विद्युत विभव
ELECTRIC POTENTIAL

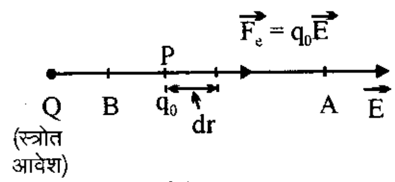
3 CHAPTER

भूमिका (Introduction)

पिछले अध्यायों में हमने एक बिन्दु आवेश तथा आवेशों के समुदाय के कारण उत्पन्न सदिश क्षेत्र $\vec{E}$ का अध्ययन किया है। साथ ही सतत् आवेश वितरण, गाउस का नियम तथा इस नियम के अनुप्रयोगों का भी हम अध्ययन कर चुके हैं।

गुरुत्वीय बल तथा स्प्रिंग बल जैसे संरक्षी बलों (conservative forces) के संदर्भ में स्थितिज ऊर्जा की व्याख्या से हम परिचित है। यांत्रिकी में ऊर्जा संरक्षण नियम प्रयुक्त करते समय, निकाय पर आरोपित बलों पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता है। कूलॉम नियम द्वारा आरोपित स्थिर विद्युत बल एक संरक्षी बल होने के कारण विद्युत परिघटनाओं की व्याख्या विद्युत स्थितिज ऊर्जा के पदों में आसानी से की जा सकती है। इसी आधार पर एक अदिश राशि, जिसे विद्युत विभव कहते हैं, परिभाषित की गई हैं। विद्युत विभव के बिन्दु की स्थिति के अदिश फलन होने के कारण, विद्युत विभव द्वारा विद्युत परिघटनाओं की व्याख्या विद्युत क्षेत्र तीव्रता (स्थिति सदिश फलन) की तुलना में अधिक सरल तथा सुगम विधि से की जा सकती है। विद्युत विभव की अभिधारणा का व्यावहारिक महत्व बहुत अधिक है।

माना कि कोई परीक्षण आवेश q_0 किसी विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में किसी बिन्दु P पर स्थित है। (चित्र) तब इस परीक्षण आवेश q_0 पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ द्वारा एक विद्युत बल $\vec{F_e} = q_0\vec{E}$ आरोपित होता है। इस बल के कारण आवेश q_0, विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ की दिशा में गतिमान होने का प्रयास करता है। माना कि आवेश q_0 पर एक बाह्य बल $\vec{F}_{ext}$ आरोपित किया जाता है जो $\vec{F_e}$ के बराबर परन्तु विपरीत दिशा में है। इस बाह्य बल के अन्तर्गत आवेश बिना किसी त्वरण के, स्त्रोत आवेश Q की ओर गतिशील होता है।



चित्र 3.1

इस प्रकार बाह्य बल द्वारा परीक्षण आवेश q_0 को बिन्दु A से B तक विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ext}.\vec{dr} = -\int_A^B \vec{F_e}.\vec{dr}$$

$\because \quad \vec{F_e} = q_0\vec{E}$

$$\therefore \quad W_{AB} = -\int_A^B q_0\vec{E}.\vec{dr} = -q_0\int_A^B \vec{E}.\vec{dr} \qquad ...(1)$$

बाह्य बल द्वारा प्रतिकर्षण बल के विरुद्ध यह किया गया कार्य स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

विद्युत क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु पर आवेशित कण में एक निश्चित विद्युत स्थितिज ऊर्जा होती है तथा इस आवेशित कण को बिन्दु A से बिन्दु B तक प्रतिकर्षण बल के विरुद्ध ले जाने में किया गया कार्य, बिन्दुओं A तथा B के मध्य विद्युत स्थितिज ऊर्जा के अन्तर के तुल्य होता है, अर्थात्

