

अध्याय 4

सारणिक

[DETERMINANTS]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए—

1. यदि A , 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है, तो $|\text{adj } A|$ का मान है— (म.प्र. 2019)

- (a) $|A|$ (b) $|A|^2$ (c) $|A|^3$ (d) $3|A|$.

2. यदि a, b, c समांतर श्रेढी में हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ का मान होगा—

- (a) 0 (b) 1 (c) x (d) $2x$.

3. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} होगा—

- (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
 (c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

4. यदि ω इकाई का घनमूल हो, तो $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} =$

- (a) 1 (b) 0 (c) ω (d) ω^2 .

5. सारणिक $\begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a+2b & a+3b & a+4b \\ a+4b & a+5b & a+6b \end{vmatrix} =$

- (a) $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$ (b) 0
 (c) $a^3 + b^3 + c^3$ (d) इनमें से कोई नहीं।

6. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो $\det(A^{-1})$ बराबर— (म.प्र. 2020)

- (a) $\det(A)$ (b) $\frac{1}{\det(A)}$ (c) 1 (d) 0.

7. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = 0$ हो, तो x बराबर है— (म.प्र. 2023)

- (a) 6 (b) ± 6 (c) -6 (d) 0.

उत्तर—1. (b), 2. (a), 3. (a), 4. (b), 5. (b), 6. (b), 7. (b).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. यदि $\begin{vmatrix} 3 & m \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$ हो, तो $m = \dots\dots\dots$

2. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ में अवयव -3 का सहखण्डज है।

3. यदि $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ हो, तो $|3A|$ का मान है।

4. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \log_3 a \\ \log_2 b & 1 \end{vmatrix}$ का मान है।

5. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos 70^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 70^\circ & \cos 20^\circ \end{vmatrix}$ का मान है।

6. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega \\ \omega & -\omega \end{vmatrix}$ का मान है।

(म.प्र. 2022)

उत्तर—1. 3 2 -1, 3. 27A, 4. 0, 5. 0, 6. 1.

प्रश्न 3. निम्न कथनों में सत्य/असत्य बताइए—

1. सारणिक $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & a & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ का मान abc है।

2. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin \theta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos \theta \end{vmatrix}$ का उच्चिष्ठ मान $\frac{1}{2}$ है।

3. यदि A एक 3×3 कोटि का आव्यूह हो, तो $|kA|$ का मान $k^2|A|$ होगा।

4. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो x का मान ± 3 है।

5. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega \\ \omega & -\omega \end{vmatrix}$ का मान 1 है।

उत्तर—1. सत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. असत्य, 5. सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. k के कितने मानों के लिए रेखिक समीकरणों $4x + ky + 2z = 0$, $kx + 4y + z = 0$, $2x + 2y + z = 0$ का एक शून्येतर हल होगा।

2. यदि समीकरण $2x^2 + 3x + 5 = 0$ के मूल α, β हों, तो $\begin{vmatrix} 0 & \beta & \beta \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि शीर्षों $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग एकांक हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A = \begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{vmatrix} = 8$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. सारणिक $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

र—1, 2, 2, $-\frac{15}{4}$, 3, 12, -2, 4, 2, 5, -8.

ति लघु उत्तरीय प्रश्न-I

प्रश्न 1. $\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2. $\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & y \end{vmatrix} = 24$ तो y का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x & 0 \end{vmatrix} = -16$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4. यदि $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$ तो $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. यदि $\begin{vmatrix} a & \omega \\ \omega & -\omega \end{vmatrix} = 1$ हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6. यदि $\begin{vmatrix} 3 & m \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$ हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. यदि $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 30$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 8. यदि $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ m & m \end{vmatrix} = 21$ तो m का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10. यदि $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -m & m \end{vmatrix} = 21$ हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11. यदि $\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 12$ हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12. यदि $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 20$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 13. यदि ω, ω^2 इकाई के सम्मिश्र घनमूल हों, तो $\begin{vmatrix} 1 & \omega \\ \omega & -\omega \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14. $\begin{vmatrix} 224 & 777 & 32 \\ 735 & 888 & 105 \\ 812 & 999 & 116 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 15. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 16. $\begin{vmatrix} 2+3i & 4 \\ 1 & 2-3i \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 17. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ में अवयव -3 का सहखण्ड क्या है ?

प्रश्न 18. यदि $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & x \end{vmatrix} = 16$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 19. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 20. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ में अवयव 2 का उपसारणिक क्या होगा ?

