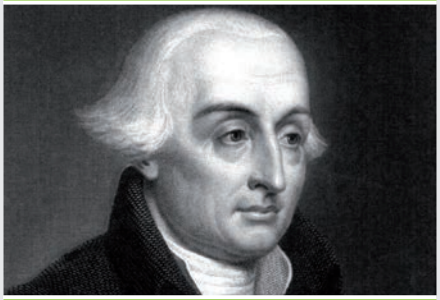
5 எண்ணியல் முறைகள்



ஜோசப்– லூயி இலக்ராஞ்சி
(25.01.1736 - 10.04.1813)

அறிமுகம்

எண்ணியல் பகுப்பாய்வு என்பது கணிதத்தின் ஒரு கிளையாகும். அது இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை செயலிகளை திரும்பத்திரும்ப பயன்படுத்தப்படும் பொழுது கிடைக்கும் தோராயத் தீர்வுகளுக்கு வழி வகுக்கிறது. எண்ணியல் பகுப்பாய்வினை அறிவதற்கு எண்ணிடத்தக்க வேறுபாடுகளைப் பற்றி அறிந்திருப்பது அவசியமாகும்.

ஜோசப்–லூயி இலக்ராஞ்சி ஒரு இத்தாலிய கணிதவியலாளரும், வானியளலாளரும் ஆவார். இவர் பகுப்பாய்வு, எண் கோட்பாடு மற்றும் வானிய இயக்கவியல் ஆகிய துறைகளில் குறிப்பிடத்தக்க பங்களிப்பை செய்துள்ளார்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்னர் பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்களால் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்.

- திட்டமான வேறுபாடுகளை அமைத்தல்.
- திட்டமான வேறுபாடுகளைக் கொண்டு பல்லுறுப்புக் கோவையை காணல்.
- செயலிகளுக்கிடையே யான தொடர்புகளை அறிதல்.
- விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணல்.
- கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் இடை மதிப்புகளை நியூட்டனின் இடைச்செருகல் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி காணல்.
- இலக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்பு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

95TJZ6

5.1 திட்டமான வேறுபாடுகள் (FINITE DIFFERENCES)

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ என்ற சார்பின் மாறிகளையும் (arguments) $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்ற சார்பலன் களையும் (entries) எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $y = f(x)$ என்பது ஒரு சார்பாகும். x-ன் மதிப்புகள் ஏறுவரிசையில் இருப்பதாகவும் மற்றும் அவை சம இடைவெளிகளில் இருப்பதாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம். சமஇடைவெளிகளின் நீளம் h என்போம். $x_0, x_0+h, x_0+2h, \cdots, x_0+nh$ என்பன x-ன் மதிப்புகள் என்போம். அவற்றிற்குரிய சார்பலன்கள் $f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h), \cdots, f(x_0+nh)$ என்பனவாகும். இங்கு $y = f(x)$ என்ற சார்புக்கான திட்டமான வேறுபாடுகள் குறித்துக் காண்போம்.

5.1.1 முன்னோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி, பின்னோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி மற்றும் இடப்பெயர்வுச் செயலி (Forward Difference Operator, Backward Difference Operator and Shifting Operator)

முன்நோக்கி வேறுபாட்டுச் செயலி [Δ டெல்டா] (Forward Difference Operator):

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்க. $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்பன முறையே $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y -ன் மதிப்புகள் ஆகும், $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2, \ldots,$ $y_n - y_{n-1}$ என்பன முதல்(முன்நோக்கு) வேறுபாடுகள். இவைகள் முறையே $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_{n-1}$.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 108 3/5/2020 11:38:19 AM

அதாவது, $\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1$
$\Delta y_2 = y_3 - y_2, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$

பொதுவாக , $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, n = 0,1,2,3,\dots$

குறியீடு Δ என்பது முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி. Δ என்பது டெல்டா (delta) என அழைக்கப்படும்.

முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி Δ-வை கீழ்க்கண்டவாறும் வரையறுக்கலாம்.

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, h என்பது சம இடைவெளி.

பண்புகளின் நிரூபணங்கள் நமது பாடத்திட்டத்தில் சேர்க்கப்படவில்லை.

Δ செயலியின் பண்புகள்:

பண்பு 1: c என்பது மாறிலி எனில் $\Delta c = 0$

நிரூபணம்: $f(x) = c$ என்க.

$\therefore f(x+h) = c$ (இங்கு h என்பது சம இடைவெளி)

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta c = c - c = 0$$

பண்பு 2: Δ பங்கீட்டு பண்பை நிவர்த்தி செய்யும்.
அதாவது $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

நிரூபணம்: $\Delta[f(x)+g(x)]$

$= [f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]$

$= f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)$

$= f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$

$= \Delta f(x) + \Delta g(x)$

இதேபோன்று $\Delta[f(x)-g(x)] = \Delta f(x) - \Delta g(x)$

பொதுவாக, $\Delta[f_1(x)+f_2(x)\dots\dots+f_n(x)]$
$= \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \dots + \Delta f_n(x)$

பண்பு 3: c என்பது ஒரு மாறிலி எனில்

$\Delta c f(x) = c \Delta f(x)$

நிரூபணம்: $\Delta[c f(x)] = c f(x+h) - c f(x)$

$= c[f(x+h) - f(x)]$

$= c \Delta f(x)$

நிரூபணமற்ற முடிவுகள்

1. m மற்றும் n என்பது மிகை முழுக்கள் எனில் $\Delta^m . \Delta^n f(x) = \Delta^{m+n} f(x)$
2. $\Delta[f(x)\, g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$
3. $\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x).\ g(x+h).}$

முதல்நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் முறையே $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \dots, \Delta^2 y_n$ என்பன இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

இங்கு $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n)$

$= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$

$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n, n = 0,1,2,\dots$

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$

இதேபோன்று இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளின் வேறுபாடுகள் மூன்றாம்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n, n = 0,1,2,\dots$

குறிப்பாக, $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$

குறிப்பு

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$$

பொதுவாக y_n -இன் k-ம் நிலை வேறுபாடுகள்

$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n, n = 0,1,2,\dots$

மேற்கண்ட வேறுபாடுகளை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் எளிய முறையில் குறிக்கலாம்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 109 3/5/2020 11:38:29 AM

y-ன் முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

$f(x)$–ன் முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை

x	$f(x)$				
		$\Delta\, f(x)$			
$x+h$	$f(x+h)$		$\Delta^2\, f(x)$		
		$\Delta\, f(x+h)$		$\Delta^3 f(x)$	
$x+2h$	$f(x+2h)$		$\Delta^2\, f(x+h)$		$\Delta^4\, f(x)$
		$\Delta\, f(x+2h)$		$\Delta^3\, f(x+h)$	
$x+3h$	$f(x+3h)$		$\Delta^2\, f(x+2h)$		
		$\Delta\, f(x+3h)$			
$x+4h$	$f(x+4h)$				

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி [∇ நெப்லா] (Nepla) (Backward difference operator) :

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்க. $y_0, y_1, \ldots y_n$ என்பன முறையே $x = x_0, x_1, x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y -ன் மதிப்புகள் ஆகும். பிறகு

$$y_1 - y_0 = \nabla y_1$$

$$y_2 - y_1 = \nabla y_2$$

பொதுவாக, $y_n - y_{n-1} = \nabla y_n$

என்பன முதல்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடாகும். குறியீடு ∇ என்பது பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி. இதனை நாம் நெப்லா (Nepla) எனஅழைக்கிறோம்.