$$W_{AB} = \Delta U = U_B - U_A$$

$$= -q_0\int_A^B \vec{E}.\vec{dr} \qquad ....(2)$$

अब यदि बिन्दु A अनन्त पर स्थित हो तब परीक्षण आवेश q_0 तथा स्त्रोत आवेश Q के मध्य कोई स्थिर विद्युत बल कार्य नहीं करता है जिससे परीक्षण आवेश q_0 की स्थितिज ऊर्जा अनन्त पर शून्य होती है। इस स्थिति में परीक्षण आवेश q_0 को अनन्त से विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बिन्दु B तक त्वरण रहित विस्थापन के लिए किया गया कार्य

$$W_{AB} = U_B - U_\infty = U_B - 0 = U_B$$

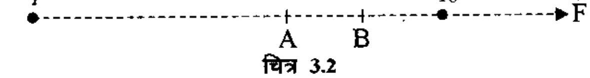
$$\Rightarrow \qquad W_{\infty B} = U_B = -q_0\int_\infty^B \vec{E}.\vec{dr} \qquad ...(3)$$

अर्थात् इस स्थिति में यह कार्य, परीक्षण आवेश q_0 की विद्युत क्षेत्र में बिन्दु B पर स्थितिज ऊर्जा के तुल्य होता है।

3.1 स्थिर विद्युत विभव तथा विभवान्तर (Electrostatic Potential and Potential Difference)

विद्युत विभवान्तर (Potential difference)

मान लो किसी आवेश $+q$ के कारण उसके चारों ओर एक विद्युत क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है। इस विद्युत क्षेत्र में यदि कोई परीक्षण आवेश q_0 रख दिया जाए तो वह एक प्रतिकर्षण बल का अनुभव करता है। अतः परीक्षण आवेश को किसी बिन्दु B से अन्य बिन्दु A तक ले जाने में प्रतिकर्षण बल के विरूद्ध कार्य करना पड़ता है। **विद्युत क्षेत्र में एकांक धन आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य उन दोनों बिन्दुओं के बीच विभवान्तर को प्रदर्शित करता है।** यदि परीक्षण आवेश q_0 को B से A तक लाने में किया गया कार्य W हो तो इन बिन्दुओं के मध्य उत्पन्न विभवान्तर $V_A - V_B = \frac{W}{q_0}$ होगा।

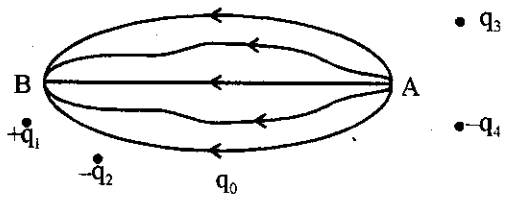


चित्र 3.2

यहाँ कार्य W तथा आवेश q_0 दोनों ही अदिश राशियाँ हैं अतः विद्युत विभवान्तर भी एक अदिश राशि है। यदि किसी परीक्षण आवेश q_0 को बिन्दु B से A तक ले जाने में कार्य किसी बाह्य कारक के द्वारा संपन्न होता है तो बिन्दु A का विभव B बिन्दु के विभव से अधिक कहलाता है।

यदि चित्र में विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करने वाला आवेश –q है तो तब परीक्षण आवेश q_0 को B से A तक ले जाने में कार्य स्वयं विद्युत बल के द्वारा संपन्न होता है इस स्थिति में A का विभव B के विभव से कम होता है।

संलग्न चित्र यह दर्शाता है कि किसी आवेश विन्यास (charge configuration) के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र द्वारा किसी परीक्षण आवेश q_0 पर किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता है तथा यह केवल अंतिम तथा प्रारंभिक स्थितियों पर निर्भर करता है।



चित्र 3.3

मात्रक–

$$V_A - V_B = \frac{W}{q_0} \text{ से}$$

विभवान्तर की इकाई S.I. पद्धति में जूल/कूलॉम या वोल्ट होती है।

इस प्रकार यदि एक कूलॉम आवेश वाले एक परीक्षण आवेश को विद्युत क्षेत्र के $\frac{1\text{जूल}}{1\text{कूलॉम}} = 1\text{वोल्ट}$ एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य 1 जूल है तो उन दोनों बिन्दुओं के बीच विभवान्तर वोल्ट 1 होगा।

