Roll No. :

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15
[Total No. of Printed Pages : 15

I-252204/804–B

विषय : गणित

Subject : Mathematics

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य है।

***Note* : All questions are compulsory.**

***सामान्य निर्देश* :**
***General Instructions* :**

(*i*) प्रश्न पत्र में कुल 29 प्रश्न हैं।
Total number of questions in this question paper are 29.

(*ii*) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।
Use of calculator is not permitted.

(*iii*) इस प्रश्न पत्र में ग्राफ पेपर की आवश्यकता है।
Graph paper is required in this question paper.

निर्देश : (अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अति लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction : (A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carries 1 mark.

प्रश्न-1 सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। [1]

Find the unit vector in the direction of vector $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$.

प्रश्न-2 यदि $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ हो, तब a का मान ज्ञात कीजिए। [1]

If $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$, then find the value of a.

प्रश्न-3 $\int e^{\frac{1}{2}\log x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

Evaluate $\int e^{\frac{1}{2}\log x} dx$.

प्रश्न-4 अवकल समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = kx$ की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए। [1]

Find the order and degree of differential equation

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = kx.$$

निर्देश : (ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (B) Question Nos. 5 to 12 are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

प्रश्न-5 $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

Find the value of

$$\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$$

प्रश्न-6 यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 13 & x \end{vmatrix}$ हो, तब x का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 13 & x \end{vmatrix}$, then find the value of x.

प्रश्न-7 दर्शाइए कि $f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \le 1 \\ 5 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x = 1$ पर संतत नहीं है। [2]

Show that the function f defined by $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \le 1 \\ 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ is not continuous at $x = 1$.

प्रश्न-8 $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

Evaluate $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx$.

प्रश्न-9 हल कीजिए : [2]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

Solve :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

प्रश्न-10 एक रेखा x, y और z अक्ष के साथ क्रमशः $90°$, $135°$ और $45°$ के कोण बनाती है, तो इसकी दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। [2]

Find the direction cosines of the line which makes angles of $90°$, $135°$ and $45°$ with x, y and z axes respectively.

प्रश्न-11 यदि $y = x^{\sin x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $y = x^{\sin x}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

प्रश्न-12 यदि $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ और $P(A \cap B)=\frac{1}{8}$ एवं A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो P(A नहीं और B नहीं) ज्ञात कीजिए। [2]

If A and B are two independent events and $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ and $P(A \cap B)=\frac{1}{8}$, then find P(not A and not B).

निर्देश : (स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घ-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 13, 14 एवं 20 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (C) Question Nos. 13 to 23 are long answer type questions. Question Nos. 13, 14 and 20 have internal choice. Each question carries 4 marks.

प्रश्न- 13 सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b)$: संख्या 5, $(a - b)$ को विभाजित करती है $\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। [4]

Prove that the relation R in set of integers Z given by $R = \{(a, b) : (a - b)$ is divisible by number $5\}$ is an equivalence relation.

अथवा

OR

यदि $f : R \to R$ तथा $g : R \to R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित हैं, तो $g \circ f$ और $f \circ g$ ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $g \circ f \neq f \circ g$.

If $f : R \to R$ and $g : R \to R$ are defined as $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$, then find $g \circ f$ and $f \circ g$. Prove that $g \circ f \neq f \circ g$.

प्रश्न-14 सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x.$$ [4]

Prove that

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x.$$

अथवा

OR

हल कीजिए :

$$\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$$

Solve :

$$\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$$

प्रश्न-15 सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ [4]

Prove that $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

प्रश्न-16 यदि $y = e^{m\tan^{-1}x}$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$(1+x^2)y_2 + (2x-m)y_1 = 0.$$

[4]

If $y = e^{m\tan^{-1}x}$, then prove that

$$(1+x^2)y_2 + (2x-m)y_1 = 0.$$

प्रश्न-17 $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

Evaluate $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$.

प्रश्न-18 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$ को हल कीजिए, दिया गया है कि $y = 0$ जब $x = \frac{\pi}{3}$. [4]

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$, given that $y = 0$ when $x = \frac{\pi}{3}$.

प्रश्न-19 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ और $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ हैं। [4]

Find the area of parallelogram whose diagonals are $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

प्रश्न-20 वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्शरेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। [4]

Find the equation of the tangent to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ at point (1, 1).

अथवा

OR

a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल (1, 2) में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

Find the least value of a such that the function f, given by $f(x) = x^2 + ax + 1$ is strictly increasing on interval (1, 2).

प्रश्न-21 दो थैले A और B दिए हैं। थैले A में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं। थैले B में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले से यदृच्छया एक गेंद निकाली गयी है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले B से निकाली गयी है? [4]

Two bags A and B are given. Bag A contains 3 red and 4 black balls while an other bag B contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag B.

प्रश्न-22 यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ पर लंब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

If $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ and $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ are such that $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ is perpendicular to $\vec{c}$, then find the value of λ.

प्रश्न-23 एक न्याय्य सिक्का और एक अभिनत पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होता है' और B घटना 'पासे पर संख्या 3 प्रकट होती है' को निरूपित करते हैं। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतंत्र हैं या नहीं। [4]

A fair coin and an unbiased die are tossed. Let A represents the event 'head appears on the coin' and B represents the event 'number 3 appears on the die'. Check whether A and B are independent events or not.

निर्देश : (द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घ-उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 27 एवं 29 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (D) Question Nos. 24 to 29 are long answer type questions. Question Nos. 27 and 29 have internal choice. Each question carries 6 marks.

प्रश्न-24 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

$A \text{ adj } A = |A| I$ और A^{-1} भी ज्ञात कीजिए। [6]

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then verify that $A \text{ adj } A = |A| I$ and

also find A^{-1}.

प्रश्न-25 यदि $x^y = e^{y-x}$, तब सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 - \log_e x}{(1 - \log_e x)^2}$ [6]

If $x^y = e^{y-x}$, then prove that $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 - \log_e x}{(1 - \log_e x)^2}$

प्रश्न-26 सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x = \frac{\pi}{2} \log_e \left(\frac{1}{2}\right)$$ [6]

Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x = \frac{\pi}{2} \log_e \left(\frac{1}{2}\right)$$

प्रश्न-27 परवलय $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = mx$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [6]

Find the area enclosed between parabola $y^2 = 4ax$ and straight line $y = mx$.

अथवा

OR

वक्रों $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ के बीच का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

Find the area between the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ by integration method.

प्रश्न-28 फलन $P = 2x + 3y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि प्रतिबंध निम्न हैं : [6]

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 2y \leq 10, \quad 2x + y \leq 14$$

Find the maximum value of the function $P = 2x + 3y$ when the constraints are the following :

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 2y \leq 10, \quad 2x + y \leq 14$$

प्रश्न-29 समतलों $\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) = 7$ और $\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}\right) = 9$ के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु (2, 1, 3) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। [6]

Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) = 7$ and $\vec{r} \cdot \left(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}\right) = 9$ and the point (2, 1, 3).

अथवा

OR

सरल रेखाओं $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$ और $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the straight lines $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$.