2 वास्तविक संख्याएँ

आओ, सीखें

- परिमेय संख्याओं के गुणधर्म
- अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्म
- करणी
- वर्गकरणी की तुलना
- वर्गकरणी पर क्रिया
- वर्गकरणी का परिमेयीकरण

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने प्राकृत संख्या, पूर्णांक संख्या और वास्तविक संख्याओं का अध्ययन किया है ।

N = प्राकृत संख्याओं का समुच्चय = $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

W = पूर्ण संख्याओं का समुच्चय = $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

I = पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय = $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$

Q = परिमेय संख्याओं का समुच्चय = $\{\frac{p}{q}, | p, q \in I, q \neq 0\}$

R = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय ।

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$

परिमेय संख्याओं में क्रमसंबंध : $\frac{p}{q}$ और $\frac{r}{s}$ परिमेय संख्याएँ हो तथा $q > 0, s > 0$

(i) यदि $p \times s = q \times r$ तो $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (ii) यदि $p \times s > q \times r$ तो $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) यदि $p \times s < q \times r$ तो $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

आओ, जानें

परिमेय संख्यांओं के गुणधर्म (Properties of rational numbers)

यदि a, b, c परिमेय संख्या हो तो

गुणधर्म	योग	गुणन
1. क्रम निरपेक्ष	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. साहचर्य	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. सर्वसमिका (अधिकारक)	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. प्रतिलोम	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

थोड़ा याद करें

प्रत्येक परिमेय संख्याओं के दशमलव पूर्णांक स्वरूप सांत (खंडित) अथवा अनवसानी (अखंडित) आवर्ती ।

खंडित (सांत) रूप

(1) $\frac{2}{5} = 0.4$

(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$

(3) $\frac{101}{8} = 12.625$

अखंडित (अनवसानी) आवर्ती रूप

(1) $\frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$

(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$

(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$

आओ, जानें

अखंडित (अनवसानी) आवर्ती दशमलव रूप की परिमेय संख्या का $\frac{p}{q}$ के रूप में लेखन

उदा. (1) 0.777.... इस आवर्ती दशमलव अपूर्णांक को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए ।

हल : मानो $x = 0.777... = 0.\dot{7}$

$$\therefore\ 10x = 7.777... = 7.\dot{7}$$

$$\therefore\ 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore\ 9x = 7$$

$$\therefore\ x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore\ 0.777... = \frac{7}{9}$$

उदा. (2) 7.529529529... इस आवर्ती दशमलव अपूर्णांक $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए ।

हल : मानो, $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$

$$\therefore\ 1000x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore\ 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore\ 999x = 7522.0 \qquad \therefore\ x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore\ 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

> **आओ, सोचें**
>
> $2.4\dot{3}$ यह संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में लिखने के लिए क्या करेंगे ?

इसे ध्यान में रखें

(1) दी गई संख्या में दशमलव चिह्न के बाद कितने अंक आवर्ती है यह देखकर उसके अनुसार उस संख्या को 10, 100, 1000 में से उचित संख्या से गुणा करेंगे । उदा. $2.\dot{3}$ इस संख्या में 3 यह एक ही अंक आवर्ती है इसलिए $2.\dot{3}$ संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में लाने के लिए उसे 10 से गुणा करना पड़ेगा ।

$1.\overline{24}$ इस संख्या में 2, 4 यह दो अंक आवर्ती है । इसलिए $1.\overline{24}$ को 100 से गुणा करना पड़ेगा ।

$1.\overline{513}$ इस संख्या में 5, 1, 3 यह तीन अंक आवर्ती है इसलिए $1.\overline{513}$ को 1000 से गुणा करना पड़ेगा।

(2) परिमेय संख्याओं के हर के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर जाँच करे की उसमें 2 और 5 के अतिरिक्त अभाज्य संख्या न हो तो उस परिमेय संख्या के दशमलव रूप सांत होते हैं । 2 तथा 5 के अतिरिक्त अभाज्य संख्या हर का गुणनखंड हो तो वह संख्या के दशमलव रूप अनवसानी (अखंडित) आवर्ती होते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.1

1. निम्नलिखित में से कौन-सी परिमेय संख्यांओं के दशमल रूप सांत (खंडित) और कौन-सी संख्याओं के दशमलव रूप अनवसानी (अखंडित) आवर्ती है लिखिए ।

