



अनुपात (Ratio)

हमें अपने दैनिक जीवन में कई जगहों पर तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है। यह तुलना बहुत बार अनुपात लेकर ही स्पष्ट हो पाती है। उदाहरण के लिए अगर हमें कबड्डी खेलने वाली तीन टीमों A, B, और C के वर्ष भर के प्रदर्शनों की तुलना करनी है तब यह हम कैसे कर पाएँगे?

इनमें से टीम A ने अब तक कुल 5 मैच खेले हैं, जिसमें से 3 मैच जीते हैं। टीम B ने अब तक 12 मैच खेलकर 5 मैच जीते हैं तथा टीम C ने 18 मैच खेलकर 13 मैच जीते हैं।

अब यह जानने के लिए कि इन टीमों में किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा रहा है इन तीनों के द्वारा जीते हुए मैचों की संख्या तथा खेले गए कुल मैचों की संख्या के अनुपात के रूप में लिखते हैं—

$$\text{टीम A का प्रदर्शन(अनुपात में)} = 3:5$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\text{टीम B का प्रदर्शन(अनुपात में)} = 5:12$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$\text{टीम C का प्रदर्शन(अनुपात में)} = 13:18$$

$$= \frac{13}{18}$$

लेकिन इनके प्रदर्शन के अनुपातों को देखकर यह बता पाना संभव नहीं है कि किसका प्रदर्शन अच्छा है क्योंकि प्रत्येक टीम के द्वारा खेले गए मैचों और जीते हुए मैचों की संख्या अलग-अलग है जिसके कारण इनके हर असमान हैं अतः हर को समान करने पर

$$\text{टीम A का प्रदर्शन} = \frac{3' 36}{5' 36} = \frac{108}{180}$$

$$\text{टीम B का प्रदर्शन} = \frac{5' 15}{12' 15} = \frac{75}{180}$$

$$\text{टीम C का प्रदर्शन} = \frac{13' 10}{18' 10} = \frac{130}{180}$$

अब हम इन अनुपातों को देखकर यह कह सकते हैं कि टीम C का प्रदर्शन सबसे अच्छा रहा।

करके देखें

1. निम्नलिखित में से किस भूखण्ड का तुलनात्मक क्षेत्रफल सबसे अधिक है—
 (i) 5 वर्ग मीटर में से 5 वर्ग सेमी का (ii) 30 वर्गसेमी. में से 3 वर्ग सेमी.का
 (iii) 10 वर्ग मीटर में से 9 वर्ग सेमी का

अनुपात का व्यावहारिक उपयोग

दिए गए तथ्यों के आधार पर जानकारी पता करना

अक्सर हम वास्तविक तथ्यों के आधार पर कुछ निष्कर्ष निकालते हैं। जैसे हमें पता है कि पृथ्वी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल लगभग 510 मिलियन वर्ग किमी. है, जिसमें लगभग 360 मिलियन वर्ग किमी जल-भाग और लगभग 150 मिलियन वर्ग किमी. थल-भाग है। अब हम इन तथ्यों के आधार पर बता सकते हैं कि पृथ्वी पर जल भाग और थल भाग किस अनुपात में है तथा यह भी कि पृथ्वी का कितना प्रतिशत भाग जल से ढँका है और कितना प्रतिशत भाग थल है। आइए यह पता करते हैं—

दिए गए तथ्य—

- (i) पृथ्वी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 510 मिलियन वर्ग किमी
- (ii) पृथ्वी का जल भाग = 360 मिलियन वर्ग किमी
- (iii) पृथ्वी का थल भाग = 150 मिलियन वर्ग किमी
- (A) पृथ्वी पर जल भाग व थल भाग का अनुपात = 360 : 150

$$= \frac{360}{150}$$

$$= \frac{12}{5} \text{ या } 12 : 5$$

अर्थात् पृथ्वी पर जल भाग व थल भाग का अनुपात 12 : 5 है।

- (B) पृथ्वी पर जल भाग का कुल पृथ्वी से अनुपात = 360 : 510

$$= \frac{360}{510} = \frac{12}{17} = 12 : 17$$

$$\begin{aligned}
 (\text{प्रतिशत में}) &= \frac{360}{510} \times 100\% \\
 &= 70.58\%
 \end{aligned}$$

अब आप इसी तरह पता करें कि सम्पूर्ण पृथ्वी का कितना प्रतिशत भाग थल है ?

ऊपर हमने तीन अलग-अलग टीमों के प्रदर्शन की तुलना की। अलग-अलग वर्षों में एक ही टीम के प्रदर्शन की तुलना भी की जा सकती है। आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं –

उदाहरण:-1 छत्तीसगढ़ राज्य की हॉकी टीम का राष्ट्रीय स्तर पर खेले गए मैचों में प्रदर्शन निम्नानुसार है–

1. वर्ष 2016 में 12 मैच खेलकर 10 मैच जीते।
2. वर्ष 2015 में 10 मैच खेलकर 7 मैच जीते।
3. वर्ष 2014 में 11 मैच खेलकर 8 मैच जीते।

इन तीन वर्षों में टीम का प्रदर्शन किस वर्ष सबसे अच्छा रहा? कारण सहित बताइए।

हल:- छत्तीसगढ़ हॉकी टीम की राष्ट्रीय स्तर पर खेले गए मैचों में प्रदर्शन के आधार पर निष्कर्ष निकालने के लिए इन प्रदर्शनों को अनुपात में लिखते हुए प्रतिशत में बदलते हैं–

