पद $= a_1 = a = ar^{1-1}$

द्वितीय पद $= a_2 = ar = ar^{2-1}$

तृतीय पद $= a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

चतुर्थ पद $= a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

पाँचवाँ पद $= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

....

....

क्या आप इसमें कोई पैटर्न देखते हैं? हाँ, तो 10 वाँ पद क्या होगा?

$= a_{10} = ar^{10-1} = ar^9$

अतएव यह प्रतिरूप बताता है कि गुणोत्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद $a_n = ar^{n-1}$

अर्थात, गुणोत्तर श्रेढ़ी को इस रूप में लिखा जा सकता है-

$a, ar, ar^2, ar^3, ... ar^{n-1}$.... या फिर $a, ar, ar^2, ar^3, ... ar^{n-1}$.... क्रमश: जब श्रेढ़ी परिमित हो या जब श्रेढ़ी अपरिमित हो।

श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ को परिमित गुणोत्तर श्रेढ़ी तथा श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$.... को अपरिमित गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं-

4.5.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी की सामान्य विशेषताएँ:-

(i) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में एक अशून्य अचर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी गुणोत्तर श्रेढ़ी होता है।

माना कि, दिया गया गुणोत्तर श्रेढ़ी इस प्रकार है $a, ar, ar^2, ar^3, ...$

यदि एक अशून्य अचर k से प्रत्येक पद में गुणा किया तो अनुक्रम इस प्रकार होगा।

$$ak, ark, ar^2k, ar^3k, ...$$

स्पष्ट है कि यह अनुक्रम भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में है जिसका सार्व अनुपात r है।

(ii) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद को एक अशून्य अचर (non-zero constant) से भाग दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक गुणोत्तर श्रेढ़ी होगा।

गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ar^3, ...$ में प्रत्येक पद में अशून्य अचर k से भाग दिया जाए तो अनुक्रम इस प्रकार होगा-

$$\frac{a}{k}, \frac{ar}{k}, \frac{ar^2}{k}, \frac{ar^3}{k}, ...$$

स्पष्ट है कि यह अनुक्रम भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में है जिसका सार्व अनुपात r है।

(iii) किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों का व्यूत्क्रम(reciprocal)भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में होता है। गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ar^3, ...$ के प्रत्येक पदों के व्युत्क्रम $\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}, \frac{1}{ar^3}, ...$ भी गुणोत्तर श्रेढ़ी में है जिसका सार्व अनुपात $\frac{1}{r}$ है।

4.5.3 गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल-

माना कि गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व योगफल S_n से लिखते हैं तब

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} \qquad ......(i)$$

स्थिति 1, यदि $r = 1$ तो हम पाते हैं,

$$S_n = a + a + a + ... + a(n \text{ पदों तक}) = na$$

स्थिति 2, यदि $r \neq 1$ तो (i) को r से गुणा करने पर हम पाते हैं,

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \qquad ....(ii)$$

(ii) को (i) में से घटाने पर हम पाते हैं,

$$(1 - r)S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$$

इससे हम पाते हैं कि,

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

या $\quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r},\ r \neq 1.$

उदाहरण 12: गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,25,125,....... का 10वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a=5$ तथा $r=5$

गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद; $t_n = ar^{n-1}$

$\therefore \quad t_{10} = 5\cdot(5)^{10-1} = 5\cdot 5^9 = 5^{10}$

तथा $\quad t_n = 5(5)^{n-1} = 5^n$

उदाहरण 13: गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,20,80,..... का कौन सा पद 1280 है?

हल: माना कि गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,20,80,..... का nवाँ पद 1280 है।

हम जानते हैं, गुणोत्तर श्रेढ़ी nवाँ पद $t_n = ar^{n-1}$;

यहाँ $\quad a=5,\ r=4,\ t_n=1280$

अर्थात् $\quad 1280 = 5\times 4^{n-1}$

$$4^{n-1} = \frac{1280}{5} = 256 = 4^4$$

या, $\quad n-1=4$

$\therefore \quad n=5$

अतः 1280, गुणोत्तर श्रेढ़ी 5,20,80, ... का 5वाँ पद है।

उदाहरण 14: गुणोत्तर श्रेढ़ी $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots, 128$ में कितने पद है?