   (i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए ।

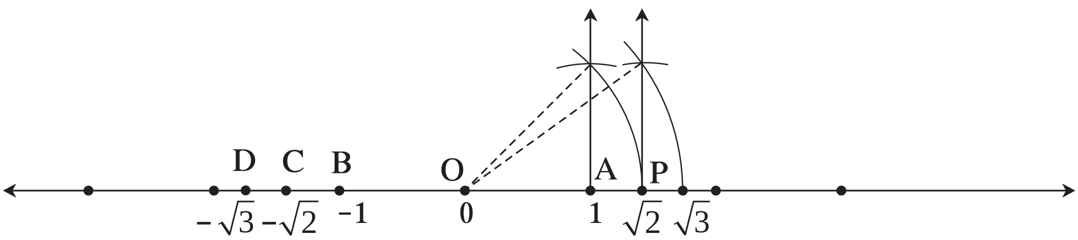
   (i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए ।

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

थोड़ा याद करें

नीचे दी गई संख्या रेखा पर दर्शाई गई संख्या $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ परिमेय संख्या नहीं है अर्थात वे अपरिमेय संख्याएँ हैं ।



इस संख्या रेखा पर OA = 1 इकाई दूरी है । बिंदु O के बाई ओर 1 इकाई दूरी पर बिंदु B है । बिंदु B का निर्देशांक -1 है । बिंदु P का निर्देशांक $\sqrt{2}$ है इसकी विपरित संख्या को बिंदु C से दर्शाया गया है । बिंदु C का निर्देशांक $-\sqrt{2}$ है। उसी प्रकार $\sqrt{3}$ की विपरित संख्या को दर्शाने वाले बिंदु D का निर्देशांक $-\sqrt{3}$ है ।

आओ, जानें

अपरिमेय और वास्तविक संख्या (Irrational and real numbers)

$\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है । इसे अप्रत्यक्ष उपपत्ति से सिद्‌ध कर सकते हैं ।

मानो की $\sqrt{2}$ यह परिमेय संख्या है । उसे $\frac{p}{q}$ मानेंगे ।

माना $\frac{p}{q}$ उस परिमेय संख्या का संक्षिप्त रूप है अर्थात p तथा q में 1 के अलावा दूसरा कोई सामान्य विभाजक नहीं है । $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\therefore$ $2 = \frac{P^2}{q^2}$ (दोनों पक्षों का वर्ग लेने पर)

$\therefore$ $2q^2 = p^2$

$\therefore$ p^2 यह सम संख्या है ।

$\therefore$ p भी सम संख्या है, अर्थात 2 यह p का विभाजक है । ....(I)

$\therefore$ $p = 2t$ $\therefore$ $p^2 = 4t^2$ $t \in I$

$\therefore$ $2q^2 = 4t^2$ ($\because$ $p^2 = 2q^2$) $\therefore$ $q^2 = 2t^2$ $\therefore$ q^2 यह सम संख्या है । $\therefore$ q यह सम संख्या हैं ।

$\therefore$ 2 यह q का भी विभाजक है । .... (II)

कथन(I) तथा (II) से 2 यह p और q का सामान्य विभाजक हैं ।

यह विसंगति है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ में p और q का 1 के अतिरिक्त दूसरा कोई सामान्य विभाजक नहीं है ।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ यह परिमेय संख्या है यह मानना गलत है ।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है ।

इसी प्रकार $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ यह अपरिमेय संख्या है । यह सिद्‌ध कर सकते हैं । उसके लिए 3 अथवा 5 संख्या n के विभाजक हो तो n^2 के भी विभाजक होते हैं इस नियम का उपयोग कीजिए ।

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ऐसी संख्याएँ, संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं ।

जिन संख्याओं को संख्या रेखा पर बिंदु रूप में दर्शाया जा सकता है उन्हें वास्तविक संख्या कहते हैं ।

अत: संख्या रेखा के प्रत्येक बिंदु का निर्देशांक ही वास्तविक संख्या है और प्रत्येक वास्तविक संख्या से संबंधित बिंदु संख्या रेखा पर होता है ।

हमें पता है कि प्रत्येक परिमेय संख्या यह वास्तविक संख्या होती है किंतु $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π, $3 + \sqrt{2}$ ऐसी वास्तविक संख्या परिमेय संख्या नहीं है अर्थात ध्यान दीजिए कि प्रत्येक वास्तविक संख्या यह परिमेय संख्या ही होती है ऐसा नहीं है ।