1. वर्ष 2016 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 10:12$

$$\begin{aligned}
 (\text{प्रतिशत में}) &= \frac{10}{12} \times 100\% \\
 &= 83.34\%
 \end{aligned}$$
2. वर्ष 2015 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 7:10$

$$\begin{aligned}
 (\text{प्रतिशत में}) &= \frac{7}{10} \times 100\% \\
 &= 70\%
 \end{aligned}$$
3. वर्ष 2014 में प्रदर्शन (अनुपात में) $= 8:11$

$$\begin{aligned}
 (\text{प्रतिशत में}) &= \frac{8}{11} \times 100\% \\
 &= 72.73\%
 \end{aligned}$$

टीम का वर्ष 2016, 2015 व 2014 में प्रदर्शन क्रमशः 83.34%, 70% व 72.73% है। अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि पिछले दो वर्षों की तुलना में वर्ष 2016 में हॉकी टीम का प्रदर्शन ज्यादा अच्छा रहा।

उदाहरण:-2 माह अगस्त 2016 में महानदी के जलस्तर के बढ़ने की औसत दर 5 इंच प्रति घण्टा थी जबकि माह सितम्बर में यह 3 फीट प्रति दिवस थी। ज्ञात कीजिए कि किस माह में जलस्तर बढ़ने की औसत दर अधिक है?

हल:—

माह अगस्त में जलस्तर बढ़ने की दर = 5 इंच प्रति घण्टा

माह सितम्बर में जलस्तर बढ़ने की दर = 3 फीट प्रति दिवस

= 36 इंच प्रति 12 घण्टा

$$= \frac{36 \text{ इंच}}{12 \text{ घण्टा}}$$

$$= \frac{3 \text{ इंच}}{1 \text{ घण्टा}}$$

= 3 इंच प्रति घण्टा

अर्थात् माह अगस्त में जलस्तर बढ़ने की दर 5 इंच प्रति घण्टा है जो माह सितम्बर में जलस्तर बढ़ने की दर से अधिक है।

उदाहरण:—3 दो समूह एक कार्य को क्रमशः 14 दिन व 21 दिन में पूरा कर सकते हैं। यदि वे इस कार्य को एक साथ करते हैं तो कितने दिनों में कार्य पूरा हो जाएगा?

हल:— पहले समूह द्वारा 14 दिनों में किया गया कार्य = 1

$$\therefore \text{पहले समूह द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य} = \frac{1}{14}$$

दूसरे समूह द्वारा 21 दिनों में किया गया कार्य = 1

$$\text{दूसरे समूह द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य} = \frac{1}{21}$$

$$\text{दोनों समूहों द्वारा मिलकर 1 दिन में किया गया कार्य} = \frac{1}{14} + \frac{1}{21} = \frac{5}{42}$$

अर्थात् दोनों समूह मिलकर $\frac{5}{42}$ कार्य पूरा करते हैं = 1 दिन में

$$\text{अतः दोनों समूह मिलकर कार्य पूरा करते हैं} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5} \text{ दिनों में}$$

प्रश्नावली-1

1. एक क्रिकेट मैच में बल्लेबाज धीरेन्द्र 25 गेंद में 19 रन बनाकर आउट हो जाता है, महेन्द्र 20 गेंद खेलकर 14 रन बनाकर पेवेलियन लौटता है तथा रविन्द्र 15 गेंद में 9 रन बनाता है। इनमें से किसने सबसे अधिक रन बनाए?
2. 100 मीटर की दौड़ में राम 12 किमी. प्रति घण्टा की गति से दौड़ते हुए, श्याम को 5 मीटर पीछे छोड़ दौड़ जीत लेता है। श्याम की गति कितनी थी?
3. पृथ्वी पर खारा (समुद्रीय) पानी तकरीबन 38214 मिलियन घन किमी. है और साफ पानी (Fresh water) तकरीबन 1386 मिलियन घन किमी. है। बताइए पृथ्वी पर साफ पानी और

खारा पानी किस अनुपात में हैं ? पृथ्वी पर कुल कितना प्रतिशत साफ पानी है? और कितना प्रतिशत पानी खारा है ?

4. गायत्री एक खेत के धान की फसल को 12 दिन में काट लेती है। यदि उसी फसल को महेश 9 दिन में काट सकता है। तो बताइए दोनों मिलकर उस फसल को कितने दिन में काट लेंगे।
5. किसी काम को अरुण व अश्वनी क्रमशः 20 दिनों व 25 दिनों में पूरा कर सकते हैं। बताइए अरुण की कार्यक्षमता, अश्वनी से कितने प्रतिशत अधिक है?
6. संजय और शिवा मिलकर किसी काम को 16 दिनों में पूरा कर लेते हैं। यदि संजय उस काम को अकेले 24 दिनों में पूरा कर लेता है। तो बताइए कि शिवा अकेले उस काम को कितने दिनों में पूरा करेगा?