இரண்டாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடுகள்:

$$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1},\ n = 1,2,3,\ldots$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 110 3/5/2020 11:38:39 AM

மூன்றாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடுகள்:

$$\nabla^3 y_n = \nabla^2 y_n - \nabla^2 y_{n-1},\ n = 1,2,3,\ldots$$

பொதுவாக, k-ம் நிலை வேறுபாடுகள்:

$$\nabla^k y_n = \nabla^{k-1} y_n - \nabla^{k-1} y_{n-1},\ n = 1,2,3,\ldots$$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுஅட்டவணை:

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி பின்வருமாறும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

முதல்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x)$$

$$\nabla f(x+2h) = f(x+2h) - f(x+h)$$

இங்கு h என்பது சம இடைவெளி.

இரண்டாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla^2 f(x+h) = \nabla(\nabla f(x+h)) = \nabla(f(x+h) - f(x))$$

$$= \nabla f(x+h) - \nabla f(x)$$

$$\nabla^2 f(x+2h) = \nabla f(x+2h) - \nabla f(x+h)$$

மூன்றாம்நிலை (பின்நோக்கு) வேறுபாடு:

$$\nabla^3 f(x+h) = \nabla^2 f(x+h) - \nabla^2 f(x)$$

$$\nabla^3 f(x+2h) = \nabla^2 f(x+2h) - \nabla^2 f(x+h)$$

இங்கு, $\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$

$$\nabla f(x+2h) = f(x+2h) - f(x+h) = \Delta f(x+h)$$

$$\nabla^2 f(x+2h) = \nabla f(x+2h) - \nabla f(x+h)$$

$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= \Delta^2 f(x)$$

பொதுவாக, $\nabla^n f(x+nh) = \Delta^n f(x)$

இடப்பெயர்வுச் செயலி (E):

$y = f(x)$ கொடுக்கப்பட்ட சார்பாகவும் மற்றும் $x_0, x_0+h, x_0+2h, x_0+3h, \ldots, x_0+nh$ என்பது x-ன் அடுத்தடுத்த சம இடைவெளியிலான மதிப்புகளாகவும் இருக்கும் பட்சத்தில் E என்ற செயலி கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\mathrm{E}\left[f(x_0)\right] = f(x_0+h)$$

E என்பது இடப்பெயர்வுச் செயலி.

$$\mathrm{E}\left[f(x_0+h)\right] = f(x_0+2h),$$

$$\mathrm{E}[f(x_0+2h)] = f(x_0+3h), \ldots,$$

$$\mathrm{E}[f(x_0+(n-1)h)] = f(x_0+nh)$$

பொதுவாக, $\mathrm{E}\left[f(x)\right] = f(x+h)$, h என்பது சம இடைவெளி

$f(x)$-இல் E என்ற செயலியை இருமுறை பயன்படுத்தும்போது $E^2 f(x)$ என கிடைக்கும்.

அதாவது, $\mathrm{E}^2\ f(x) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\, f(x)\right]$

$$= \mathrm{E}[f(x+h)]$$

$$= f(x+2h)$$

பொதுவாக,

$\mathrm{E}^n f(x) = f(x+nh)$ மற்றும்
$\mathrm{E}^{-n} f(x) = f(x-nh)$

செயலி E–ன் பண்புகள்:

1. $\mathrm{E}\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots + f_n(x)\right] = \mathrm{E}\left[f_1(x)\right] + \mathrm{E}\left[f_2(x)\right] + \ldots. + \mathrm{E}\left[f_n(x)\right]$
2. $\mathrm{E}\left[c\, f(x)\right] = cE\left[f(x)\right]$ c ஒரு மாறிலி
3. $\mathrm{E}^m\left[\mathrm{E}^n f(x)\right] = \mathrm{E}^n\left(\mathrm{E}^m f(x)\right) = \mathrm{E}^{m+n} f(x)$
4. If 'n' மிகை முழுக்கள் எனில், $\mathrm{E}^n\left[\mathrm{E}^{-n}\left(f(x)\right)\right] = f(x)$.

குறிப்பு

$y = f(x)$ என்பது x–ன் சார்பு மற்றும் $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ என்பது $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ இடத்து y-ன் மதிப்புகள் எனில்

$$Ey_0 = y_1,\ Ey_1 = y_2, ..., Ey_{n-1} = y_n$$

$E\left[Ey_0\right] = Ey_1 = y_2$ பொதுவாக $E^n y_0 = y_n$

Δ, ∇ மற்றும் E ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புகள்:

1. $\Delta \equiv E - 1$

நிரூபணம்: Δ–ன் வரையறையிலிருந்து

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

மற்றும் $E[f(x)] = f(x+h)$

இங்கு h என்பது சம இடைவெளியாகும்.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x)$$

$$\Rightarrow \Delta f(x) = (E-1)f(x)$$

$$\Delta \equiv E - 1$$

$$\therefore E \equiv 1 + \Delta$$

2. $E\Delta \equiv \Delta E$

நிரூபணம்: $E(\Delta f(x)) = E\left[f(x+h) - f(x)\right]$

$$= E\,f(x+h) - E\,f(x)$$

$$= f(x+2h) - f(x+h)$$

$$= \Delta f(x+h)$$

$$= \Delta E f(x)$$

$$\therefore E\Delta \equiv \Delta E$$

3. $\nabla \equiv \dfrac{E-1}{E}$

நிரூபணம்: $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

$$= f(x) - E^{-1} f(x)$$

$$= (1 - E^{-1}) f(x)$$

$$\Rightarrow \nabla \equiv 1 - E^{-1}$$

$$\text{i.e., } \nabla \equiv 1 - \frac{1}{E}$$

$$\therefore \nabla \equiv \frac{E-1}{E}$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