विद्युत विभव (Electric Potential)

यदि बिन्दु अनंत पर स्थित हो तो

$$V_A - V_\infty = \frac{W}{q_0}$$

किन्तु अनंत पर विभव = 0 अतः

$$V_A - 0 = \frac{W}{q_0}$$

$$\therefore \quad V_A = \frac{W}{q_0}$$

$$V = \frac{W}{q_0}$$

अतः **विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर विभव एक परीक्षण आवेश q_0 को अनंत से उस बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य एवं परीक्षण आवेश की मात्रा की निष्पति के बराबर होता है।** यदि परीक्षण आवेश एक कूलॉम का धन आवेश हो और यदि अनंत से इसे किसी बिन्दु तक लाने में किया गया कार्य 1 जूल हो तो उस बिन्दु का विभव 1 वोल्ट होगा।

विभव की विमाएँ

विभव की इकाई = जूल/कूलॉम
= न्यूटन × मी./(एम्पियर × से.)
= किग्रा. × मी. × से.$^{-2}$ मी./(एम्पियर × से.)
= किग्रा. × मी.^{2} से.$^{-3}$ × एम्पियर$^{-1}$

विभव की विमा = $[ML^2T^{-3}A^{-1}]$

C.G.S. पद्धति में विभव का स्थिर विद्युत मात्रक स्टैट वोल्ट (Stat volt) होता है।

$$V = \frac{W}{q} \text{ से}$$

$$V = \frac{1\text{अर्ग}}{1\text{स्टैट कूलॉम}} = 1 \text{ स्टैट वोल्ट}$$

$$\therefore \quad 1 \text{ वोल्ट} = \frac{1 \text{ जूल}}{1 \text{ कूलॉम}} = \frac{10^7 \text{ अर्ग}}{3\times10^9 \text{स्टैट कूलॉम}}$$

$$= \frac{1}{300} \text{ स्टैट वोल्ट या स्थिर विद्युत मात्रक}$$

C.G.S. पद्धति में विभव के विद्युत–चुम्बकीय मात्रक को एब–वोल्ट (ab-volt) कहते हैं।

$$1 \text{ एब–वोल्ट} = \frac{1 \text{ अर्ग}}{1 \text{ एब –कूलॉम}}$$

$$= \frac{10^{-7} \text{ जूल}}{10 \text{ कूलॉम}} = \frac{1}{10^8} \text{ वोल्ट}$$

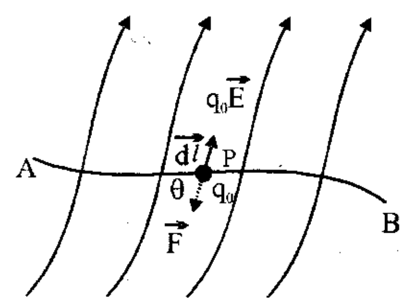
अतः $\quad 1 \text{ वोल्ट} = 10^8 \text{ एब–वोल्ट}$

तथा $\quad 1 \text{ वोल्ट} = \frac{1}{300} \text{ स्टैट वोल्ट}$

$\therefore \quad 1 \text{ स्टैट वोल्ट} = 3 \times 10^{10} \text{ एब–वोल्ट}$

3.1.3 विद्युत क्षेत्र [illegible] (Electric Potential [illegible])

जब विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण व दिशा परिवर्तित होती है अर्थात् असमान विद्युत क्षेत्र के लिए गतिज ऊर्जा परिवर्तन के बिना एकांक धनावेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किए गए कार्य के लिए रेखीय समाकलन किया जाता है। चित्रानुसार असमान विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ तथा एक वक्रीय पथ AB को दर्शाया गया।