प्रश्न 21. $\begin{vmatrix} 2+5i & 5 \\ 4 & 2-5i \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 22. $\begin{vmatrix} \cot x & \operatorname{cosec} x \\ \operatorname{cosec} x & \cot x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 23. $\begin{vmatrix} \cos 70^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 70^\circ & \cos 20^\circ \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 24. $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(म.प्र. 2023)

उत्तर—1. -8 , 2. -5 , 3. 4 , 4. 45 , 5. 1 , 6. 3 , 7. -3 , 8. 3 , 9. 6 , 10. 21 , 11. -3 , 12. 8 , 13. 1 , 14. 0 ,
15. 4 , 16. 9 , 17. 1 , 18. 8 , 19. 0 , 20. 3 , 21. 9 , 22. -1 , 23. 0 , 24. $\cos 2x$.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न-II

प्रश्न 1. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(NCERT)

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$

$$\Delta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \Delta = 1, \quad [\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1]$$

उत्तर

प्रश्न 2. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(NCERT)

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

$$\Delta = (2)(-1) - (4)(-5)$$

$$\Rightarrow \Delta = -2 + 20 = 18.$$

उत्तर

प्रश्न 3. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

(NCERT)

हल : दिया गया है—

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 \times 1 - 4 \times 5 = 2x \times x - 4 \times 6$$

$$\Rightarrow 2 - 20 = 2x^2 - 24$$

$$\Rightarrow -18 = 2x^2 - 24$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 24 - 18$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

उत्तर

प्रश्न 4. सारणिक $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(NCERT)

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

$$\Delta = (x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow \Delta = x^3 + 1 - (x^2 - 1), [\because (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3; (a-b)(a+b) = a^2 - b^2]$$

$$\Rightarrow \Delta = x^3 + 1 - x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \Delta = x^3 - x^2 + 2.$$

उत्तर

प्रश्न 5. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ के अवयवों के उप-सारणिक व सहखण्ड लिखिए। (NCERT)

हल : माना $A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

a_{11} का उपसारणिक $M_{11} = 3$

a_{12} का उपसारणिक $M_{12} = 0$

a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = -4$

a_{22} का उपसारणिक $M_{22} = 2$

a_{11} का सहखण्ड $A_{11} = (-1)^{1+1}(3) = 3$

a_{12} का सहखण्ड $A_{12} = (-1)^{1+2}(0) = -(0) = 0$

a_{21} का सहखण्ड $A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = -(-4) = 4$

a_{22} का सहखण्ड $A_{22} = (-1)^{2+2}(2) = 1(2) = 2.$

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न-I

प्रश्न 1. निम्न सारणिक को हल कीजिए—

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

(म.प्र. 2022)

$$\text{हल : } \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x+1 \begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ 3 & x+4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & x+4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & x+2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)[(x+2)(x+4)-15] - 3(2x+8-10) + 5(6-2x-4) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)[x^2+2x+4x+8-15] - 3(2x-2) + 5(2-2x) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+6x-7) - 6x+6+10-10x = 0$$

$$\Rightarrow x^3+6x^2-7x+x^2+6x-7-6x+6+10-10x = 0$$

$$\Rightarrow x^3+7x^2-17x+9 = 0$$

$$\Rightarrow x^3+9x^2-2x^2-18x+x+9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x+9)-2x(x+9)+(x+9) = 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x^2-2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -9, 1, 1.$$

उत्तर

प्रश्न 2. सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। (NCERT)

हल : माना बिंदु A(1, 2) और B(3, 6) को मिलाने वाली रेखा पर एक बिंदु P(x, y) स्थित है।
दिये गये बिंदु संरेखीय हैं।

$$\therefore \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{यहाँ } x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = 3, y_2 = 6, x_3 = x$$

$$\text{तथा } y_3 = y$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर,

$$\Rightarrow 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 6 - y - 2(3 - x) + 3y - 6x &= 0 \\
 \Rightarrow 6 - y - 6 + 2x + 3y - 6x &= 0 \\
 \Rightarrow -4x + 2y &= 0 \\
 \Rightarrow 2y &= 4x \\
 \Rightarrow y &= 2x
 \end{aligned}$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

उत्तर

प्रश्न 3. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(3, 8)$, $(-4, 2)$ और $(5, 1)$ हैं।

(म.प्र. 2019, NCERT)

$$\text{हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{यहाँ } x_1 = 3, y_1 = 8, x_2 = -4, y_2 = 2, x_3 = 5, y_3 = 1$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर,

$$\begin{aligned}
 \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \left[3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)] \\
 &= \frac{1}{2} [3(1) - 8(-9) + 1(-14)] \\
 &= \frac{1}{2} [3 + 72 - 14] \\
 &= \frac{1}{2} [75 - 14] \\
 &= \frac{61}{2}
 \end{aligned}$$

$$= 30.5 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 4. सारणिक के प्रयोग से उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक $(2, 7)$, $(1, 1)$ तथा $(10, 8)$ हैं।