(i) $(1+\Delta)(1-\nabla) = 1$

(ii) $\Delta\nabla \equiv \Delta - \nabla$

(iii) $\nabla \equiv E^{-1}\Delta$

எடுத்துக்காட்டு 5.1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை வடிவமைக்கவும்.

x	0	10	20	30
y	0	0.174	0.347	0.518

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0			
		0.174		
10	0.174		–0.001	
		0.173		–0.001
20	0.347		–0.002	
		0.171		
30	0.518			

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$x = 1,2,3,4,5$ எனில் $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$ என்ற சார்புக்கு முன்நோக்கு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை வடிவமைக்கவும்

தீர்வு

$y = f(x) = x^3 + 2x + 1$, $x = 1,2,3,4,5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	4				
		9			
2	13		12		

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 112 3/5/2020 11:39:03 AM

		21		6	
3	34		18		0
		39		6	
4	73		24		
		63			
5	136				

எடுத்துக்காட்டு 5.3

8,12,19,29,42, …என்ற தொடருக்கான வேறுபாட்டு அட்டவணையில், இரண்டாம்நிலை வேறுபாட்டினை மாறிலி எனக் கொண்டு வேறுபாட்டின் அட்டவணையை பயன்படுத்தி 6–வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

k என்பது 6–வது உறுப்பு என்க.

முதலில் முன்நோக்கு வேறுபாட்டினைக் காண்போம்.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	8		
		4	
2	12		3
		7	
3	19		3
		10	
4	29		3
		13	
5	42		k–55
		k–42	
6	k		

இரண்டாம்நிலை வேறுபாடுகளானது மாறிலிகள் என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore \quad k - 55 = 3$

$k = 58$

$\therefore$ 6 -வது உறுப்பு 58 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

(i) Δe^{ax} (ii) $\Delta^2 e^x$ (iii) $\Delta \log x$

ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $\Delta e^{ax} = e^{a(x+h)} - e^{ax}$

$$= e^{ax}.e^{ah} - e^{ax} \quad \left[\because a^{m+n} = a^m.a^n\right]$$

$$= e^{ax}\left[e^{ah} - 1\right]$$

(ii) $\Delta^2 e^x = \Delta.\left[\Delta e^x\right]$

$$= \Delta\left[e^{x+h} - e^x\right]$$

$$= \Delta\left[e^x e^h - e^x\right]$$

$$= \Delta e^x\left[e^h - 1\right]$$

$$= \left(e^h - 1\right)\Delta e^x$$

$$= \left(e^h - 1\right).\left(e^h - 1\right).e^x$$

$$= \left(e^h - 1\right)^2.e^x$$

(iii) $\Delta \log x = \log(x+h) - \log x$

$$= \log\frac{x+h}{x}$$

$$= \log\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$h = 1$ எனில், $\Delta\left[\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right]$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

பகுதி பின்னமாக பிரித்தல் முறைப்படி

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$$

$$A = \frac{5x+12}{x+2}\left[x = -3\right] = \frac{-15+12}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$B = \frac{5x+12}{x+3}\left[x = -2\right] = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \left[\frac{3}{x+3} + \frac{2}{x+2}\right]$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 113 3/5/2020 11:39:09 AM

$$\Delta\left[\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right] = \Delta\left[\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x+2}\right]$$

$$=\left[\frac{3}{x+1+3}-\frac{3}{x+3}\right]+\left\{\frac{2}{x+1+2}-\frac{2}{x+2}\right\}$$

$$=3\left[\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\right]+2\left[\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right]$$

$$=\left[\frac{-3}{(x+4)(x+3)}-\frac{2}{(x+3)(x+2)}\right]$$

$$=\frac{-5x-14}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$h = 1$ எனில், $\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right)$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \Delta\left(\Delta\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

இங்கு $\Delta\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

$$\therefore \Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \Delta\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{1+x}\right)-\Delta\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$h = 1$ எனில்,

$$\Delta^n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)(x+2)......(x+n)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

$h = 1$ எனில் $f(4) = f(3) + \Delta f(2) +$ $\Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$f(4) - f(3) = \Delta f(3)$ என்பது நாம் அறிந்த ஒன்று.

$$f(4) - f(3) = \Delta f(3)$$

$$= \Delta[f(2) + \Delta f(2)]$$

$$\because [f(3) - f(2) = \Delta f(2)]$$

$$= \Delta f(2) + \Delta^2 f(2)$$

$$= \Delta f(2) + \Delta^2[f(1) + \Delta f(1)]$$

$$\Rightarrow f(4) = f(3) + \Delta f(2) + \Delta^2 f(1) + \Delta^3 f(1).$$

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$U_0 = 1, U_1 = 11, U_2 = 21, U_3 = 28$ மற்றும் $U_4 = 29$ எனில் $\Delta^4 U_0$ காண்க.

தீர்வு :

$$\Delta^4 U_0 = (E-1)^4 U_0$$

$$= (E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1) U_0$$

$$= E^4 U_0 - 4E^3 U_0 + 6E^2 U_0 - 4EU_0 + U_0$$

$$= U_4 - 4U_3 + 6U_2 - 4U_1 + U_0$$

$$= 29 - 4(28) + 6(21) - 4(11) + 1.$$

$$= 156 - 156 = 0$$

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

எடுத்துக்காட்டு 5.9

$y_3 = 2, y_4 = -6, y_5 = 8, y_6 = 9$ மற்றும் $y_7 = 17$ எனில் $\Delta^4 y_3$ கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$y_3 = 2, y_4 = -6, y_5 = 8, y_6 = 9$ மற்றும் $y_7 = 17$ கொடுக்கப்பட்டவை.

$$\Delta^4 y_3 = (E-1)^4 y_3$$

$$= (E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1) y_3$$

$$= E^4 y_3 - 4E^3 y_3 + 6E^2 y_3 - 4Ey_3 + y_3$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 114 3/5/2020 11:39:20 AM

$= y_7 - 4y_6 + 6y_5 - 4y_4 + y_3$

$= 17 - 4(9) + 6(8) - 4(-6) + 2$

$= 17 - 36 + 48 + 24 + 2 = 55$

5.1.2 விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணல் (Finding the missing terms)

வேறுபாட்டுச் செயலிகள் மற்றும் இடப் பெயர்வுச் செயலி ஆகியவற்றைக் கொண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.10

கீழ்கண்ட விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	45.0	49.2	54.1	-	67.4

தீர்வு:

$f(x)$-ல் நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு மூன்றாம்படி பல்லுறுப்பைக்கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே நான்காம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும்.