हल: माना कि दिये गये गुणोत्तर श्रेढ़ी में n पद है।

यहाँ $\quad a=2, r=\sqrt{2}, t_n=128$

$\therefore \quad t_n = ar^{n-1}$

$\therefore \quad \therefore 128 = 2(\sqrt{2})^{n-1}$

या, $\quad 2^7 = (2)^{\frac{n+1}{2}}$

$\therefore \quad \dfrac{n+1}{2} = 7$

$\therefore \quad n=13$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots 128$ में कुल 13 पद है।

उदाहरण(15): एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 24 तथा 6 वाँ पद 192 है, तो 10वाँ

पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a^3 = ar^2 = 24$ ....(i)

तथा $a^6 = ar^5 = 192$ ....(ii)

(ii) को (i) से भाग देने पर हम पाते हैं $r=2$

(i) में $r=2$ रखने पर हम पाते हैं $a=6$

अत: $a_{10} = 6(2)^9 = 3072$

उदाहरण 16: किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 3 है तो इसके प्रथम पाँच पदों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना, गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व अनुपात r है तो,

दिया हुआ है कि, तीसरा पद, $t_3 = ar^2 = 3$ .....(i)

प्रथम पाँच पदों का गुणनफल $= t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5$

$$= a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4$$

$$= a^5 \cdot r^{10}$$

$$= (ar^2)^5$$

$$= 3^5 = 243$$

उदाहरण 17: अनुक्रम 8,88,888,.... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि, $S_n = 8+88+888+\ldots$ n पदों तक

$$= 8(1+11+111+\ldots\ n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}(9+99+999+\ldots n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots n \text{ पदों तक }]$$

$$= \frac{8}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots n \text{ पदों तक }]$$

$$-(1+1+1+\ldots n \text{ पदों तक }]$$

$$= \frac{8}{9}[\frac{(10^n-1)}{10-1} - n] = \frac{8}{81}(10^{n+1} - 10 - 9^n)$$

उदाहरण18: गुणोत्तर श्रेढ़ी $1, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots\ldots$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a = 1$, तथा $r = \frac{2}{3}$

इसलिए, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

उदाहरण 19: मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{10}(2+3^k)$

हल: $\sum_{k=1}^{10}(2+3^k)$

$$= \sum_{k=1}^{10}2 + \sum_{k=1}^{10}3^k$$

$$= (2+2+.....10 \text{ पदो तक}) + (3+3^2+3^3+.....+3^{10})$$

$$= 2\times10 + \frac{3(3^{10}-1)}{3-1}$$

$$= 20 + \frac{3^{11}-3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(40+3^{11}-3)$$

$$= \frac{1}{2}(37+3^{11})$$

उदाहरण 20: एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{13}{12}$ है तथा उनका गुणनफल -1 है, तो सार्व अनुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए?

हल: माना, गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पद है-

$\frac{a}{r}, a, ar$ तो

प्रश्न से,

$$\frac{a}{r}+a+ar=\frac{13}{12} \qquad ......(i)$$

तथा $$\left(\frac{a}{r}\right)\cdot a\cdot(ar)=-1 \qquad ......(ii)$$

(ii) से हम पाते हैं, $a^3=-1$ अर्थात् $a=-1$ (केवल वास्तविक मूल पर विचार करने से)

(i) में $a=-1$ रखने पर हम पाते हैं

$$-\frac{1}{r}-1-r=\frac{13}{12}$$

या $$12r^2+25r+12=0$$

यह r में द्विघात समीकरण है, जिसे हल करने पर हम पाते हैं,

$$r=-\frac{3}{4} \text{ या } -\frac{4}{3}$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पद हैं-

स्थिति 1: $r=-\frac{3}{4}$ के लिए

$$\frac{4}{3},-1,\frac{3}{4}$$

स्थिति 2: $r=-\frac{4}{3}$

$$\frac{3}{4},-1,\frac{4}{3}$$

4.6 गुणोत्तर माध्य [Geometric Mean(G.M.)]:

आइए, अब हम दो धनात्मक संख्याओं a और b के बीच G एक संख्या इस प्रकार लेते हैं कि,

$a.G.b$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों।

तब, $$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$$

या, $$G^2=ab$$

$$\therefore \quad G=\sqrt{ab} \qquad [\because G>0]$$

अतएव दो धनात्मक संख्याओं a और b के बीच गुणोत्तर माध्य दोनों संख्याओं के गुणनफल के वर्गमूल के बराबर होती है।