दो या अधिक भागों में बाँटना

प्रायः हमें किसी राशि को दो या दो से अधिक भागों में बाँटने की आवश्यकता पड़ती है। दो से ज्यादा हिस्सों में बाँटते समय तीन परिस्थितियाँ आ सकती हैं—पहली या तो सभी को बराबर भाग मिले। इसमें हम आसानी से पता कर सकते हैं कि प्रत्येक को कितना मिलेगा। दूसरी स्थिति यह होगी कि एक को दूसरे से अधिक मिले और तीसरे को दूसरे से अधिक मिले। और तीसरी स्थिति जब एक राशि को किसी खास अनुपात में बाँटा जाए जैसे तीन व्यक्तियों को कोई राशि $a : b : c$ के अनुपात में बाँटना हो।

अनुपात में बाँटने का एक उदाहरण देखें :-

तीन मित्रों लता, सोनू व पुरेन्द्र ने क्रमशः 3 लाख, 5 लाख तथा 7 लाख मिलाकर 15 लाख रुपये की लागत से कपड़ा व्यापार शुरू किया। वर्ष के अंत में उन्हें 2,25,000 रुपये का लाभ हुआ। इस लाभ में से तीनों को कितना-कितना हिस्सा मिलना चाहिए? क्या तीनों में बाँटवारा बराबर-बराबर होगा? यदि नहीं तो वे लाभ का वितरण किस तरह करेंगे? आइए देखें—

चूँकि व्यवसाय में तीनों के द्वारा दी गई राशि अलग-अलग है। अतः वे तीनों लागत के अनुपात में ही लाभ को बाँटना चाहेंगे। तीनों के लागत का अनुपात $3 : 5 : 7$ है।

अतः उन्हें प्राप्त कुल लाभ का $3k$, $5k$ व $7k$ हिस्सा मिलेगा।

अर्थात् $3k + 5k + 7k = 225000$

$$15k = 225000$$

$$k = \frac{225000}{15}$$

$$k = 15000$$

अतः व्यवसाय में हुए लाभ में लता का हिस्सा $3k$ अर्थात् 45000 रुपये

सोनू का हिस्सा $5k$ अर्थात् 75000 रुपये

तथा पुरेन्द्र का हिस्सा $7k$ अर्थात् 105000 रुपये है।

सोचें एवं चर्चा करें

निम्नलिखित तीनों स्थितियों में बाँटने की प्रक्रिया क्या होगी—

- (i) जब सभी को बराबर मिले ?
- (ii) जब एक को दूसरे से 10 अधिक मिले ?
- (iii) जब एक को किसी खास अनुपात में मिले ?

उदाहरण:-4 75 सेमी. लंबे एक रेखाखण्ड को 3 : 5 : 7 के अनुपात में तीन भाग करने पर प्रत्येक भाग की लंबाई कितनी होगी?

हल:- 75 सेमी. लंबे रेखाखण्ड को 3 : 5 : 7 के अनुपात में बाँटने पर प्रत्येक भाग की लंबाई क्रमशः 3k, 5k व 7k होगी।

अतः $3k + 5k + 7k = 75$

$$15k = 75$$

$$k = \frac{75}{15}$$

$$k = 5$$

अतः रेखाखण्ड के एक भाग की लंबाई 3k अर्थात् 15 सेमी.

दूसरे भाग की लंबाई 5k अर्थात् 25 सेमी.

तीसरे भाग की लंबाई 7k अर्थात् 35 सेमी. है।

करके देखें

1. 651 रुपये को अमित, अनिल व अंकिता में इस प्रकार बाँटिए कि अमित को प्राप्त 1 रुपये पर अनिल को 5 रुपये तथा अंकिता को 25 रुपये मिले।
2. ऋचा को अपने गुल्लक में 10 रुपये, 5 रुपये, 2 रुपये व 1 रुपये के सिक्के 2:3:5:7 के अनुपात में मिले। उसने अपनी माँ का बताया कि उसके पास कुल 520 रुपये हो गए हैं। क्या आप बता सकते हैं कि ऋचा को गुल्लक से 10 रुपये, 5 रुपये, 2 रुपये व 1 रुपये के कितने-कितने सिक्के मिले?

उदाहरण:-5 तीन छात्रों A, B व C में 11 : 13 : 17 के अनुपात में कुछ रुपए बाँटे गए। यदि छात्र A को 451 रुपए मिले तो बताइए छात्र B व छात्र C को कितने-कितने रुपए मिले ? तथा कुल कितने रुपए बाँटे गए ?

हल:- तीन छात्रों A, B, C में माना 11k, 13k व 17k रुपए बाँटे गए। यदि छात्र A को 451 रुपए मिले हैं।

तो छात्र A का हिस्सा $11k = 451$ अर्थात् $k = \frac{451}{11} = 41$

k का मान 41 प्राप्त हो गया है। अतः हम छात्र B व छात्र C का हिस्सा भी अब ज्ञात कर सकते हैं।

अतः छात्र B का हिस्सा $= 13k = 13 \times 41 = 533$ रूपए

तथा छात्र C का हिस्सा $= 17k = 17 \times 41 = 697$ रूपए

छात्र A, B व C तीनों के बाँटे गए कुल रूपए $= 451 + 533 + 697$
 $= 1681.$

उदाहरण:-6 क्या 63 हजार रूपए को तीन छात्रों A, B व C में 5 : 7 : 9 के अनुपात में बाँट कर 500 रुपये के नोटों में वितरित कर सकते हैं ? यदि हाँ तो बताइए प्रत्येक को कितने-कितने रूपए मिलेंगे ?

हल:- छात्र A, B व C को 63 हजार रूपए बाँटने से प्रत्येक को क्रमशः $5k$, $7k$ व $9k$ रूपए मिलेंगे।

अर्थात् $5k + 7k + 9k = 63$ हजार

$$21k = 63 \text{ हजार या } k = \frac{63}{21} \text{ हजार} = 3 \text{ हजार}$$

अतः छात्र A को $5k = 5 \times 3$ हजार $= 15$ हजार रूपए मिलेंगे

छात्र B को $7k = 7 \times 3$ हजार $= 21$ हजार रूपए मिलेंगे

छात्र C को $9k = 9 \times 3$ हजार $= 27$ हजार रूपए मिलेंगे

अतः यह राशि 500 रुपये के नोट में वितरित की जा सकती है।

उदाहरण:-7 किसी व्यवसाय की साझेदारी में व्यापारी A व B की पूँजियों में 3 : 2 का तथा व्यापारी A व C की पूँजियों में 2 : 1 का अनुपात है। व्यापार में A, B व C को कुल 1,78,100 रुपये का फायदा होता है। A, B व C को कितना-कितना हिस्सा मिलेगा?