अपरिमेय संख्याओं का दशमलव रूप में लेखन

हम 2 तथा 3 इन संख्याओं का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात करेंगे ।

2 का वर्गमूल

	1.41421...
1	2. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$....
+1	-1
24	100
+4	-96
281	400
+ 1	-281
2824	11900
+ 4	-11296
28282	60400
+ 2	- 56564
28284 1	0383600

$\therefore \sqrt{2} = 1.41421...$

3 का वर्गमूल

	1.732....
1	3. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$....
+1	-1
27	200
+7	-189
343	1100
+ 3	-1029
3462	007100
+ 2	-6924
3464	0176

$\therefore \sqrt{3} = 1.732...$

यहाँ भाग विधि में दशमलव चिह्नों के आगे की अंकों की संख्या कभी भी समाप्त नहीं होती है अर्थात अनंत अंकों का क्रम मिलता है । यह क्रम किन्हीं अंकों के समूह के आवर्तनों से तैयार नहीं होता । अतः यह संख्या का दशमलव स्वरूप अनवसानी अनावर्ती संख्या $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है अर्थात 1.4142... और 1.732... यह भी अपरिमेय संख्या है । **इस आधार पर ध्यान में रखिए अनावसानी (अखंडित) अनावर्ती दशमलव रूपवाली संख्या अपरिमेय संख्या होती है ।**

संख्या π

कृति I

किसी मोटे कार्डबोर्ड पर विभिन्न त्रिज्यावाले वृत्त खींचिए । तीन, चार वृत्ताकार आकृति काट लीजिए । प्रत्येक आकृति की कोर से धागा घुमाकर प्रत्येक वृत्ताकार आकृति का व्यास तथा परिधि नापिए । नीचे दी गई तालिका पूर्ण कीजिए ।

अ. क्र.	त्रिज्या	व्यास (d)	परिधि (c)	अनुपात = $\frac{c}{d}$
1	7 सेमी			
2	8 सेमी			
3	5.5 सेमी			

संलग्न तालिका में $\frac{c}{d}$ का अनुपात हर समय 3.1 के लगभग आता है । अर्थात अचल है ऐसा ध्यान में आता है । उस अनुपात को π इस चिह्न से दर्शाते हैं ।

कृति II

π का लगभग मान ज्ञात करने के लिए 11 सेमी, 22 सेमी तथा 33 सेमी लंबाईवाले तार के टुकड़े लीजिए । प्रत्येक टुकड़े से वृत्त तैयार कीजिए । इन वृत्तों के व्यास नापिए तथा निम्न तालिका पूर्ण कीजिए ।

वृत्त क्र.	परिधि	व्यास	परिधि और व्यास का अनुपात
1	11 सेमी		
2	22 सेमी		
3	33 सेमी		

परिधि तथा व्यास का अनुपात यह $\frac{22}{7}$ के आसपास आता है क्या ? जाँच कीजिए ।

वृत्त की परिधि तथा व्यास का अनुपात अचर संख्या है वह अपरिमेय होती है । उस संख्या को π इन चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है । π लगभग मान $\frac{22}{7}$ अथवा 3.1428 लेते हैं ।

महान भारतीय गणिततज्ञ आर्यभट्ट ने इ. स. 499 में π का मान $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ ज्ञात किया था ।

हमें पता है कि, $\sqrt{3}$ यह अपरिमेय संख्या है । अब $2 + \sqrt{3}$ यह संख्या अपरिमेय है क्या देखेंगे ।

माना, $2 + \sqrt{3}$ यह संख्या अपरिमेय नहीं है अर्थात वह परिमेय संख्या होनी चाहिए ।

यदि $2 + \sqrt{3}$ परिमेय संख्या हो तो $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ है ऐसा समझिए ।

$\therefore \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ यह समीकरण प्राप्त होता है ।

यहाँ बायाँ पक्ष अपरिमेय संख्या और दायाँ पक्ष परिमेय संख्या ऐसी विसंगति मिलती है ।

अर्थात $2 + \sqrt{3}$ यह परिमेय संख्या नहीं है बल्कि वह अपरिमेय संख्या है, यह सिद्ध होता है ।

उसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $2\sqrt{3}$ यह अपरिमेय संख्या है ।

निम्नलिखित प्रकार से जाँच कर सकते हैं कि दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल या गुणनफल परिमेय संख्या हो सकती है ।

जैसे, $2 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 2$, $4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $(3 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3$,