(ie) $\Delta^4 y_0 = 0, \quad \therefore (E-1)^4 y_0 = 0$

$$(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)\, y_0 = 0$$

$$E^4 y_0 - 4E^3 y_0 + 6E^2 y_0 - 4E y_0 + y_0 = 0$$

$$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

$$67.4 - 4y_3 + 6(54.1) - 4(49.2) + 45 = 0$$

$$240.2 = 4y_3 \qquad \therefore y_3 = 60.05$$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1964 மற்றும் 1966 ஆம் ஆண்டுகளுக்கான உற்பத்திகளைக் காண்க.

வருடம்	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
உற்பத்தி	200	220	260	-	350	-	430

தீர்வு:

$f(x)$-ல் ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு நான்காம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே ஐந்தாம்நிலை வேறுபாடு பூச்சியமாகும்.

$$\Delta^5 y_k = 0 \quad \text{(ie)}\ (E-1)^5 y_k = 0$$

i.e., $(E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)\, y_k = 0$

$E^5 y_k - 5E^4 y_k + 10E^3 y_k - 10E^2 y_k + 5E y_k - y_k = 0 \quad (1)$

$k = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$E^5 y_0 - 5E^4 y_0 + 10E^3 y_0 - 10E^2 y_0 + 5E y_0 - y_0 = 0$$

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$$

$$y_5 - 5(350) + 10y_3 - 10(260) + 5(220) - 200 = 0$$

$$y_5 + 10y_3 = 3450 \quad (2)$$

$k = 1$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$E^5 y_1 - 5E^4 y_1 + 10E^3 y_1 - 10E^3 y_1 - y_1 = 0$$

$$y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 - y_1 = 0$$

$$430 - 5y_5 + 10(350) - 10y_3 + 5(260) - 220 = 0$$

$$5y_5 + 10y_3 = 5010 \quad (3)$$

(3) – (2) $\Rightarrow$ $\quad 4y_5 = 1560$

$y_5 = 390$

(2)–ன் படி $\quad 390 + 10y_3 = 3450$

$10y_3 = 3450 - 390$

$y_3 \cong 306$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

பயிற்சி 5.1

1. மதிப்பிடுக: $\Delta(\log ax)$.

2. $y = x^3 - x^2 + x - 1$ எனில், $x = 0,1,2,3,4,5$ என்பனவற்றுக்கு y-ன்மதிப்புகளைக்கணக்கிட்டு முன்னோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைக்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 115 3/5/2020 11:39:26 AM

3. $h = 1$ எனில், $(E^{-1}\Delta)x^3 = 3x^2 - 3x + 1$ என நிறுவுக.

4. $f(x) = x^2 + 3x$ மற்றும் $h = 1$ எனில் $\Delta f(x) = 2x + 4$ என நிறுவுக.

5. $h = 1$ எனில், $\Delta\left[\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$ -ஐ மதிப்பிடுக.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன் படுத்தி விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4
y_x	1	3	9	-	81

7. ஒரு மாவட்டத்தின் மக்கள்த் தொகை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு (x)	1881	1891	1901	1911	1921	1931
மக்கள்தொகை (y) (ஆயிரத்தில்)	363	391	421	-	467	501

1911ம் ஆண்டிற்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

8. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	0	-	8	15	-	35

5.2 இடைச்செருகல் (Interpolation)

ஒரு உற்பத்தி நிறுவனத்தின் பல்வேறு வருடங்களுக்கான இலாபங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

வருடம் (x)	1986	1987	1988	1990	1991	1992
வருமானம் (இலட்சத்தில்)	25	29	24	30	32	31

1989 -ஆம் ஆண்டிற்கான இலாபம் கொடுக்கப் படவில்லை. 1989-ஆம் ஆண்டின் இலாபத்தினை மதிப்பீடு செய்வதற்கு நாம் இடைச் செருகல் உத்தியைப் பயன்படுத்துகிறோம். x மற்றும் y என்பவை முறையே வருடம் மற்றும் இலாபத்தினை குறிப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். சாரா மாறி x என்பது **மாறி (argument)** எனவும் மற்றும் சார்ந்த மாறி (entries) **சார்பலன்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு மதிப்புகளுக்கு உள்ளே அமைந்துள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு y-யை மதிப்பீடு செய்வது **இடைச் செருகல்** என அழைக்கப்படும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு மதிப்புகளுக்கு வெளியே அமைந்துள்ள x-ன் மதிப்பிற்கு y-யை மதிப்பீடு செய்வது **புறச் செருகல்** என அழைக்கப்படும்.

5.2.1 இடைச்செருகலின் முறைகள் (Methods of interpolation)

இடைச்செருகலில் இரண்டு முறைகள் உள்ளன. ஒன்று வரைபடம் முறை மற்றொன்று இயற்கணித முறை ஆகும்.

5.2.2 வரைபடம் முறை (Graphical method)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $y = f(x)$-க்கு x-ன் n மதிப்புகளும் அதற்கேற்ப y-ன் மதிப்புகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, \ldots, n$ என்ற 'n' புள்ளிகளை குறித்து அதன் வழியாக மென்மையான வளைவரை வரைபடம் வரைய வேண்டும். வரையப்பட்ட வரைபடத்தில் x-ன் எந்தவொரு இடைமதிப்பிற்கும் பொருத்தமான y-ன் மதிப்பை காண்பதே வரைபட முறையாகும். இவ்வாறு பெறப்படும் y-ன் மதிப்பு உண்மையான y-ன் மதிப்பிலிருந்து பெரும்பாலும் மாறுபட்டிருக்கும். வரைபட முறையில் இது ஒரு குறைபாடாக கருதப் படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.12

வரைபடத்தின் மூலம் $x = 38$ க்கான y-ன் மதிப்பை பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு காண்க:

x	10	20	30	40	50	60
y	63	55	44	34	29	22

தீர்வு:

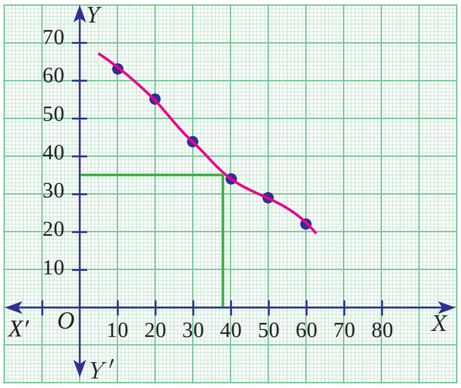
வரைபட முறையின் படிகள்:

x மற்றும் y மதிப்புகளுக்கு பொறுத்தமான அலகுகளை எடுத்துக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளை புள்ளிகளாக வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் மென்மையான வளைவரை வரைக.