(NCERT)

$$\text{हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल } \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{यहाँ } x_1 = 2, y_1 = 7, x_2 = 1, y_2 = 1, x_3 = 10, \text{ तथा } y_3 = 8$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल } \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} \right], [R_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर}]$$

$$= \frac{1}{2} [2(1-8) - 7(1-10) + 1(8-10)]$$

$$= \frac{1}{2} [2(-7) - 7(-9) + 1(-2)]$$

$$= \frac{1}{2} [-14 + 63 - 2]$$

$$= \frac{47}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 5. सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। (NCERT)

हल : माना बिंदु $A(1, 2)$ और $B(3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा पर एक बिंदु $P(x, y)$ स्थित है।
दिये गये बिंदु संरेखीय हैं।

$$\therefore \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

यहाँ $x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = 3, y_2 = 6, x_3 = x$
तथा $y_3 = y$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

[R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर]

$$\Rightarrow 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 6 - y - 2(3 - x) + 3y - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 6 - y - 6 + 2x + 3y - 6x = 0$$

$$\Rightarrow -4x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow 2y = 4x$$

$$\Rightarrow y = 2x$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

उत्तर

प्रश्न 6. त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$ हैं। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। (NCERT)

$$\text{हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल } \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

यहाँ $\Delta = \pm 4, x_1 = k, y_1 = 0, x_2 = 4, y_2 = 0, x_3 = 0, y_3 = 2$

$$\therefore \pm 4 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \pm 8 = k \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad [R_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर}]$$

$$\Rightarrow k(0-2) + 1(8-0) = \pm 8$$

$$\Rightarrow -2k + 8 = \pm 8$$

+ चिन्ह लेने पर,

$$-2k + 8 = 8$$

$$\Rightarrow -2k = 0$$

$$\Rightarrow k = 0$$

- चिन्ह लेने पर,

$$-2k + 8 = -8$$

$$\Rightarrow -2k = -16$$

$$\Rightarrow k = 8$$

$$\therefore k = 0, 8.$$

उत्तर

प्रश्न 7. यदि $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$.

(NCERT)

हल : दिया है :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \times 4 - 5 \times 0 = -12$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \times 4 - 5 \times 6)$$

$$= -(8 - 30) = 22$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 + 3 \times 6 = 18$$

$$\therefore a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$$

$$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18)$$

$$= -24 - 66 + 90$$

$$= -90 + 90$$

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0.$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 8. तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात

कीजिए।

(NCERT)

हल :

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} = 1(z-y) = z-y$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = -1(z-x) = x-z$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 1(y-x) = y-x$$

हम जानते हैं कि

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$\Rightarrow \Delta = yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x)$$

$$\Rightarrow \Delta = yz^2 - y^2z + x^2z - xz^2 - xy(x-y)$$

$$\Rightarrow \Delta = yz^2 - xz^2 + x^2z - y^2z - xy(x-y)$$

$$\Rightarrow \Delta = z^2(y-x) + z(x^2 - y^2) - xy(x-y)$$

$$\Rightarrow \Delta = -z^2(x-y) + z(x-y)(x+y) - xy(x-y)$$

$$\Rightarrow \Delta = (x-y)[-z^2 + z(x+y) - xy]$$

$$\Rightarrow \Delta = (x-y)[-z^2 + zx + zy - xy]$$

$$\Rightarrow \Delta = (x-y)[zx - z^2 + y(z-x)]$$

$$\Rightarrow \Delta = (x-y)[z(x-z) + y(z-x)]$$

$$\Rightarrow \Delta = (x-y)[y(z-x) - z(z-x)]$$

$$\Rightarrow \Delta = (x-y)(y-z)(z-x).$$

उत्तर

प्रश्न 9. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक व सहखण्ड लिखिए। (NCERT)

हल : माना $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$a_{11} \text{ का उपसारणिक } M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-1)(1) \\ = 10 + 1 = 11$$

$$a_{12} \text{ का उपसारणिक } M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - (-1)(0) \\ = 6 - 0 = 6$$

$$a_{13} \text{ का उपसारणिक } M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 5 \times 0 \\ = 3 - 0 = 3$$

$$a_{21} \text{ का उपसारणिक } M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \times 2 - 4 \times 1 \\ = 0 - 4 = -4$$

$$a_{22} \text{ का उपसारणिक } M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 4 \times 0 \\ = 2 - 0 = 2$$

$$a_{23} \text{ का उपसारणिक } M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 \\ = 1 - 0 = 1$$

$$a_{31} \text{ का उपसारणिक } M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0(-1) - 5 \times 4 \\ = 0 - 20 = -20$$

$$a_{32} \text{ का उपसारणिक } M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 4 \times 3 \\ = -1 - 12 = -13$$

$$a_{33} \text{ का उपसारणिक } M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 0 \times 3 \\ = 5 - 0 = 5$$

$$a_{11} \text{ का सहखण्ड } A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} \\ = -(-4) = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = -20$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} \\ = -(-13) = 13$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = 5.$$