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

इसे ध्यान में रखें

अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्म

(1) परिमेय संख्या तथा अपरिमेय संख्या का योग अथवा व्यवकलन अपरिमेय संख्या होती है ।

(2) शून्येत्तर परिमेय संख्या तथा अपरिमेय संख्या का गुणनफल अथवा भागफल भी एक अपरिमेय संख्या होती है ।

(3) दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल, व्यवकलन, गुणनफल तथा भागफल यह सिर्फ परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या हो सकती है ।

आओ, जानें

वास्तविक संख्यांओं के क्रमसंबंध के गुणधर्म

1. यदि a और b दो वास्तविक संख्या हो तो उसमें $a = b$ अथवा $a < b$ अथवा $a > b$ इसमें से कोई एक ही संबंध होगा ।

2. यदि $a < b$ और $b < c$ तो $a < c$

3. यदि $a < b$ तो $a + c < b + c$

4. यदि $a < b$ और यदि $c > 0$ तो $ac < bc$ और यदि $c < 0$ तो $ac > bc$

परिमेय तथा अपरिमेय संख्या लेकर उपर्युक्त नियम की जाँच कीजिए ।

ऋण संख्याओं के वर्गमूल

यदि $\sqrt{a} = b$ तो $b^2 = a$ यह हम जानते हैं ।

इस आधार पर $\sqrt{5} = x$ तो $x^2 = 5$ यह हम समझ सकते हैं ।

उसी प्रकार हम जानते हैं कि वास्तविक संख्या का वर्ग हमेशा ऋणेत्तर संख्या होती है अर्थात किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं होता परंतु $(\sqrt{-5})^2 = -5$ $\therefore$ $\sqrt{-5}$ यह वास्तविक संख्या नहीं है ।

इसलिए ऋणात्मक वास्तविक संख्या का वर्गमूल वास्तविक संख्या नहीं होती है ।

प्रश्नसंग्रह 2.2

(1) सिद्ध कीजिए कि $4\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है ।

(2) सिद्ध कीजिए कि $3 + \sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है ।

(3) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ संख्याएँ संख्या रेखा पर दर्शाइए ।

(4) निम्नलिखित संख्याओं के मध्य स्थित कोई भी तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

(i) 0.3 और −0.5 (ii) −2.3 और −2.33

(iii) 5.2 और 5.3 (iv) −4.5 और −4.6

आओ, जानें

धन परिमेय संख्या का मूल (Root of positive rational number)

यदि $x^2 = 2$ तो $x = \sqrt{2}$ अथवा $x = -\sqrt{2}$, होता है । $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं । $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$ जैसी संख्याएँ भी अपरिमेय है ।

यदि n धन पूर्णांक संख्या तथा $x^n = a$ हो तो x यह a का n वाँ मूल है ऐसा कहा जाता है । यह मूल परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या होती है ।

उदा. $2^5 = 32$ $\therefore$ 2 यह 32 का 5 वाँ मूल परिमेय है किंतु $x^5 = 2$ तो $x = \sqrt[5]{2}$ यह अपरिमेय संख्या है ।

करणी (Surds)

हम जानते हैं कि 5 यह परिमेय संख्या है किंतु $\sqrt{5}$ यह परिमेय नहीं है। जिस प्रकार वास्तविक संख्या का वर्गमूल अथवा घनमूल परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या हो सकती है। उसी प्रकार n वाँ मूल भी परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या हो सकती है।

यदि n यह 1 से बड़ी पूर्णांक संख्या हो और a इस धन वास्तविक संख्या का n वाँ मूल x से दर्शाया गया हो तो $x^n = a$ अथवा $\sqrt[n]{a} = x$ ऐसा लिखते हैं।

यदि a यह धन **परिमेय संख्या हो और a का n वाँ मूल x यह अपरिमेय संख्या हो तो x यह करणी (अपरिमेय मूल) है ऐसा कहते हैं।**

$\sqrt[n]{a}$ यह करणी संख्या हो तो $\sqrt{\ }$ इस चिह्न को **करणी चिह्न** (radical sign) कहते हैं। संख्या n को उस **करणी का घात** (order of the surd) कहते हैं और a को करणीस्थ संख्या (radicand) कहते हैं।

(1) यदि $a = 7$, $n = 3$, तो $\sqrt[3]{7}$ यह करणी है क्योंकि $\sqrt[3]{7}$ यह अपरिमेय संख्या है।

(2) यदि $a = 27$ और $n = 3$ हो तो $\sqrt[3]{27} = 3$ यह अपरिमेय संख्या नहीं है इसलिए $\sqrt[3]{27}$ यह करणी नहीं है।

(3) क्या $\sqrt[3]{8}$ यह करणी है?