चित्र 3.4

अब क्षेत्र में किसी बिन्दु पर स्थित परीक्षण आवेश पर बल $\vec{F}_e = q_0\vec{E}$ होगा। इस परीक्षण आवेश पर इस बल के कारण उत्पन्न त्वरण को रोकने के लिए अर्थात् परीक्षण आवेश को नियत गति से प्रवाह के लिए परीक्षण आवेश पर एक बाह्य बल लगाना होगा। बाह्य बल $\vec{F}$ का परिमाण तथा दिशा $\vec{E}$ में परिवर्तन के साथ–साथ परिवर्तित होगा।

यदि बाह्य बल द्वारा q_0 आवेश को किसी अल्पांश विस्थापन $\vec{dl}$ के लिए किया गया कार्य dw हो, तो

$$dw = \vec{F}.\vec{dl}$$

∴ आवेश q_0 को बिन्दु A से बिन्दु B तक ले जाने में किया गया कार्य–

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl}$$

$\because$ बाह्य बल $\vec{F} = -q_0\vec{E}$

$$\therefore \quad W_{AB} = -q_0\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

परंतु विद्युत विभवांतर

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

$$\therefore \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} \quad ...(1)$$

यदि बिन्दु A अनन्त पर स्थित है, तो बिन्दु B पर विद्युत विभव

$$V_B = \frac{W_{\infty B}}{q_0}$$

$$= -\int_{\infty}^B \vec{E}.\vec{dl}$$

इस प्रकार B की स्थिति किसी भी सामान्य बिन्दु P होने पर बिन्दु P पर विद्युत विभव

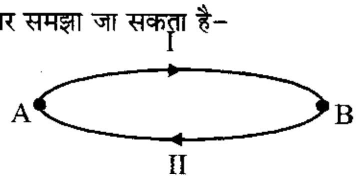
$$V = -\int_{\infty}^P \vec{E}.\vec{dl} = \frac{W}{q_0} \quad ...(2)$$

समी. (1) से स्पष्ट है, कि विद्युत क्षेत्र में स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विद्युत विभवांतर का मान एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक $\vec{E}.\vec{dl}$ के रेखीय समाकलन के ऋणात्मक के बराबर होता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. स्थिर विद्युत क्षेत्र संरक्षी होता है–

स्थिर विद्युत क्षेत्र में यदि एकांक धनावेश को किसी बिन्दु A से प्रारम्भ कर किसी बिन्दु B तक तथा किसी अन्य पथ से वापिस पुन: A तक लाया जाये, तब एक चक्कर पूरा करने में किया गया कार्य शून्य होता है। इसे निम्न प्रकार समझा जा सकता है–



पथ I के लिए

$$\frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = V_B - V_A \quad ...(1)$$

तथा पथ II के लिए

$$\frac{W_{BA}}{q_0} = -\int_B^A \vec{E}.\vec{dl} = V_A - V_B \quad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से

$$\frac{W_{AB}}{q_0} + \frac{W_{BA}}{q_0} = 0$$

$$\text{या} \quad \left[-\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}\right] + \left[-\int_B^A \vec{E}.\vec{dl}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$$

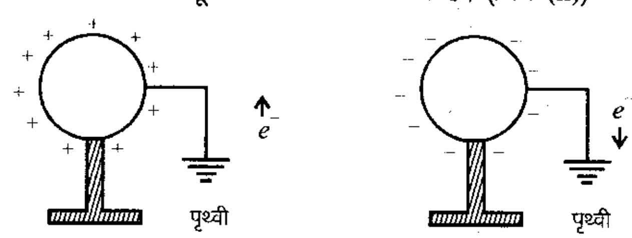
अर्थात् किसी विद्युत क्षेत्र में स्थित बंद लूप के लिए विद्युत क्षेत्र का रेखीय समाकलन शून्य होता है। अत: स्थिर विद्युत क्षेत्र संरक्षी होता है।