$x = 38$ என்ற மதிப்பிற்கு தொடர்புடைய வளைவரை புள்ளியைக் கண்டு, y -அச்சின் மீதுள்ள தொடர்புடைய y -மதிப்பானது தேவையான இடைச்செருகல் மதிப்பாகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 116 3/5/2020 11:39:28 AM



படம் 5.1

வரைபடத்திலிருந்து, $x = 38$ எனும்போது $y = 32$ ஆகும்.

5.2.3 இயற்கணித முறை (Algebraic method)

கிரிகோரி – நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச் செருகல்சூத்திரம்(அல்லது)நியுட்டனின்முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம் (சம இடைவெளியில்).

உங்களுக்கு தெரியுமா?

முதல் இரண்டு உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அது நேரிய இடைச்செருகல் எனவும் முதல் மூன்று உறுப்புகளை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அது பரவளைய இடைச்செருகல் எனவும் அழைக்கப்படும்.

$y = f(x)$ என்பது $n+1$ மதிப்புகளைக் கொண்ட n-ம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ என்பன முறையே $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற புள்ளிகளில் y-ன் மதிப்புகளாகும்.

அதாவது $x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,$

$$x_3 = x_0 + 3h, \ldots, x_n = x_0 + nh$$

x-ன் மதிப்பு $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பன சம இடைவெளியில் உள்ளது.

$x = x_0 + nh$ என்ற இடத்து $f(x)$ -ன் மதிப்பு,

$$f(x_0 + nh) = f(x_0) + \frac{n}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \ldots$$

(அல்லது)

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$ இங்கு $n = \frac{x - x_0}{h}$

குறிப்பு

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் ஆரம்ப மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் பொதுவாக நியுட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரம் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

கிரிகோரி – நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச் செருகல் சூத்திரம்.

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் இறுதி மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரத்தை பொதுவாக பயன் படுத்துவது இல்லை. அதற்கு நாம் நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பொதுவாக பயன்படுத்துவோம்.

$x = x_n + nh$ இடத்து , $f(x)$ ன் மதிப்பானது,

$$f(x_n + nh) = f(x_n) + \frac{n}{1!}\nabla f(x_n) + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 f(x_n) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 f(x_n) + \ldots$$

(அல்லது)

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$ இங்கு $n = \frac{x - x_n}{h}$

குறிப்பு

y-ன் தேவையான மதிப்பு x-ன் முடிவு மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருந்தால் பொதுவாக நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

நியூட்டனின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 1905 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையைக் காண்க:

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 117 3/5/2020 11:39:32 AM

வருடம்	1891	1901	1911	1921	1931
மக்கள்தொகை	98,752	1,32,285	1,68,076	1,95,670	2,46,050

தீர்வு

1905 ஆம் ஆண்டின் மக்கள்தொகை காணல் அதாவது, x = 1905-க்கு y-ன் மதிப்பு காணல்.

y-ன் தேவையான மதிப்பு அட்டவணையில் x-ன் ஆரம்ப மதிப்புக்கு அருகில் உள்ளது. எனவே நாம் நியூட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

x = 1905 இடத்து y-ஐ காண வேண்டும்.

$$\therefore x_0 + nh = 1905,\ x_0 = 1891, h = 10$$

$$1891 + n(10) = 1905 \quad \Rightarrow n = 1.4$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1891	98,752				
		33,533			
1901	1,32,285		2,258		
		35,791		−10,435	
1911	1,68,076		-8,177		41,358
		27,614		30,293	
1921	1,95,690		22,746		
		50,360			
1931	2,46,050				

$$y_{(x=1905)} = 98,752 + (1.4)(33533) + \frac{(1.4)(0.4)}{2}(2258) + \frac{(1.4)(0.4)(-0.6)}{6}(-10435) + \frac{(1.4)(0.6)(-0.6)(-1.6)}{24}(41358)$$

= 98752 + 46946.2 + 632.24 + 584.36 + 1389.63

= 148304.43

≅ 1,48,304

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$y = f(x)$ என்ற சார்புக்கான, $x = 0, 1, 2, \ldots, 6$ இடத்து மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	4	10	16	20	24	38

நான்கு மதிப்புகளை மட்டும் கொண்டு y (3.2) -ன் தோராய மதிப்பை முன்நோக்கு இடைச் செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு:

முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த உள்ளதால் $f(x)$ -ன் கடைசி நான்கு மதிப்புகளை கருத்தில் கொள்க. [x = 3 -லிருந்து எடுத்துக்கொள்க].

முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரம்

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$x_0 + nh = 3.2, x_0 = 3, h = 1$$

$$\therefore n = \frac{1}{5}$$

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3	16			
		4		
4	20		0	
		4		10
5	24		10	
		14		
6	38			

$$y_{(x=3.2)} = 16 + \frac{1}{5}(4) + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{5}\right)}{2}(0) + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{-9}{5}\right)}{6} \times 10$$

$$= 16 + 0.8 + 0 + 0.48 = 17.28$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 118 3/5/2020 11:39:36 AM

எடுத்துக்காட்டு 5.15

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 45-க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

மதிப்பெண்கள்	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	31	42	51	35	31

தீர்வு:

x என்பது மதிப்பெண் மற்றும் y என்பது மாணவர்களின் எண்ணிக்கை என்க.

கூட்டு நிகழ்வெண் பரவலில் மாற்றம் செய்த பிறகு கிடைக்கும் வேறுபாட்டு அட்டவணை.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
40-க்குக் குறைவான	31				
		42			
50	73		9		
		51		-25	
60	124		-16		37
		35		12	
70	159		-4		
		31			
80	190				

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 45$ இடத்து y-ஐக் காண வேண்டும்.

$$\therefore x_0 + nh = 45,\ x_0 = 40, h = 10 \quad \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$y_{(x=45)} = 31 + \frac{1}{2} \times 42 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)}{2}(9) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{6}\times(-25) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{24}\times(37)$$

$$= 31 + 21 - \frac{9}{8} - \frac{25}{16} - \frac{37\times 15}{384}$$

$$= 47.867 \cong 48$$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கான இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி 60க்கும் 70க்கும் இடைப்பட்ட நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

நிறை (lbs)	0-40	40-60	60-80	80-100	100-120
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	250	120	100	70	50

தீர்வு:

நிறை = x என்க. மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = y என்க. கூட்டு நிகழ்வெண் பரவலில் மாற்றம் செய்த பிறகு கிடைக்கும் வேறுபாட்டு அட்டவணை.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
40-க்குக் குறைவான	250				
		120			
60	370		-20		
		100		-10	
80	470		-30		20
		70		10	
100	540		-20		
		50			
120	590				

70 க்கு கீழ் நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண நாம் முன்நோக்கு இடைவெளி சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 70$ இடத்து y-ஐ காண வேண்டும்.