हल:- चूँकि व्यापारी A व B की लागत पूँजियों का अनुपात 3 : 2 और A और C की राशि का अनुपात 2 : 1 है इसलिए इनका पारस्परिक अनुपात निकालने के लिए A के साथ संबंध को समतुल्य बनाना होगा इसके लिए हम व्यापारी B व A की लागत पूँजियों का अनुपात देखते हैं यह अनुपात 2 : 3 अर्थात् 4 : 6 है। व्यापारी A व C की लागत पूँजियों का अनुपात 2 : 1 $= 4 : 2$ अतः व्यापारी B, A व C की लागत पूँजियों का अनुपात B : A : C $= 4 : 6 : 2$

उनके व्यवसाय में लागत पूँजियों के अनुपात 4 : 6 : 2 में ही फायदा बाँटेगा।

अतः उन्हें $4k$, $6k$ व $2k$ रूपए मिलेंगे।

इसलिए $4k + 6k + 2k = 178100$

$$12k = 178100$$

$$k = \frac{178100}{13}$$

$$k = 13700$$

अतः A को प्राप्त लाभ $6k$ अर्थात् 82200 रुपये
 B को प्राप्त लाभ $4k$ अर्थात् 54800 रुपये
 C को प्राप्त लाभ $3k$ अर्थात् 41100 रुपये

करके देखें

- सीता के पास 8200 रुपये हैं जिसमें 100 रुपये के नोटों के दुगुने नोट, 500 रुपये के तथा 100 रुपये के नोटों से तिगुने नोट एक हजार रुपये के हैं। क्या आप बता सकते हैं कि सीता के पास 1000 रुपये के कितने नोट हैं?
- 2890 रुपये को A, B व C में इस प्रकार बाँटिए कि $A : B = 1 : 2$ तथा $B : C = 3 : 4$ हो।

किसी भी दिए अनुपात में किसी राशि को बाँटना

एक राशि x को तीन भागों में इस तरह बाँटिए कि उन भागों में $a : b : c$ का अनुपात हो। यहाँ राशि x का मान व प्रकार कुछ भी हो सकता है और अनुपातों a, b, c का मान भी कोई भी प्राकृत संख्या हो सकती है।

हमें राशि x को $a : b : c$ के अनुपात में बाँटना है। अतः इसे हम इस तरह लिख सकते हैं—

$$ak + bk + ck = x$$

$$(a + b + c)k = x$$

$$k = \frac{x}{(a + b + c)}$$

इसलिए x का पहला भाग ak अर्थात् $\frac{ax}{(a + b + c)}$

x का दूसरा भाग bk अर्थात् $\frac{bx}{(a + b + c)}$

x का तीसरा भाग ck अर्थात् $\frac{cx}{(a + b + c)}$

हमने देखा कि को बाँटने पर प्राप्त तीन भाग क्रमशः $\frac{ax}{(a + b + c)}$, $\frac{bx}{(a + b + c)}$ व $\frac{cx}{(a + b + c)}$ हैं

उदाहरण :- 8 पानी और दूध का एक मिश्रण 40 लीटर है। इसमें 10% पानी है। बेचने वाले ने इस मिश्रण में और पानी मिला दिया। नए मिश्रण में 20% पानी है। कितना पानी और मिलाया गया?

हल:- मिश्रण में पानी = 40 लीटर का 10% = 4 लीटर

$$\text{तथा दूध} = 40 - 4 = 36 \text{ लीटर}$$

माना इस मिश्रण में x लीटर पानी और मिला दिया गया।

तब नए मिश्रण में पानी = $(4+x)$ लीटर व दूध = 36 लीटर

इस नए मिश्रण में पानी 20% तथा दूध 80% होगा अर्थात्

पानी और दूध का अनुपात = $20 : 80 = 1 : 4$

$$\text{अतः} \quad \frac{4+x}{36} = \frac{1}{4}$$

$$16 + 4x = 36$$

$$x = 5$$

अर्थात् मिश्रण में 5 लीटर पानी और मिलाया गया है।

प्रश्नावली -2

1. किसी क्रिकेट मैच में तीन खिलाड़ियों A, B व C के रनों की संख्या का अनुपात $A : B = B : C = 1 : 2$ के अनुपात में है। यदि तीनों खिलाड़ियों के कुल रनों की संख्या 364 हो तो प्रत्येक खिलाड़ी के रनों की संख्या ज्ञात कीजिए।
2. तीन कर्मचारियों A, B व C के वेतन का अनुपात $2 : 3 : 5$ है। यदि उनके वेतन में क्रमशः 15%, 10% व 20% की वृद्धि कर दी जाती है तब उनके वेतन का अनुपात क्या होगा?
3. किसी व्यवसाय में तीन व्यक्ति A, B व C को 70,000 रुपये का मुनाफा मिलता है उन्हें इस मुनाफे को $A : B = 4 : 2$ व $B : C = 10 : 5$ के अनुपात में बाँटना है। बताइए कि प्रत्येक को कितने रुपये मिले? A को C का कितना गुना रुपया मिलेगा?
4. एक थैले में 1 रुपये, 2 रुपये व 5 रुपये के कुछ सिक्के $1 : 2 : 5$ के अनुपात में हैं यदि थैले में कुल 1590 रुपये हैं तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
5. दूध और पानी के 100 लीटर मिश्रण में 10% पानी है। इस मिश्रण में कितना लीटर शुद्ध दूध मिलाया जाए कि नए बने मिश्रण में केवल 5% पानी हो?