2. पृथ्वी का विभव (Potential of the Earth)

जिस प्रकार किसी स्थान की ऊँचाई, समुद्र तल को शून्य मानकर नापी जाती है उसी प्रकार किसी वस्तु के विभव की माप पृथ्वी के विभव को शून्य मानकर की जाती है। पृथ्वी एक बहुत बड़ा चालक होने से यदि पृथ्वी को थोड़ा आवेश दे दिया जाये या उससे कुछ आवेश ले लिया जाये तो भी उसके विभव में कोई विशेष परिवर्तन नहीं आता है।

यदि किसी वस्तु का विभव पृथ्वी के विभव से अधिक हो तो उसके विभव को धनात्मक विभव तथा यदि वस्तु का विभव पृथ्वी के विभव से कम हो तो उसके विभव को ऋणात्मक विभव कहते हैं। धनावेशित वस्तुओं का विभव धनात्मक जबकि ऋणावेशित वस्तुओं का विभव ऋणात्मक होता है।

यदि किसी धनावेशित चालक को धात्विक तार द्वारा पृथ्वी से सम्पर्कित करते हैं, तो पृथ्वी से इलेक्ट्रॉन आकर चालक को आवेश रहित करके उसे शून्य विभव पर ले आते हैं। (चित्र (i)) इसके विपरीत यदि किसी ऋणावेशित चालक को धात्विक तार द्वारा पृथ्वी से सम्पर्कित करते हैं, तो चालक से इलेक्ट्रॉन पृथ्वी में चले जाते है तथा चालक आवेश रहित होकर शून्य विभव पर आ जाता है। (चित्र (ii))



(i) (ii)

3. धन आवेश सदैव उच्च विभव से निम्न विभव की ओर गति करता है, जबकि ऋण आवेश सदैव निम्न विभव से उच्च विभव की ओर गति करता है।

4. विद्युत विभव या विद्युत विभवांतर एक बिन्दु फलन राशि है, जो अभीष्ट बिन्दु की स्थिति पर निर्भर करती है। अत: इसे $V = V(x, y, z)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

5. दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर, स्थितिज ऊर्जा के अन्तर के समानुपाती होता है तथा

$$\Delta U = q_0 \Delta V$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

6. विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु P पर विभव, वास्तव में बिन्दु P तथा अनन्त पर स्थित किसी बिन्दु के मध्य विभवान्तर ही होता है।

7. आवेशित चालक को किसी कुचालक द्वारा पृथ्वी से जोड़ने पर

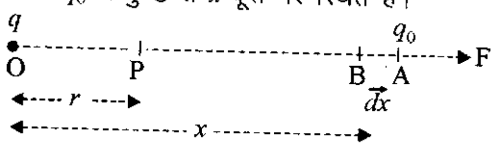
इलेक्ट्रॉन का प्रवाह नहीं होता है क्योंकि कुचालक से होकर इलेक्ट्रॉनों का प्रवाह नहीं हो सकता है।

8. विद्युत विभव को प्रभावित करने वाले कारक–

किसी चालक का विभव निम्नलिखित चार कारकों पर निर्भर करता है– (i) चालक के आवेश पर (ii) चालक के आकार पर (iii) अन्य चालकों की उपस्थिति पर तथा (iv) चालक के चारों ओर के माध्यम पर

3.2 बिन्दु आवेश के कारण विभव (Potential due to a point charge)

मान लो निर्वात् में किसी बिन्दु O पर एक बिन्दु आवेश $+q$ स्थित है। O से r दूरी पर एक बिन्दु P स्थित है जिस पर हमें विद्युत विभव का मान ज्ञात करना है। इसके लिए एक परीक्षण आवेश $+q_0$ को अनंत से बिंदु P तक लाने में किए गए कार्य का परिकलन करना होगा। मान लो परीक्षण आवेश $+q_0$ बिन्दु O से x दूरी पर स्थित है।