यदि $\sqrt[3]{8} = p$ $\qquad$ $p^3 = 8.$ $\qquad$ कौन-सी संख्या का धन 8 है ?

हम जानते है कि, 2 इस संख्या का घन 8 है।

$\sqrt[3]{8}$ में $a = 8$ यह परिमेय संख्या है। यहाँ $n = 3$ यह धन पूर्णांक संख्या है किंतु $\sqrt[3]{8}$ यह संख्या अपरिमेय नहीं हैं क्योंकि 8 का घनमूल 2 है। $\therefore$ $\sqrt[3]{8}$ यह करणी नहीं है।

(4) अब $\sqrt[4]{8}$ का विचार करेंगे।

यहाँ $a = 8$, करणी का घात $n = 4$; किंतु 8 यह संख्या किसी भी परिमेय संख्य का चौथा घात नहीं है।

अर्थात $\sqrt[4]{8}$ यह अपरिमेय संख्या है। $\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ यह करणी है।

हम सिर्फ 2 घातवाले अर्थात $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{42}$ आदि करणी का विचार करने वाले है।

2 घातवाले करणी को **वर्गीय करणी** कहते हैं।

करणी के संक्षिप्त स्वरूप

कभी-कभी करणी संख्या को संक्षिप्त रूप दे सकते हैं।

जैसे (i) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ $\qquad$ (ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ....ऐसी कुछ करणी संक्षिप्त स्वरूप की करणी है। इन्हें और सरल रूप नहीं दिया जा सकता।

सजातीय करणी (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ यह कुछ सजातीय करणी है। ऐसा कहा जाता है कि यदि p और q परिमेय संख्याएँ हो तो $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ सजातीय करणी है। **दो करणी समान होने के लिए उनका घात समान होना चाहिए उसी प्रकार करणीस्थ संख्या समान होनी चाहिए।**

$\sqrt{45}$ तथा $\sqrt{80}$ इन करणियों का घात (कोटि) 2 है अर्थात इनका घात समान है किंतु करणीस्थ संख्या समान नहीं है अर्थात यह करणी सजातीय करणी नहीं है, ऐसा दिखता है । इन करणियों को संक्षिप्त रूप देंगे ।

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ और $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ तथा $4\sqrt{5}$ करणी सजातीय है ।

अर्थात $\sqrt{45}$ तथा $\sqrt{80}$ इन करणी का संक्षिप्त स्वरूप सजातीय करणी है ।

इसे ध्यान में रखें

यदि सरल रूप के करणी का घात तथा करणीस्थ संख्या समान हों तो उसे सजातीय करणी कहते हैं ।

आओ, जानें

करणियों की तुलना (Comparison of surds)

माना a, b, k धन वास्तविक संख्याएँ हैं ।

यदि $a < b$ तो $ak < bk$. $\therefore a^2 < ab < b^2$

अर्थात $a < b$ तो $a^2 < b^2$

इसके विपरित $a^2 < b^2$ हो तो $a = b$, $a > b$ और $a < b$ इन संभावनाओं पर विचार कीजिए

$a = b$ से $a^2 = b^2$, $a > b$ से $a^2 > b^2$ प्राप्त होता हैं, परंतु यह हमेशा संभव नहीं है ।

$\therefore a < b$ प्राप्त होता है अर्थात $a^2 < b^2$ तो $a < b$ प्राप्त होता है ।

यहाँ a और b वास्तविक संख्या हो तो वे परिमेय संख्या अथवा करणी संख्या हो सकती है ।

इसका उपयोग करके करणियों की तुलना कीजिए ।

(i) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72}$ [?] $\sqrt{125}$

किंतु 72 [<] 125

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

अथवा

$(6\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}, \sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3}$ [?] $\sqrt{192}$

$\sqrt{192}$ [?] $\sqrt{192}$

किंतु 192 [=] 192

$\therefore \sqrt{192}$ [=] $\sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3}$ [=] $\sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98}$ [?] $\sqrt{75}$

किंतु 98 [>] 75

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

अथवा

$(7\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

सजातीय करणियों पर संक्रियाएँ (Operations on like surds)