उदाहरण स्वरूप, संख्या 2 और 8 का गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

यदि दो धनात्मक संख्याएँ a तथा b दी गई हो तो उनके बीच इच्छित संख्याएँ रखी जा सकती हैं ताकि प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाय।

मान लीजिए a और b के बीच n संख्याएँ $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G_n$ इस प्रकार है कि $a, G_1, G_2, G_3, \ldots G_n, b$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है। इस प्रकार b गुणोत्तर श्रेढ़ी का $(n+2)$ वाँ पद है।

हम पाते हैं; $b = (n+2)$ वाँ पद

$b = ar^{n+1}$ जहाँ $r =$ गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्व. अनुपात

$$\therefore \quad r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

या, $$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

अत: $$G_1 = ar = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = ar^2 = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_3 = ar^3 = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

....

....

$$G_n = ar^n = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

उदाहरण 21: ऐसी तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 1 से 256 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाए।

हल: माना कि G_1, G_2, G_3 तीन गुणोत्तर माध्य 1 से 256 के बीच में है।

$\therefore$ $1, G_1, G_2, G_3, 256$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।

इसलिए, $256 = r^4$ जिससे $r = \pm 4$ (केवल वास्तविक मूल लेने पर)

$r = 4$ के लिए हम पाते हैं कि

$$G_1 = ar = 4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = 64$$

इसी प्रकार $r = -4$ के लिए संख्या -4, 16 तथा -64 है।

अतः 1 तथा 256 के बीच तीन संख्याएँ 4,16,64 हैं या $-4,16,-64$ है।

उदाहरण 22: दो संख्याएँ a और b के बीच गुणोत्तर माध्य $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ है तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है कि

$\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, संख्याएँ a और b के बीच गुणोत्तर माध्य है।

$$\therefore \quad \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \sqrt{ab}$$

या, $a^{n+1}+b^{n+1} = \sqrt{ab}(a^n+b^n)$

या, $a^{n+1}+b^{n+1} = a^{n+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{a}\cdot b^{n+\frac{1}{2}}$

या, $a^{n+\frac{1}{2}}\left[a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right] = b^{n+\frac{1}{2}}\left[a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right]$

या, $a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$ $\quad\left[\because a \neq b, \therefore \sqrt{a} \neq \sqrt{b}\right]$

या, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1$

$$\therefore \quad n+\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}.$$

4.7 समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य के बीच संबन्ध:

(Relationship between A.M. and G.M.)

माना कि दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के बीच A और G क्रमशः समान्तर माध्य (A.M.) तथा गुणोत्तर माध्य (G.M.) है तो,

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{.........(1)}$$

तथा $G=\sqrt{ab}$ .....(ii)

अब, $A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$$

$\therefore \quad A-G\geq 0$

या, $A\geq G$

साथ ही, $A=G$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

इस प्रकार, दो संख्याओं a और b के लिए A.M. तथा G.M. बराबर होंगे यदि और केवल यदि $a=b$ हों।

यदि $a\neq b$ हों तो $A.M.>G.M.$

उदाहरण 23: यदि दो धनात्मक संख्या a तथा b के बीच समान्त माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमश: 10 और 8 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: दो संख्याओं a और b के लिए,

$A.M.=\frac{a+b}{2}=10$ ....(i)

$G.M.=\sqrt{ab}=8$ ....(ii)

(i) और (ii) से हम पाते हैं,

$a+b=20$ ....(iii)

$ab=64$ ....(iv)

(iii),(iv) से a तथा b का मान सर्वसमिका $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ में रखने पर हम पाते हैं,