$$\therefore\ x_0 + nh = 70,\ x_0 = 40, h = 20$$

$$40 + n(20) = 70 \quad \Rightarrow n = 1.5$$

$$\therefore\ y_{(x=70)} = 250 + 1.5(120) + \frac{(1.5)(0.5)}{2!}(-20)$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 119 3/5/2020 11:39:40 AM

$$+\frac{(1.5)(0.5)(-0.5)}{3!}(-10)$$

$$+\frac{(1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)}{4!}(20)$$

$= 250 + 180 - 7.5 + 0.625 + 0.46875$

$= 423.59$

$\cong 424$

60-க்கும் 70-க்கும் இடைப்பட்ட நிறை கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.$= y(70) - y(60)$

$= 424 - 370 = 54$

எடுத்துக்காட்டு 5.17

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தின் மக்கள்தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வருடம் : x	1941	1951	1961	1971	1981	1991
மக்கள்தொகை (இலட்சத்தில்) : y	20	24	29	36	46	51

இடைக்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி 1946–ம் ஆண்டுக்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

x	1941	1951	1961	1971	1981	1991
y	20	24	29	36	46	51

1946-ஆம் அண்டின் மக்கள்தொகையை கணக்கிடுவதற்கு (அதாவது x=1946க்கு y -ன் மதிப்பை கணக்கட) நாம், நியூட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$x = 1946 \therefore\ x_0 + nh = 1946,$

$x_0 = 1941,\ h = 10$

$1941 + n(10) = 1946 \Rightarrow\ n = 0.5$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1941	20					
		4				
1951	24		1			
		5		1		
1961	29		2		0	
		7		1		-9
1971	36		3		−9	
		10		−8		
1981	46		−5			
		5				
1991	51					

$$y_{(x=1946)} = 20 + \frac{0.5}{1!}(4) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(1) +$$

$$+\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(1)$$

$$+\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!}(0)+$$

$$\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)(0.5-4)}{5!}(-9)$$

$= 20 + 2 - 0.125 + 0.0625 - 0.24609$

$= 21.69$ இலட்சங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.18

பின்வரும் விவரங்கள் நீராவி அட்டவணையில் இருந்து எடுக்கப்பட்டது.

வெப்பநிலை C^0	140	150	160	170	180
அழுத்தம் $kg\,f/cm^2$	3.685	4.854	6.302	8.076	10.225

வெப்பநிலையானது 175 °C எனும்பொழுது நீராவியின் அழுத்தத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

தேவையான நீராவியின் மதிப்பு அட்டவணையின் இறுதிப் புள்ளிக்கு அருகில் உள்ளதால், நியூட்டனின் பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$x = 175$

$\therefore x_n + nh = 175,\ x_n = 180, h = 10 \ \Rightarrow\ n = -0.5$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 120 3/5/2020 11:39:44 AM

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
140	3.685				
		1.169			
150	4.854		0.279		
		1.448		0.047	
160	6.032		0.326		0.002
		1.774		0.049	
170	8.076		0.375		
		2.149			
180	10.225				

$$y_{(x=175)} = 10.225 + (-0.5)(2.149) + \frac{(-0.5)(0-5)}{2!}(0.375) + \frac{(-0.5)(0-5)(1.5)}{3!}(0.049) + \frac{(-0-5)(0.5)(1.5)(2.5)}{4!}(0.002)$$

$$= 10.225 - 1.0745 - 0.046875 - 0.0030625 - 0.000078125$$

$$= 9.10048438 = 9.1$$

எடுத்துக்காட்டு 5.19

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $x = 7.5$ எனும்போது y –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	8	27	64	125	216	343	512

தீர்வு:

இங்கு பின்நோக்கு இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1	1				
		7			
2	8		12		
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		0
		61		6	
5	125		30		0
		91		6	
6	216		36		0
		127		6	
7	343		42		
		169			
8	512				

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$x = 7.5 \therefore x_n + nh = 7.5,\ x_n = 8, h = 1 \Rightarrow$

$n = -0.5$

$$y_{(x=7.5)} = 512 + \frac{-0.5}{1!}169 + \frac{-0.5(-0.5+1)}{2!}42 + \frac{-0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!}6$$

$$= 421.88$$

எடுத்துக்காட்டு 5.20

வெவ்வேறு வயதில் முடியும் முதிர்வு காலத்திற்கான செலுத்தப்படும் அரைவருட காப்பீட்டுத் தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 63 வயதில் முதிர்வு காலம் கொண்ட ஒரு பிரிமியத்தின் காப்பீட்டுத் தொகை காண்க.

வயது	45	50	55	60	65
காப்பீட்டுத் தொகை	114.84	96.16	83.32	74.48	68.48

தீர்வு:

வயது $= x$, காப்பீட்டுத்தொகை $= y$ என்க.

இங்கு, நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி y-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

$x = 63 \quad \therefore x_n + nh = 63,$

$x_n = 65,\ h = 5 \Rightarrow n = -\frac{2}{5}$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
45	114.84				
		-18.68			
50	96.16		5.84		
		-12.84		-1.84	
55	83.32		4		0.68
		-8.84		-1.16	
60	74.48		2.84		
		-6			
65	68.48				

$$y_{(x=63)} = 68.48 + \frac{\frac{-2}{5}}{1!}(-6) + \frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)}{2!}2.84$$

$$+\frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)\left(\frac{-2}{5}+2\right)}{3!}(-1.16)$$

$$+\frac{\frac{-2}{5}\left(\frac{-2}{5}+1\right)\left(\frac{-2}{5}+2\right)\left(\frac{-2}{5}+3\right)}{3!}(0.68)$$

$$= 68.48 + 2.4 - 0.3408 + 0.07424 - 0.028288$$

$$y(63) = 70.585$$

எடுத்துக்காட்டு 5.21

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளிலிருந்து இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	2	4	7	11	16	22	29

தீர்வு:

நியூட்டனின் பின்னோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்போம்.