सजातीय करणी पर जोड़ घटाना, गुणा तथा भाग की संक्रियाएँ कर सकते हैं ।

उदा. (1) सरल रूप दीजिए : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

हल : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

उदा. (2) सरल रूप दीजिए : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

हल : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

थोड़ा सोचें

$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \overset{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

उदा. (3) सरल रूप दीजिए : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

हल : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$

$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

उदा. (4) सरल रूप दीजिए : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

हल : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$

$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

उदा. (5) करणियों का गुणनफल ज्ञात कीजिए : $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

हल : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ यह अपरिमेय संख्या है ।)

उदा. (6) करणियों का भागफल ज्ञात कीजिए : $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

हल : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ (5 यह परिमेय संख्या है ।)

उदा. (7) $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि दो करणियों का गुणनफल अथवा भागफल परिमेय संख्या हो सकती है ।

करणियों का परिमेयीकरण (Rationalization of surd)

जब दो करणियों का गुणनफल परिमेय संख्या होती है तब प्रत्येक करणी को दूसरी करणी का **परिमेयीकरण गुणांक** (Rationalizing Factor) कहते हैं ।

उदा. (1) $\sqrt{2}$ इस करणी को $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर $\sqrt{2\times2} = \sqrt{4}$ प्राप्त होता है । $\sqrt{4} = 2$ यह परिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ का परिमेयीकरण गुणांक $\sqrt{2}$ है ।

उदा. (2) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ यह परिमेय संख्या है ।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ का परिमेयीकरण का गुणांक $\sqrt{8}$ है ।

उसी प्रकार $8\sqrt{2}$ यह करणी भी $\sqrt{2}$ इस करणी का परिमेयीकरण गुणांक है ।

क्योंकि $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$

$\sqrt{2}$ के परिमेयीकरण गुणांक $\sqrt{6}$, $\sqrt{16}$ $\sqrt{50}$ है क्या इसकी जाँच कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

दी गई करणी का परिमेयीकरण गुणांक केवल एक ही नहीं होता है । यदि कोई करणी दी गई किसी करणी का परिमेयीकरण गुणांक हो तो उसे शून्येतर परिमेय संख्या से गुणाकर प्राप्त करणी भी दी गई करणी का परिमेयीकरण गुणांक होती है ।

उदा. (3) $\sqrt{27}$ का परिमेयीकरण गुणांक ज्ञात कीजिए ।

हल : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times3} = 3\sqrt{3}$ $\quad\quad$ $\therefore$ $3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ यह परिमेय संख्या है ।

$\therefore$ $\sqrt{27}$ का परिमेयीकरण गुणांक $\sqrt{3}$ है ।

ध्यान दीजिए कि, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ अर्थात $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$

अर्थात $\sqrt{27}$ यह दी गई करणी का $3\sqrt{3}$ यह भी परिमेयीकरण गुणक है । इसके अतिरिक्त $4\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ ऐसे कई गुणांक प्राप्त होंगे । इसमें से $\sqrt{3}$ यह सबसे सरल लेखन का (रचना का) परिमेयीकरण गुणांक है ।

उदा. (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad\quad$ ....अंश तथा हर को $\sqrt{5}$ से गुणा कीजिए ।

उदा. (5) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\times7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ $\quad\quad$ (यहाँ $2\sqrt{7}$ को $\sqrt{7}$ गुणा करना पर्याप्त है ।)

इसे ध्यान में रखें

हर का परिमेयीकरण करने के लिए परिमेयीकरण गुणांक का उपयोग होता है ।
किसी भी संख्या का हर परिमेय संख्या होना सुविधाजनक होता है इसलिए हर का परिमेयीकरण करते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.3

(1) निम्न करणियों के कोटि बताइए ।

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या करणी है बताइए ।

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) निम्नलिखित युग्मों में कौन-से करणी के युग्म सजातीय तथा कौन-सी विजातीय है । पहचानकर लिखिए ।

(i) $\sqrt{52}$, $5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}$, $5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}$, $7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}$, $6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}$, $7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}$, $\sqrt{75}$

(4) निम्नलिखित करणियों को संक्षिप्त रूप लिखिए ।

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) निम्नलिखित संख्याओं में क्रमसंबंध ज्ञात कीजिए ।

(i) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}$, $\sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}$, $7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}$, $9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}$, 9 (vii) 7, $2\sqrt{5}$

(6) निम्नलिखित संख्या को सरल रूप में लिखिए ।

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) निम्नलिखित संख्याओं का गुणा करके उसे संक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) निम्नलिखित संख्याओं का भाग करके उसे संक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) निम्नलिखित संख्याओं में हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