$$(a-b)^2=400-256=144$$

या, $a-b=\pm 12$

(iii) तथा (v) को हल करने पर हम पाते हैं,

$a=4, b=16.$

या, $a=16, b=4$

अत: संख्याएँ a तथा b क्रमश: 4,16 या 16,4 है।

प्रश्नावली-3

1. गुणोत्तर श्रेढ़ी $\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},\cdots\cdots\cdots$ का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 5वाँ पद 81 तथा दूसरा पद 24 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।
3. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 7वाँ पद उसके चौथे पद का 8 गुना है। गुणोत्तर श्रेढ़ी निकालिए यदि उसका 5वाँ पद 48 हो।
4. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 है। उसके तीसरे तथा पाँचवें पद का योग 90 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का गुणनफल 216 है तथा उनका योग 19 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{39}{10}$ तथा उनका गुणनफल 1 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए यदि गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद वास्तविक संख्याएँ हों।
7. गुणोत्तर श्रेढ़ी $3\frac{3}{2},\frac{3}{4},\ldots\ldots$ के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल $\frac{3069}{512}$ हो जाए।
8. अनुक्रम 7,77,777,7777,..... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
9. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 5वाँ, 8वाँ तथा 11वाँ पद क्रमश: p, q, s हैं तो दिखाइए कि $q^2 = ps$.
10. x के किस मान के लिए संख्याएँ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{2}{7}$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है?

11. मान ज्ञात कीजिए- $\sum_{r=1}^{n}(3^r-2^r)$

12. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 4वाँ, 10वाँ तथा 16वाँ पद क्रमश: x, y तथा z हैं, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

13. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का p वाँ, q वाँ तथा r वाँ पद क्रमश: a, b तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$.

14. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाय।

15. दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है तो दिखाइए कि संख्याएँ $(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$ के अनुपात में हैं।

16. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समान्तर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमश: 8 और 5 हैं तो द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. यदि A और G दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमश: समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हों, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याएँ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$.

—

4.8 विशेष अनुक्रमों के n पदों का योगफल:

(Sum to n Terms of Special Series)

पूर्व में हमलोग समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) के पदों का योग निकालना सीख चुके हैं। अब हम विशेष अनुक्रमों के n पदों का योगफल निकालना सीखेंगे जो A.P. या G.P.से संबन्धित हो। ये निम्नलिखित हैं-

(i) $1+2+3+.........+n$ अर्थात् प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग

(ii) $1^2+2^2+3^2+.........+n^2$ अर्थात् प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग

(iii) $1^3+2^3+3^3+.........+n^3$ अर्थात् प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग

आइए इन पर विचार किया जाय।

(i) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग

माना कि प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग S हो तो,

$$S=1+2+3+.........+n$$

$$=\frac{n}{2}[2\times1+(n-1)\times1]$$

$$=\frac{n}{2}[2+n-1]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

इस प्रकार प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग

$$i.e.\ \sum_{i=1}^{n} n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग,

$$\text{माना, } S=\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+.........n^2 \qquad ....(i)$$

हम निम्न सर्वसमिका पर विचार करते हैं-

$$k^3-(k-1)^3=k^3-(k^3-3k^2+3k-1)$$

$$=3k^2-3k+1$$

$$\therefore\ k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1 \qquad ....(ii)$$

(ii) में $k=1,2,3..........n$ रखने पर, हम पाते हैं

$$k=1,\ 1^3-0^3=3\cdot(1)^2-3(1)+1$$

$$k=2,\ 2^3-1^3=3\cdot(2)^2-3\cdot(2)+1$$

$$k=3,\ 3^3-2^3=3\cdot(3)^2-3\cdot(3)+1$$

....

....

$$k=n,\ n^3-(n-1)^3=3(n)^2-3(n)+1$$

दोनों पक्षों को जोड़न पर हम पाते हैं-

$$n^3-0^3=3(1^2+2^2+3^2+.....+n^2)-3(1+2+3+......+n)+n$$

$$n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

हम जानते है कि $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

या, $$S=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{3}\left[n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right]$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग

माना $S=1^3+2^3+3^3+.......+n^3$

हम सर्वसमिका $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ पर विचार करते हैं

क्रमशः $k=1,2,3,4......n$ रखने पर, हम पाते हैं,

$$k=1,\ 2^4-1^4=4(1)^3+6(1)^2+4(1)+1$$

$$k=2,\ 3^4-2^4=4(2)^3+6(2)^2+4(2)+1$$

$$k=3,\ 4^4-3^4=4(3)^3+6(3)^2+4(3)+1$$

....

....