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0	1			
		1		
1	2		1	
		2		0
2	4		1	
		3		0
3	7		1	
		4		0
4	11		1	
		5		0
5	16		1	
		6		0
6	22		1	
		7		
7	29			

x-ன் வாயிலாக y–ஐ காண, $\therefore x_n + nh = x$, $x_n = 7,\ h = 1 \Rightarrow n = x - 7$

$$y_{(x)} = 29 + (x-7)(7) + \frac{(x-7)(x-6)}{2}(1)$$

$$= 29 + 7x - 49 + \frac{1}{2}\left(x^2 - 13x + 42\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[58 + 14x - 98 + x^2 - 13x + 42\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 + x + 2\right]$$

5.2.4 இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் சூத்திரம் (Lagrange's interpolation formula)

நியூட்டனின் முன்நோக்கு மற்றும் பின்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரம் x-ன் சம இடைவெளிகளுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். x-ன் சம மற்றும் சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$y = f(x)$ என்பது x-ன் சார்பாகவும், $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற சம பிரிவற்ற மதிப்புகளுக்கு முறையே $f(x)$ -ன் மதிப்புகள் $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ஆகவும் இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட x- க்கான y-ஐ காண இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 122 3/5/2020 11:39:52 AM

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n$$

எடுத்துக்காட்டு 5.22

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $y(10)$-ன் மதிப்பை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க:

x	5	6	9	11
y	12	13	14	16

தீர்வு:

இங்கு x-ன் மதிப்புகள் சம பிரிவற்றவை. எனவே இலெக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தவும்.

$$x_0 = 5, x_1 = 6, x_2 = 9, x_3 = 11$$

$$y_0 = 12, y_1 = 13, y_2 = 14, y_3 = 16$$

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \times y_0$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \times y_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \times y_2$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \times y_3$$

$$= \frac{(x-6)(x-9)(x-11)}{(5-6)(5-6)(5-11)}(12) +$$

$$\frac{(x-5)(x-9)(x-11)}{(6-5)(6-9)(6-9)}(13)$$

$$+ \frac{(x-5)(x-6)(x-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)}(14) +$$

$$\frac{(x-5)(x-6)(x-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)}(16)$$

$x = 10$ என்க.

$$y(10) = f(10) = \frac{4(1)(-1)}{(-1)(-4)(-6)}(12) + \frac{(5)(1)(-1)}{(1)(-3)(-5)}$$

$$(13) + \frac{5\,(4)(-1)}{4(3)(-2)}(14) + \frac{(5)(4)(1)}{6(5)(2)}(16)$$

$$= \frac{1}{6}(12) - \frac{13}{3} + \frac{5(14)}{3\times 2} + \frac{4\times 16}{12}$$

$$= 14.6663$$

பயிற்சி 5.2

1. வரைபட முறையைப் பயன்படுத்தி x=48 எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து y-ன் மதிப்பைக் காண்க:

x	40	50	60	70
y	6.2	7.2	9.1	12

2. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 350 அலகுகளில் ஏற்படக்கூடிய செலவினத்தை வரைபட முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

மாதம்	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்
வெளியீடு அலகுகள்	200	300	400
மறைமுக உழைப்பூதியச் செலவினம்	2500	2800	3100

மாதம்	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்
வெளியீடு அலகுகள்	640	540	580
மறைமுக உழைப்பூதியச் செலவினம்	3820	3220	3640

3. நியுட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி முப்படி பல்லுறுப்பு கோவையைக் காண்க.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	1	10

4. 10 வருடங்களுக்கு ஒருமுறை எடுக்கப்படும் ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 1955 வருடத்தின் மக்கள் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1951	1961	1971	1981
மக்கள் தொகை (இலட்சத்தில்)	35	42	58	84

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 123 3/5/2020 11:39:56 AM

5. ஒரு தேர்வில் குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

மதிப்பெண்கள்	0-19	20-39	40-59	60-79	80-99
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	41	62	65	50	17

70-க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைக் கொண்டு $x = 32$ எனில் $f(x)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	30	35	40	45	50
$f(x)$	15.9	14.9	14.1	13.3	12.5

7. உலோகம் மற்றும் துத்தநாகத்தில் உள்ள காரீயத்தின் உருகும் நிலை கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. 'T' என்பது வெப்பநிலை (பாகையில்) மற்றும் P என்பது உலோகத்தில் காரீயத்தின் சதவீதம்.

P	40	50	60	70	80	90
T	180	204	226	250	276	304

84 சதவீத காரீயம் கொண்ட உலோகத்தின் உருகும் நிலையைக் காண்க.

8. கீழ்க்கண்ட அட்டவளையிலிருந்து $f(2.8)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	11	34

9. இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி 1986-ஆம் வருடத்திற்கான தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியைக் காண்க.

வருடம்	1974	1978	1982	1990
உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)	25	60	80	170

10. கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து மாத வருமானம் ₹26-க்கு மிகாமல் பெறும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கையை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க.

வருமானம் மிகாமல் (₹)	15	25	30	35
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	36	40	45	48

11. இடைச்செருகலைப் பயன்படுத்தி 1985–ஆம் வருடத்தின் வியாபாரத்தை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1982	1983	1984	1986
வியாபாரம் (இலட்சங்களில்)	150	235	365	525

12. இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலைப் பயன் படுத்தி $f(x)$ –ன் மதிப்பை $x = 15$ -ல் காண்க.

x	3	7	11	19
$f(x)$	42	43	47	60

பயிற்சி 5.3

L2FEP2

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க.

1. $\Delta^2 y_0 =$

   (a) $y_2 - 2y_1 + y_0$

   (b) $y_2 + 2y_1 - y_0$

   (c) $y_2 + 2y_1 + y_0$ (d) $y_2 + y_1 + 2y_0$

2. $\Delta f(x) =$

   (a) $f(x+h)$ (b) $f(x) - f(x+h)$

   (c) $f(x+h) - f(x)$ (d) $f(x) - f(x-h)$

3. $E \equiv$

   (a) $1+\Delta$ (b) $1-\Delta$

   (c) $1+\nabla$ (d) $1-\nabla$

4. $h=1$ எனில், $\Delta(x^2) =$

   (a) $2x$ (b) $2x-1$

   (c) $2x+1$ (d) 1

5. c ஒரு மாறிலி எனில் $\Delta c =$

   (a) c (b) Δ

   (c) Δ^2 (d) 0

6. m மற்றும் n என்பவை மிகை முழுக்கள் எனில் $\Delta^m \Delta^n f(x) =$

   (a) $\Delta^{m+n} f(x)$ (b) $\Delta^m f(x)$

   (c) $\Delta^n f(x)$ (d) $\Delta^{m-n} f(x)$

7. 'n' மிகை முழு எண் எனில், $\Delta^n \left[\Delta^{-n} f(x)\right]$

   (a) $f(2x)$ (b) $f(x+h)$

   (c) $f(x)$ (d) $\Delta f(x)$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 124 3/5/2020 11:40:01 AM

8. $E f(x) =$

(a) $f(x-h)$ (b) $f(x)$

(c) $f(x+h)$ (d) $f(x+2h)$

9. $\nabla \equiv$

(a) 1+E (b) 1-E

(c) $1-E^{-1}$ (d) $1+E^{-1}$

10. $\nabla f(a) =$

(a) $f(a)+f(a-h)$

(b) $f(a)-f(a+h)$

(c) $f(a)-f(a-h)$

(d) $f(a)$

11. $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ என்ற புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்டால் இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

(a) $y(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$

(b) $y(x) = \dfrac{x_1-x}{x_0-x_1} y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$

(c) $y(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} y_1 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_0$

(d) $y(x) = \dfrac{x_1-x}{x_0-x_1} y_1 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} y_0$

12. இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலின் சூத்திரம் எப்பொழுது பயன்படுத்தப்படும்

(a) சமமான இடைவெளிகளுக்கு மட்டும்

(b) சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு மட்டும்

(c) சம மற்றும் சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு

(d) இவற்றுள் ஏதும் கிடையாது.