चित्र 3.5

कूलॉम के नियम से q_0 पर कार्य करने वाला बल

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{x^2} \qquad \text{(OA दिशा में)}$$

मान लो दूसरा बिन्दु B, A से dx दूरी पर बिन्दु O की ओर स्थित है बल F के विरूद्ध परीक्षण आवेश q_0 को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य

$$dW = \vec{F}.\vec{dx} = Fdx\cos 180^\circ$$
$$= -Fdx$$
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{x^2}dx$$

अतः परीक्षण आवेश q_0 को अनंत से बिन्दु P तक लाने में किया गया कार्य

$$W = \int_\infty^r -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{x^2}dx$$

या $$W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r -\frac{1}{x^2}dx$$

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left[+\frac{1}{x}\right]_\infty^r = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right] \qquad .....(2)$$

या $$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \text{ जूल}$$

किन्तु $$V = \frac{W}{q_0}$$

$$= \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}}{q_0}$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \text{ वोल्ट} \qquad .....(3)$$

जहाँ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9$ (न्यूटन मी.^{2}/कूलॉम^2)

इसी प्रकार बिन्दु आवेश $-q$ के कारण बिन्दु P पर विभव

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \text{ वोल्ट}$$

इस प्रकार विलगित धनावेश के कारण विभव धनात्मक तथा विलगित ऋणावेश के कारण विभव ऋणात्मक होता है।

यदि q आवेश परावैद्युतांक ϵ_r वाले माध्यम में स्थित हो तो

$$V_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{q}{r} = \frac{V}{\epsilon_r}$$

$\because \quad \epsilon_r > 1$

$\therefore \quad V_m < V$

अर्थात् किसी माध्यम में विभव, निर्वात् की तुलना में कम होता है।

वैकल्पिक विधि–बिन्दु A पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\hat{x}$$

विभव की परिभाषा के अनुसार बिन्दु P पर विभव

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{x} = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\hat{x}\cdot d\vec{x}$$

$\hat{x}$ व $\vec{x}$ एक ही दिशा में

अतः $\hat{x}\cdot d\vec{x} = dx$

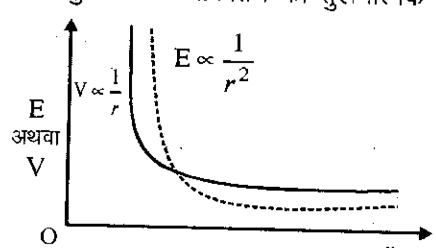
$$\therefore \quad V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\int_\infty^r \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\int_\infty^r x^{-2}dx$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\left[\frac{-1}{x}\right]_\infty^r$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{kq}{r} \text{ वोल्ट} \qquad .....(1)$$

किसी बिन्दु आवेश q के लिए दूरी r में परिवर्तन के साथ विभव तथा विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन का तुलनात्मक आलेख–



चित्र 3.6

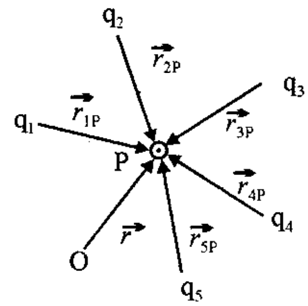
3.3 आवेशों के निकाय के कारण विभव (Potential due to a system of charges)

विद्युत विभव एक अदिश राशि है। अतः अनेक बिन्दु आवेशों द्वारा किसी एक बिन्दु पर परिणामी विभव ज्ञात करने के लिए, उस बिन्दु पर प्रत्येक आवेश के कारण विभव अलग–अलग ज्ञात करके, इन सभी विभवों का योग (बीजगणितीय अर्थात् चिन्ह सहित) ही बिन्दु पर परिणामी विभव होता है। इसे विभवों का अध्यारोपण सिद्धान्त कहते है। चित्र में विभिन्न बिन्दु आवेशों q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 के सापेक्ष बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}_{1P}, \vec{r}_{2P}, \vec{r}_{3P}, \vec{r}_{4P}, \vec{r}_{5P}$ तथा मूल बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ प्रदर्शित है।