$k = n-1 \qquad n^4-(n-1)^4 = 4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1$

$k = n \qquad (n+1)^4-n^4 = 4(n)^3+6(n)^2+4(3)+1$

दोनों पक्षों को जोड़ने पर हम पाते हैं,

$(n+1)^4-1^4 = 4(1^3+2^3+3^3+.........+n^3)+6(1^2+2^2+3^2+.........+n^2)$
$+4(1+2+3+......+n)+n$

$$=4S+\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}+n \qquad ....(i)$$

(i) तथा (ii) से, हम जानते हैं-

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{तथा} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

इन मानों को (i) में रखने पर हम पाते हैं-

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4+4n^3+6n^2+4n-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}-n$$

या, $\quad 4S = n^4+4n^3+6n^2+4n-n(2n^2+3n+1)-2n(n+1)-n$

$$=n^4+2n^3+n^2$$

$$=n^2(n+1)^2$$

अत: $\quad S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

उदाहरण 23: श्रेढ़ी $5^2+6^2+7^2+..........+20^2$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: $\quad 5^2+6^2+7^2+..........+20^2$

$$=(1^2+2^2+3^2+.......+20^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2)$$

$$=\frac{20(20+1)(2\times 20+1)}{6}-\frac{4(4+1)(2\times 4+1)}{6}$$

$$=\frac{20\times 21\times 41}{6}-\frac{4\times 5\times 9}{6}$$

$$=10\times 7\times 41-2\times 5\times 3$$

$$=2840.$$

उदाहरण 24: श्रेढ़ी $5+11+19+29+41+.......$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ हम श्रेढ़ी को इस प्रकार लिखें-

$$S_n = 5+11+19+29+........+a_{n-1}+a_n$$

या, $$S_n = 5+11+19+.......+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$

घटाने पर हम पाते हैं-

$$0 = 5+[6+8+10+12+.....(n-1)\text{पदों}]-a_n$$

अथवा, $$a_n = 5+\frac{(n-1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5+(n-1)(n+4)$$

$$= n^2+3n+1$$

इस प्रकार-

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{1}^{n}k+n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

$$= \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

उदाहरण 25: वैसे श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका nवाँ पद $12n^2-6n+5$ है।

हल: माना कि $t_n = 12n^2-6n+5$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} t_n = \sum_{n=1}^{n}(12n^2-6n+5)$$

$$= \sum_{n=1}^{n}12n^2-\sum_{n=1}^{n}6n+\sum_{n=1}^{n}5$$

$$= 12\sum_{n=1}^{n}n^2-6\sum_{n=1}^{n}n+5n$$

$$= \frac{12n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{6n(n+1)}{2}+5n$$

$$= 2n(2n^2+3n+1)-3n(n+1)+5n$$

$$= 4n^3+3n^2+4n$$

उदाहरण 26: श्रेढ़ी $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+......16$ पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिये गये श्रेढ़ी का n वाँ पद होगा,

$$t_n=\frac{1^3+2^3+3^3+.........+n^3}{1+3+5+.......n \text{ पदों तक}}$$

$$=\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{\frac{n}{2}\left\{2\times1+(n-1)^2\right\}}=\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n^2}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2+2n+1}{4}$$

$\therefore$ n पदों का योग, $S_n=\sum_{n=1}^{n}t_n$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{n}(n^2+2n+1)=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{n}n^2+2\sum_{n=1}^{n}n+\sum 1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}+n\right]$$

16 पदों का योग,

$$S_{16}=\frac{1}{4}\left[\frac{16(16+1)(16\times2+1)}{6}+\frac{2\times16(16+1)}{2}+16\right]$$

$$=446$$

प्रश्नावली-4

1. श्रेढ़ी $1+3+7+15+.......n$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
2. श्रेढ़ी $5+7+13+31+85+.......n$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
3. उस श्रेढ़ी के n वाँ पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद $n(n+3)$ हो।
4. श्रेढ़ी $(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+.......10$ पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए।
5. उस श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद $n(n+1)(n+4)$ है।
6. श्रेढ़ी $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+.......100$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. यदि $\sum_{n=1}^{n} n=21$ तो $\sum_{n=1}^{n} n^2$ का मान ज्ञात कीजिए।
8. श्रेढ़ी $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+.......$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
9. श्रेढ़ी $(n^2-1)^2+2(n^2-2^2)+3(n^2-3^2)+........$ n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
10. साबित करें-

$$\frac{1\times2^2+2\times3^2+.......+n(n+1)^2}{1^2\times2+2^2\times3+.........+n^2(n+1)}=\frac{2n+5}{3n+1}$$