थोड़ा याद करें

हमें यह पता है कि

यदि $a > 0, b > 0$ तो $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$

गुणा कीजिए ।

उदा. (1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18})$

$= \sqrt{2 \times 8} + \sqrt{2 \times 18}$

$= \sqrt{16} + \sqrt{36}$

$= 4 + 6$

$= 10$

उदा. (2) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$

$= 2 \times 3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3 \times 2$

$= 6 - 5\sqrt{6} + 6$

$= 12 - 5\sqrt{6}$

आओ, जानें

वर्ग करणी का द्विपद रूप (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$ यह वर्ग करणी के द्विपद रूप है; उसी प्रकार $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$ यह भी करणी का द्विपद रूप है ।
- निम्नलिखित गुणा का अध्ययन कीजिए ।
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ और $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ इन द्विपद करणियों के युग्म का गुणनफल परिमेय संख्या है । ऐसे द्विपद करणी के युग्मों को **अनुबद्ध युग्म** कहते हैं ।

द्विपद करणी और उसका अनुबद्ध युग्म यह दोनों संख्या परस्पर एक-दूसरे के परिमेयीकरण गुणांक होते हैं ।

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ अथवा $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ इनमें से प्रत्येक द्विपद करणी यह $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ इस द्विपद करणी की अनुबद्ध युग्म है ।

उसी प्रकार $7 + \sqrt{3}$ का अनुबद्ध युग्म $7 - \sqrt{3}$ है ।

इसे ध्यान में रखें

दि्वपद करणी के अनुबद्ध युग्म के पदो का गुणनफल हमेशा परिमेय संख्या होती है ।

आओ, जानें

हरों का परिमेयीकरण (Rationalization of the denominator)

अनुबद्ध युग्म तथा द्विपद करणी का गुणनफल परिमेय संख्या होती है । इस गुणधर्म की सहायता से हर, द्विपद करणी हो ऐसी संख्याओं के हर का परिमयेकरण कर सकते हैं ।

उदा.(1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ इस संख्या के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ इस द्विपद करणी का अनुबद्ध युग्म $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ है

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

उदा. (2) $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ इस संख्या के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ इस द्विपद करणी का अनुबद्ध युग्म $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ है ।

$$\therefore \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{8\times3\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{9\times2-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{18-5} = \frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{13}$$

प्रश्नसंग्रह 2.4

(1) निम्नलिखित संख्याओं का गुणा कीजिए ।

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) निम्नलिखित संख्याओं के हरों का परिमेयीकरण कीजिए ।

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

आओ, जानें

निरपेक्ष मान (Absolute value)

x यह वास्तविक संख्या हो तो x का निरपेक्ष मान (Absolute Value) अथवा संख्या रेखा के शून्य से उस संख्या तक की दूरी $|x|$ ऐसे लिखते हैं। $|x|$ का वाचन x का निरपेक्ष मान ऐसा करते हैं।

निरपेक्ष मान की परिभाषा निम्न प्रकार से करते हैं।

यदि $x > 0$ तो $|x| = x$ यदि x यह धन हो तो x का निरपेक्ष मान x होगा।

यदि $x = 0$ तो $|x| = 0$ यदि x शून्य हो तो x का निरपेक्ष मान शून्य ही होगा।

यदि $x < 0$ तो $|x| = -x$ यदि x ऋण हो तो x का निरपेक्ष मान x के विपरित संख्या के बराबर होगा।

उदा. (1) $|3| = 3$ $|-3| = -(-3) = 3$ $|0| = 0$

किसी भी वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान ऋण नहीं होता है।

उदा. (2) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $|9-5| = |4| = 4$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8| - |-3| = 5$ (iv) $|8| \times |4| = 8 \times 4 = 32$

उदा. (3) हल कीजिए। $|x-5| = 2$

हल : $|x-5| = 2$ $\therefore x - 5 = +2$ अथवा $x - 5 = -2$

$\therefore x = 2 + 5$ अथवा $x = -2+5$

$\therefore x = 7$ अथवा $x = 3$

प्रश्नसंग्रह 2.5

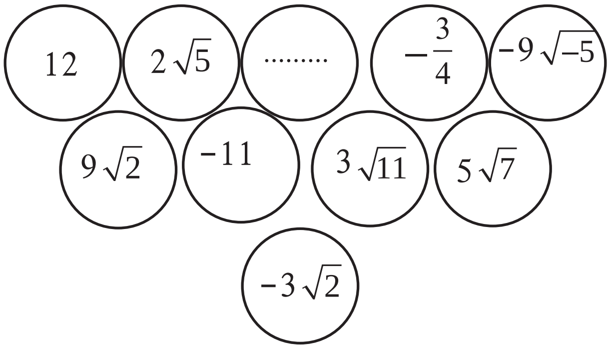
(1) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $|15 - 2|$ (ii) $|4 - 9|$ (iii) $|7| \times |-4|$