समानुपात (Proportion)

नवमी की वार्षिक परीक्षा में मारिया के विभिन्न विषयों में अंक इस प्रकार है—हिन्दी में $\frac{78}{100}$, अंग्रेजी में $\frac{35}{50}$, संस्कृत में $\frac{30}{50}$, गणित में $\frac{70}{100}$, विज्ञान में $\frac{90}{100}$ और

सामाजिक विज्ञान में $\frac{72}{100}$ ।

आप विभिन्न विषयों में मारिया के प्रदर्शन के बारे में क्या कह सकते हैं ?

अंकों में तुलना करने के लिए सबसे पहले तो कुल अंकों के आधार को समान होना चाहिए।

यानि अंग्रेजी में यदि 50 में 35 है तो 100 में से 70 होंगे। यानी $\frac{35}{50} = \frac{70}{100}$ भी लिख सकते हैं।

इसी तरह संस्कृत के अंकों को $\frac{30}{50} = \frac{2 \times 30}{2 \times 50} = \frac{60}{100}$ ऐसे भी लिख सकते हैं। अब आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

वास्तव में $\frac{35}{50}$ और $\frac{70}{100}$ या $\frac{30}{50}$ और $\frac{60}{100}$ तुल्य अनुपात है। यानी ऐसे अनुपात जिनका मान समान है,

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{35}{50} = \frac{70}{100} \quad \text{या} \quad \frac{30}{50} = \frac{60}{100}$$

दो तुल्य अनुपातों के इस संबंध को समानुपात (Proportion) कहते हैं।

यदि $a : b$ और $c : d$ समान हो तो उन्हें ऐसे लिखा जा सकता है $a : b = c : d$, इसे ऐसे भी दर्शा सकते हैं— $a : b :: c : d$.

यहाँ ':' समानुपात का चिन्ह है। और राशियाँ a, b, c और d समानुपात के पद है। प्रथम पद a और चौथा पद d है, इन दोनों पदों को चरम पद (Extreme terms) कहते हैं। इसी तरह दूसरा पद b और तीसरा पद c को मध्य पद (Mean tems) कहते हैं।

अतः यदि a, b, c, d समानुपातिक हैं, तो

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{या} \quad ad = bc$$

यानी किसी समानुपात के मध्य पदों का गुणनफल उसके चरम पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

हमें यदि इन चारों राशियों में से कोई तीन राशियाँ पता हों तो, हम ऊपर लिखे संबंध से चौथी राशि का मान ज्ञात कर सकते हैं। आइए देखें कैसे—

उदाहरण:-9 7, 3, 21 की चतुर्थानुपाती राशि पता करें।

हल— हमें यहाँ पहले तीन पद दिए हैं— 7, 3 और 21 माना कि चौथा पद x है तो,

$$7 : 3 :: 21 : x$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{21}{x}$$

$$\Rightarrow 7 \times x = 3 \times 21$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \times 21}{7}$$

$$\therefore x = 9$$

अतः चौथा पद 9 है।

उदाहरण:-10 संख्याओं 54, 71, 75 और 99 प्रत्येक में से क्या घटाया जाए कि शेषफल समानुपाती हो ?

हल— माना दी गई संख्याओं में से y घटाया जाए।

$$\text{तब} \quad (54 - y) : (71 - y) :: (75 - y) : (99 - y)$$

$$\Rightarrow \frac{(54 - y)}{(71 - y)} = \frac{(75 - y)}{(99 - y)}$$

$$\Rightarrow (54 - y)(99 - y) = (75 - y)(71 - y)$$

$$\Rightarrow 5346 - 153x + y^2 = 5325 - 146x + y^2$$

$$\Rightarrow 153x - 146x = 5346 - 5325$$

$$\Rightarrow 7x = 21$$

$$\Rightarrow x = \frac{21}{7}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

अतः यदि प्रत्येक संख्या से 3 घटाएँ तो मिलने वाली संख्याएँ समानुपात में होंगी।

इसे जाँच कर देखें।



सतत् समानुपात (Continued proportion)

कई ऐसी राशियाँ जिनमें पहली और दूसरी राशि में वही अनुपात होता है जो दूसरी और तीसरी राशि में और यह तीसरी और चौथी राशि के अनुपात के भी बराबर होता है।

यानी यदि $a, b, c, d, e \dots$ राशियाँ इस प्रकार हो कि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} \dots$ तो

यह राशियाँ सतत् अनुपात (Continued proportion) में हैं।

चूँकि $a : b : c$ तो b को a और c का मध्यानुपाती कहेंगे, यानी $a : b :: b : c$

$$\text{या} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

$$\Rightarrow b = \pm\sqrt{ac}$$

अतः इस तरह हम मध्य राशि का मान निकाल सकते हैं।

उदाहरण:-11 6 और 54 का मध्यानुपाती पता करें।

हल— माना 6 और 54 का मध्यानुपाती x है, तो

$$\text{अतः} \quad 6 : x :: x : 54$$

$$\Rightarrow x \times x = 6 \times 54$$

$$\Rightarrow x^2 = 6 \times 6 \times 3 \times 3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{6 \times 6 \times 3 \times 3}$$