13. $f(x) = x^2 + 2x + 2$ மற்றும் $h=1$ எனில் $\Delta f(x)$ -ன் மதிப்பு

(a) $2x-3$ (b) $2x+3$

(c) $x+3$ (d) $x-3$

14. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து $\Delta^3 y_0$ –ன் மதிப்பு

x	5	6	9	11
y	12	13	15	18

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) –1

இதர கணக்குகள்

1. $f(x) = e^{ax}$ எனில் $f(0), \Delta f(0), \Delta^2 f(0)$ என்பன பெருக்குத்தொடரில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

2. $i)(1+\Delta)(1-\nabla) = 1$ $ii)\Delta\nabla = \Delta - \nabla$
(iii) $E\nabla = \Delta = \nabla E$ என நிறுவுக.

3. ஒரு இரண்டு படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையானது (1,-1) (2,-1) (3,1) (4,5) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்கின்றது. பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காண்க.

x	0	5	10	15	20	25
y	7	11	-	18	-	32

5. $f(-1) = 202$, $f(0) = 175$, $f(1) = 82$ மற்றும் $f(2) = 55$ எனில் $f(0.5)$ காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து x = 43 மற்றும் x = 84 எனும் புள்ளிகளில் y-ன் மதிப்பு காண்க

x	40	50	60	70	80	90
y	184	204	226	250	276	304

7. 'D'-ஐ விட்டமாகவும் A-ஐ பரப்பாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

D	80	85	90	95	100
A	5026	5674	6362	7088	7854

82 மற்றும் 91 என்பனவற்றை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் பரப்புகளைக் காண்க.

8. $u_0 = 560$, $u_1 = 556$, $u_2 = 520$, $u_4 = 385$, எனில் $u_3 = 465$ என நிரூபி

9. பின் வரும் அட்டவணையிலிருந்து நியூட்டனின் பின் நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி படி 4 –ஐ கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

x	1	2	3	4	5
y	1	–1	1	–1	1

10. இலக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி (0, –12), (1, 0), (3, 6) மற்றும் (4,12) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 125 3/5/2020 11:40:09 AM

தொகுப்புரை

- $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$
- $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$
- $\nabla f(x+h) = \Delta f(x)$
- $Ef(x) = f(x+h)$
- $E^n f(x) = f(x+nh)$
- நியூட்டனின் முன்னோக்கு விதி:

$$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

- நியூட்டனின் பின்னோக்கு விதி:

$$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$$

- இலக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத்தேற்றம்

$$y = f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} y_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} y_n$$

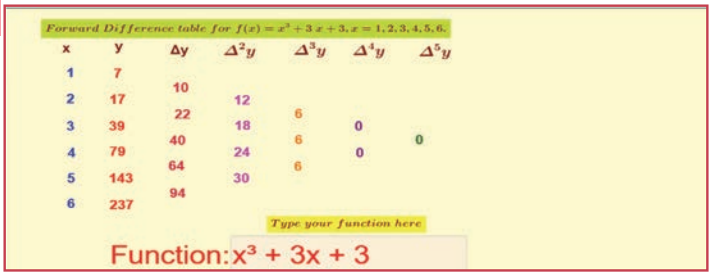
கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)

இடப்பெயர்வுச் செயலி	Shifting operator
இடைச்செருகல்	Interpolation
இயற்கணித முறைகள்	Algebraic methods
இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்	Lagrange's formula
எண்ணியியல்	Numerical
காப்பீடு	Policy
கிரிகோரி–நியுட்டனின் சூத்திரங்கள்	Gregory- Newton's formulae
திட்டமான வேறுபாடுகள்	Finite differences
பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி	Backward difference operator
புறச்செருகல்	Extrapolation
முன்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி	Forward difference operator
வரைபட முறை	Graphic method

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 5.indd 126 3/5/2020 11:40:12 AM

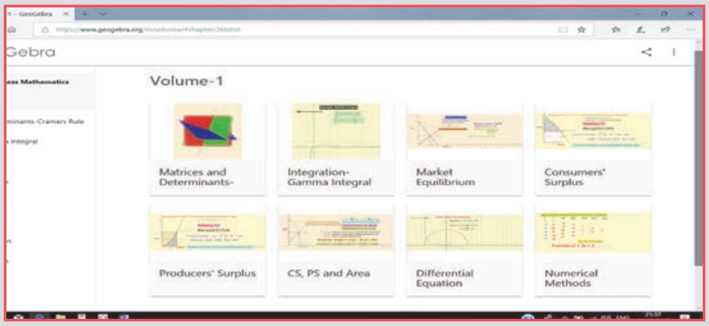
இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



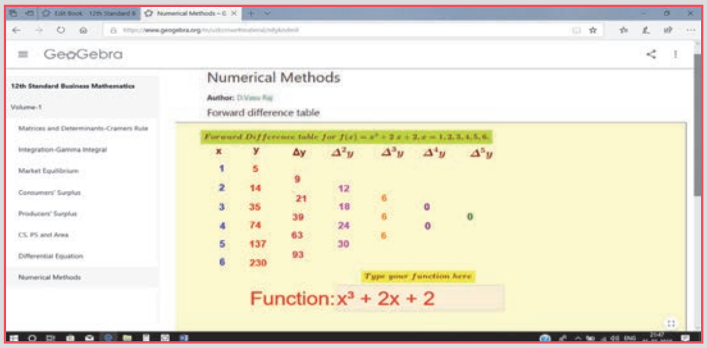
படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics " என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்.



படி 2

"Numerical Methods" என்னும் திரை தோன்றும். Forward Difference table என்னும் அட்டவணை தோன்றும், அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் புதிய சார்புகளை தட்டச்சு செய்க. பின்பு கிடைக்கும் விடையினை அட்டவனையோடு ஒப்பிடுக.



செயல் பாட்டிற்க்கான உரலி : https://ggbm.at/uzkcrnwr

விரைவு குறியீடு (QR Code) :

B247_12_BUS_MAT_TM