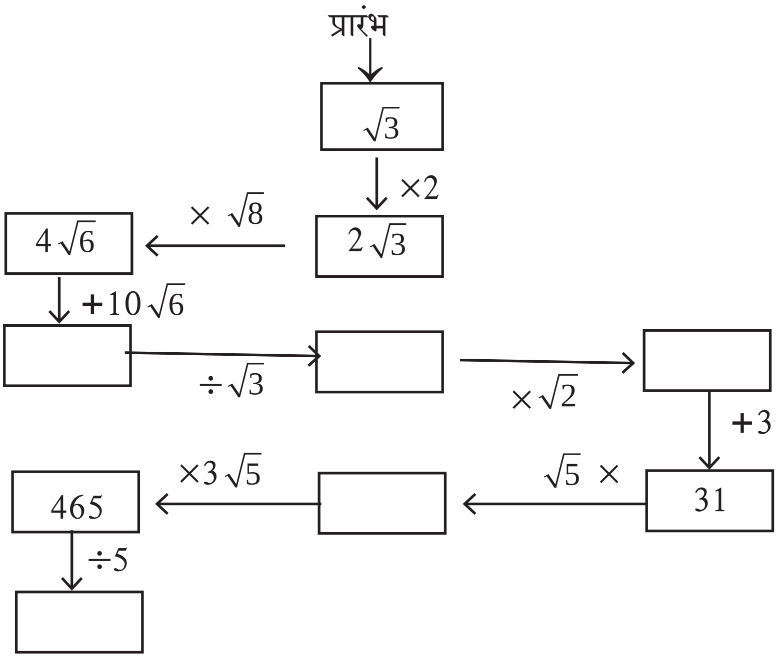
(2) हल कीजिए।

(i) $|3x-5| = 1$ (ii) $|7-2x| = 5$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

कृति (I) : संलग्न आकृति में कार्ड पर कुछ वास्तविक संख्याएँ लिखी गई है । इन संख्याओं की सहायता से योग, व्यवकलन (घटाना), गुणा तथा भाग के दो-दो उदाहरण तैयार करके उन्हें हल कीजिए ।



कृति (II) :



प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

(1) निम्नलिखित प्रश्नों में बहु वैकल्पिक उत्तर में से सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) निम्नलिखित में से अपरिमेय संख्या कौन-सी ?

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) निम्नलिखित में से अपरिमेय संख्या कौन-सी ?

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या के दशमलव स्वरूप अनवसानी आवर्ती है ?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) संख्या रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु क्या दर्शाता है ?

(A) प्राकृत संख्या (B) अपरिमेय संख्या (C) परिमेय संख्या (D) वास्तविक संख्या

(v) $0.\dot{4}$ इस संख्या का परिमेय रूप कौन-सा ?

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) यदि n यह पूर्ण वर्ग संख्या न हो तो $\sqrt{n}$ यह निम्नलिखित में से कौन–सी संख्या होगी ?

(A) प्राकृत संख्या (B) परिमेय संख्या

(C) अपरिमेय संख्या (D) A, B, C यह तीनों विकल्प हो सकते हैं ।

(vii) निम्नलिखित में से कौन–सी संख्या करणी नहीं है?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ इस करणी का घात (कोटी) कितना ?

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ इस द्विपद करणी का अनुबद्ध युग्म कौन–सा ?

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $|12-(13+7)\times 4|$ का मान कितना?

(A) −68 (B) 68 (C) −32 (D) 32

(2) निम्नलिखित संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए ।

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए ।

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $5+\sqrt{7}$ यह संख्या अपरिमेय है यह सिद्ध कीजिए ।

(5) निम्नलिखित करणी का संक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) निम्नलिखित करणीं को संक्षिप्त परिमेयीकरण गुणांक में लिखिए ।

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) निम्नलिखित करणी को सरल रूप में लिखिए ।

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) निम्नलिखित हरों का परिमेयीकरण कीजिए ।

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$