$$\Rightarrow x = 6 \times 3 = 18$$

अतः 18, 6 और 54 का मध्यानुपाती है।

उदाहरण:-12 $8xy$ और $4x^2y$ का तृतीयानुपाती पता करें।

हल— माना $m, 8xy$ और $4x^2y$ का तृतीयानुपाती है तो

$$8xy : 4x^2y : m \Rightarrow 8xy : 4x^2y :: 4x^2y : m$$

$$\Rightarrow \frac{8xy}{4x^2y} = \frac{4x^2y}{m} \Rightarrow 8xy \times m = 4x^2y \times 4x^2y$$

$$\Rightarrow m = \frac{4x^2y \times 4x^2y}{8xy} \Rightarrow m = 2x^3y$$

अतः तृतीयानुपात $2x^3y$ है।

उदाहरण:-13 यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करें कि—

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$$

हल— माना $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ है

तो $a = bk, \quad c = dk$ होगा

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} \\ &= \frac{(bk)^2 - (dk)^2}{b^2 - d^2} \\ &= \frac{k^2(b^2 - d^2)}{(b^2 - d^2)} \\ &= k^2 \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R. H. S.} &= \frac{ac}{bd} \\ &= \frac{bk \cdot dk}{bd} \\ &= \frac{k^2(bd)}{bd} \\ &= k^2 \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

(1) और (2) से हम कह सकते हैं कि

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$



व्युत्क्रमानुपात

हम देखते हैं कि एक निश्चित राशि से खरीदी गई वस्तुओं की मात्रा कीमत बढ़ने पर कम हो जाती है। वहीं कीमत घटने पर यह मात्रा अधिक हो जाती है। बस, टैक्सी, साईकिल आदि की स्पीड(चाल) बढ़ाने अथवा घटाने पर उसी दूरी को तय करने में लगा समय घट या बढ़ जाता है। किसी कार्य को पूर्ण करने में लगा समय कार्य करने में लगे व्यक्तियों की संख्या घटाने या बढ़ाने के साथ क्रमशः बढ़ या घट जाता है। यह सब व्युत्क्रमानुपाती संबंध हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

व्युत्क्रमानुपाती संबंध के ऐसे ही कुछ और उदाहरण खोजकर लिखिए।

व्युत्क्रमानुपाती संबंध बहुत सी जगह उपयोग में आते हैं। हम उदाहरण से समझते हैं :-

उदाहरण:-14 12 मजदूर एक दीवार को 9 दिन में प्रतिदिन 8 घण्टा काम करके बना सकते हैं। उसी दीवार को 24 मजदूर प्रतिदिन 6 घण्टे काम करके कितने दिन में बना लेंगे ?

हल—मजदूरों की संख्या व कार्य पूर्ण करने में लगा समय एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होता है। दीवार बनाने में 12 मजदूरों को 9 दिन $\times$ 8 घण्टे = 72 घण्टे समय लगता है।

यदि मजदूरों की संख्या बढ़ाकर 24 कर दे तथा कार्य करने का समय घटाकर प्रतिदिन 6 घण्टे कर दें और माना x दिन में दीवार पूर्ण हो जाती है; तो 24 मजदूर को 6 घण्टे $\times x$ दिन = $6x$ घण्टे लगेंगे।

चूँकि दोनों परिस्थितियों में काम पूरा हुआ अतः यह समय की गणना व मजदूरों की संख्या के व्युत्क्रमानुपाती है जिसे हम निम्न व्युत्क्रमानुपाती सम्बन्ध के रूप में लिख सकते हैं—

मजदूरों की संख्या : मजदूरों की संख्या :: समय (घण्टों में) : समय (घण्टों में)

$$12 : 24 :: 6x : 72$$

$$\Rightarrow \frac{12}{24} = \frac{6x}{72}$$

$$\Rightarrow 72 \times 12 = 6x \times 24$$

$$\Rightarrow x = \frac{72 \times 12}{24 \times 6}$$

$$x = 6$$

अतः प्रतिदिन कार्य करने का समय 8 घण्टा से घटाकर 6 घण्टा करने व मजदूरों की संख्या 12 से बढ़ाकर 24 करने पर दीवार बनाने में 6 दिन का समय लगेगा।

उदाहरण:-15 200 सी.एफ.एल. बल्ब को 6 दिन तक 4 घण्टे प्रतिदिन जलाए जाने पर विद्युत् व्यय 40 रु. आता है। बताइए 48 रु. के व्यय पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से कितने CFL बल्ब जलाए जा सकते हैं ?

हल:- माना 48 रु. के कुल व्यय पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से x सी.एफ. एल. बल्ब जलाए जा सकते हैं।

पहली स्थिति में—

दिया है कि एक बल्ब 4 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से 6 दिन जलता है।

एक बल्ब के जलने का कुल समय $6 \times 4 = 24$ घण्टे

तो 200 बल्ब के जलने का कुल समय 200×24 घण्टे

इसी तरह दूसरी स्थिति में

15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से x बल्ब के जलने का कुल समय

$$x \times 15 \times 3 = 45x \text{ घण्टे}$$

यहां जैसे-जैसे बल्ब जलने का समय बढ़ेगा विद्युत व्यय भी बढ़ेगा यानि वह समानुपाती हैं।

200 बल्ब जलने का : कुल विद्युत व्यय :: x बल्ब जलने का : कुल व्यय

कुल समय

कुल समय

$$200 \times 24 : 40 :: 45x : 48$$

$$\frac{200 \times 24}{40} = \frac{45x}{48}$$

$$x = \frac{200 \times 24 \times 48}{45 \times 40} = 128$$

अतः 48 रु. के विद्युत् खर्च पर 15 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से $x = 128$ बल्ब जलाए जा सकते हैं।

उदाहरण:-16 यदि 15 व्यक्ति किसी काम को 40 दिन में करते हैं। बताइए उस काम के चौथाई हिस्से को कितने व्यक्ति 15 दिन में कर लेंगे?

हल:- यदि 15 व्यक्ति 1 काम को करते हैं = 40 दिनों में

तो 15 व्यक्ति $\frac{1}{4}$ काम को करते हैं— $40 \times \frac{1}{4} = 10$ दिनों में

मान लें $\frac{1}{4}$ काम को x व्यक्ति 15 दिनों में पूरा कर लेंगे।

हम जानते हैं कि व्यक्तियों की संख्या दिनों की संख्या के व्युत्क्रमानुपाती है।

तो इसे निम्न तरीके से लिखा जा सकता है:-

व्यक्तियों की संख्या दिनों की संख्या
15 व्यक्ति : x व्यक्ति :: 15 दिन : 10 दिन

$$\frac{15}{x} = \frac{15}{10}$$

$$x = 10$$

अतः 10 व्यक्ति इस कार्य के चौथाई भाग को 15 दिन में कर लेंगे।

उदाहरण:-17 दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः 30 मिनट और 40 मिनट में भर सकते हैं। तीसरा नल C उस टंकी को 60 मिनट में खाली कर सकता है। यदि तीनों नल एक साथ खोल दिए जाएँ तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

हल:- चूँकि नल A द्वारा 30 मिनट में टंकी का भरा गया भाग = 1

$$\text{इसलिए 1 मिनट में टंकी का भरा गया भाग} = \frac{1}{30}$$

$$\text{चूँकि नल B द्वारा 40 मिनट में टंकी का भरा गया भाग} = 1$$

$$\text{इसलिए 1 मिनट में नल द्वारा टंकी का भरा गया भाग} = \frac{1}{40}$$

$$\text{चूँकि नल C द्वारा 60 मिनट में खाली किया गया भाग} = 1$$

$$\text{इसलिए 1 मिनट में नल द्वारा टंकी का खाली किया गया भाग} = \frac{1}{60}$$

तीनों नलों को एक साथ चालू करने पर दो नलों से टंकी में पानी जाएगा लेकिन तीसरे नल से टंकी से पानी निकलता जाएगा।

$$\begin{aligned} \text{अतः 1 मिनट में टंकी का भरा गया भाग} &= \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{60} \\ &= \frac{4+3-2}{120} \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{120}$$

चूँकि $\frac{5}{120}$ भाग भरने में लगा समय = 1 मिनट

$$\begin{aligned} \text{इसलिए पूरा 1 भाग अर्थात टंकी को भरने में लगा समय} &= \frac{1}{\frac{5}{120}} \\ &= \frac{120}{5} \\ &= 24 \text{ मिनट} \end{aligned}$$

उदाहरण:-18 एक पम्प एक टंकी को 2 घण्टे में भरता है। टंकी में रिसाव होने के कारण टंकी भरने में 3 घण्टे लग जाते हैं यदि टंकी पूरी भरी हो तो रिसाव के कारण खाली होने में कितना समय लगेगा?

हल:- पंप द्वारा 2 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग = 1

$$\text{इसलिए पंप द्वारा 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग} = \frac{1}{2}$$

$$\text{माना रिसाव के कारण } x \text{ घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग} = 1$$

$$\text{तब रिसाव के कारण 1 घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग} = \frac{1}{x}$$

$$\text{चूँकि रिसाव के बावजूद पंप द्वारा 3 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग} = 1$$

$$\text{इसलिए रिसाव के बावजूद 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग} = \frac{1}{3}$$

$$\text{रिसाव के बावजूद 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग}$$

$$= \text{पंप द्वारा 1 घण्टे में टंकी का भरा गया भाग}$$

$$- \text{रिसाव के कारण 1 घण्टे में टंकी का खाली हुआ भाग}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x-2}{2x}$$

$$2x = 3x - 6$$

$$x = 6$$

अतः रिसाव के कारण टंकी 6 घण्टे में खाली हो जाएगी।

करके देखें

1. तीन व्यक्ति A, B तथा C किसी काम को क्रमशः 12 दिन, 15 दिन तथा 10 दिन में समाप्त कर सकते हैं। यदि उस काम को तीनों मिलकर करें तो काम पूरा होने में कितने दिन लगेंगे।

प्रश्नावली- 3

1. यदि 29 पुस्तकों का मूल्य 783 रूपए है तो 2214 रु. में कितनी पुस्तकें मिलेगी ?
2. यदि $14 : 35 :: 16 : x$ हो, तो x का मान पता करें।
3. $2xy, x^2, y^2$ का चतुर्थानुपाती पता करें।
4. संख्याएँ 10, 18, 22, 38 में से हर एक संख्या में क्या जोड़ा जाए कि ये संख्याएँ समानुपाती हो जाएं?
5. यदि a और c का मध्यानुपाती b हो तो, सिद्ध करें कि

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a + c}{b}.$$
6. वे संख्याएँ पता करें जिनका मध्यानुपाती 24 और तृतीयानुपाती 192 हो।
7. यदि $(1 + x) : (3 + x) : (6 + x)$ हो, तो x का मान पता करें।
8. दो संख्या 3:5 के अनुपात में हैं यदि प्रत्येक में से 9 घटाया जाए तो वे 12:23 के अनुपात में हो जाती हैं। बताइए पहली संख्या क्या है?
9. किसी काम को 45 मजदूर प्रतिदिन 6 घण्टा काम करते हुए 24 दिनों में पूर्ण कर लेते हैं। बताइए कितने मजदूर उस काम को 8 घण्टा प्रतिदिन करते हुए 15 दिन में पूर्ण कर लेंगे?
10. किसी काम 25 व्यक्ति 6 घण्टे प्रतिदिन करके 9 दिन में पूर्ण करते हैं तो बताइए 15 व्यक्ति 9 घण्टा प्रतिदिन काम करके उस काम को कितने दिन में पूर्ण कर लेंगे ?
11. यदि 30 आदमी किसी काम को 6 घण्टे प्रतिदिन करके 15 दिन में पूर्ण करते हैं। उसी काम को 20 आदमी कितने घण्टे प्रतिदिन काम करके 15 दिन में ही पूर्ण कर लेंगे ?
12. एक कार सरायपाली से 75 किमी प्रति घण्टा की औसत चाल से चलकर रायपुर 4 घण्टे में पहुँचती है। मार्ग में बाधा व ट्रैफिक बढ़ जाने के कारण कार की औसत चाल 15 किमी प्रति घण्टा कम हो जाती है। कार को रायपुर पहुँचने में कितना समय लगेगा ?
13. यदि 10 बल्बों को 60 दिन तक 4 घण्टे प्रतिदिन जलाने में 80 रु. का विद्युत् व्यय आता है तो कितने बल्ब 16 दिन तक 3 घण्टे प्रतिदिन जलाए जाने पर 40 रु. का विद्युत् व्यय आएगा?
14. किसी काम को 48 मजदूर 8 घण्टे प्रतिदिन काम करके 25 दिन में पूर्ण करते हैं। 30 आदमी इस काम से दुगुने काम को 10 घण्टे प्रतिदिन करके कितने दिन में पूर्ण कर लेंगे?

15. A और B मिलकर किसी काम को 24 दिन में, B और C मिलकर उसी काम को 18 दिन में तथा A और C मिलकर उसी काम को 12 दिन में करते हैं। बताइए A अकेले उस काम को कितने दिन में पूरा कर लेगा?
16. किसी काम को पूरा करने में 15 व्यक्तियों को 16 दिन लगते हैं। कितने व्यक्ति उस काम के चौथाई भाग को 15 दिन में पूरा कर सकते हैं?
17. किसी कैम्प में 120 सैनिकों के लिए 60 दिन की खाद्य सामग्री पर्याप्त थी। यदि 40 दिन बाद 40 सैनिक अन्यत्र चले गए तो शेष खाद्य सामग्री बचे हुए सैनिकों के लिए कितने दिन चलेगी?
18. यदि 11 मकड़ियाँ 11 दिनों में 11 जालें बनाती हैं तो बताइए 1 मकड़ी 1 जाल बनाने में कितने दिन लगेगी।
19. दो नल एक टंकी को पूरा भरने में 6 घण्टे का समय लेते हैं। यदि एक नल को खोलने पर 10 घण्टे में पूरा भर लेता है। तो बताइए केवल दूसरा नल खोलने पर टंकी भरने में कितना समय लगेगा।



हमने सीखा

1. दैनिक जीवन में प्रायः कई बार तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है। यह तुलना बहुत बार अनुपात से स्पष्ट हो पाती है। अर्थात् दो राशियों की तुलना अनुपात से बेहतर तरीके से कर सकते हैं।
2. खिलाड़ियों के प्रदर्शन की तुलना करनी हो अथवा बाजार में कोई वस्तु खरीदनी हो तो हम तुलना के आधार पर ही उनकी श्रेष्ठता का निर्धारण कर पाते हैं।
3. तुलना समान प्रकार की राशियों में ही की जाती है अर्थात् अनुपात दो सजातीय राशियों की तुलना होती है।
4. कभी-कभी हमें दो अनुपातों की तुलना करने की जरूरत पड़ती है। दो अनुपातों की तुलना समानुपात कहलाती है।
5. किसी राशि को दो या दो से अधिक भागों में बाँटने में अनुपात का उपयोग किया जाता है।
6. दैनिक जीवन में हम ऐसी कई परिस्थितियाँ देखते हैं जहाँ एक राशि के बढ़ने या घटने से दूसरी राशि घट या बढ़ जाती है। ये राशियाँ व्युत्क्रम अनुपात में होती हैं।

उत्तरमाला-1

- | | | |
|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| 1. धीरेन्द्र | 2. 11.4 किमी/घंटा | 3. 7:193, 3.5%, 96.5% |
| 4. $5\frac{1}{7}$ दिन | 5. 1% अधिक है | 6. 48 दिन |

उत्तरमाला-2

- | | |
|--|---------------|
| 1. 52,104,208 | 2. 23:33:60 |
| 3. 40,000रू., 20,000रू., 10,000रू., चार गुना | 4. 53,106,265 |
| 5. 4 लीटर | |

उत्तरमाला-3

- | | | | | |
|-------------|-------------|-------------------|-------------------------|----------------------|
| 1. 82 | 2. 40 | 3. $\frac{xy}{2}$ | 4. 2 | 6. 12 व 48 |
| 7. 3 | 8. 27 | 9. 54 मजदूर | 10. 10 दिन | 11. 9 घण्टे प्रतिदिन |
| 12. 5 घण्टे | 13. 25 बल्ब | 14. 64 दिन | 15. $28\frac{4}{5}$ दिन | 16. 4व्यक्ति |
| 17. 30 दिन | 18. 11 दिन | 19. 15 घण्टे | | |