अब बिन्दु P पर आवेश q_1 के कारण विभव

$$V_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1P}}$$

इसी प्रकार बिन्दु P पर आवेश q_2 के कारण विभव V_2 तथा आवेश q_3 के कारण विभव V_3 को भी व्यक्त किया जा सकता है–



चित्र 3.7

$$V_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2P}}, \quad V_3 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_3}{r_{3P}}$$

अतः सभी आवेशों के कारण बिन्दु P पर परिणामी विद्युत विभव

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots + V_n$$

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}} + \frac{q_3}{r_{3P}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{q_n}{r_{nP}}\right] \quad \ldots..(1)$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_{iP}} \quad \ldots(2)$$

सारणी–कुछ उपयोगी विभव एवं विभवान्तर

निकाय	विभव	निकाय	विभव
गरजते बादल एवं पृथ्वी तल	5×10^7 V	हाइड्रोजन परमाणु में	26 V
वाण्डे-ग्राफ जनित्र	10^7 V	इलेक्ट्रॉन कक्षा पर	12 V
उच्च विभव की विद्युत लाईन	5×10^5 V	कार की बैटरी	1.5 V
X- किरण की पावर सप्लाई	10^5 V	ड्राई सेल	0.6 V
टी-वी-टयूब की पावर सप्लाई	2×10^4 V	अकेला सोलर सेल	0.09 V
कार के इग्नीशन प्लग पर	10^4 V	शरीर की नर्व मेम्ब्रेन (nerve membrane) के बीच शरीर की त्वचा पर (EKG तथा EEG)	5×10^{-5} V
नियॉन टयूब की पावर सप्लाई	2×10^3 V		
घर की विद्युत सप्लाई	220 V		

उदा.1. एक स्थान पर विद्युत विभव –15 वोल्ट है तथा किसी दूसरे स्थान पर विद्युत विभव V वोल्ट है। यदि 6 कूलॉम आवेश को पहले स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने में 150 जूल कार्य करना पड़े, तो V का मान ज्ञात कीजिए। पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.1

हल–माना कि किसी बिन्दु A पर विद्युत विभव $V_A = -15$ वोल्ट तथा बिन्दु B पर विद्युत विभव $V_B = V$ वोल्ट है।

$q = 6$ कूलॉम, $W_{AB} = 150$ जूल

$$\because \quad V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

$$\Rightarrow \quad V - (-15) = \frac{150}{6}$$

$$\Rightarrow \quad V + 15 = 25$$

$$\Rightarrow \quad V = 10 \text{ वोल्ट}$$

उदा.2. हीलियम नाभिक के कारण 3Å दूरी पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिए।

हल–बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर उत्पन्न विभव

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}\frac{q}{r} = 9 \times 10^9 \frac{q}{r}$$

दिया है $\quad q = +2e = +2 \times 1.6 \times 10^{-19} = +3.2 \times 10^{-19}$ कूलॉम

$r = 3\text{Å} = 3 \times 10^{-10}$ मी.

$$V = \frac{9 \times 10^9 \times 3.2 \times 10^{-19}}{3 \times 10^{-10}}$$

अतः $\quad V = 9.6$ वोल्ट।

उदा.3. 20 C आवेश को बिन्दु A से B तक ले जाने में 0.2 मीटर दूरी के लिये किया गया कार्य 2 जूल हैं, तब इन बिन्दुओं के मध्य विभवांतर का मान क्या होगा? पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.2

हल–दिया गया है– $q = 20C$, $W_{AB} = 2$ जूल

$$\because \quad V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{2}{20} = 0.1 \text{ वोल्ट}$$

उदा.4. हवा में स्थित किसी धनात्मक बिन्दु आवेश 1.1×10^{-9} C से 10 cm दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिए। पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.3

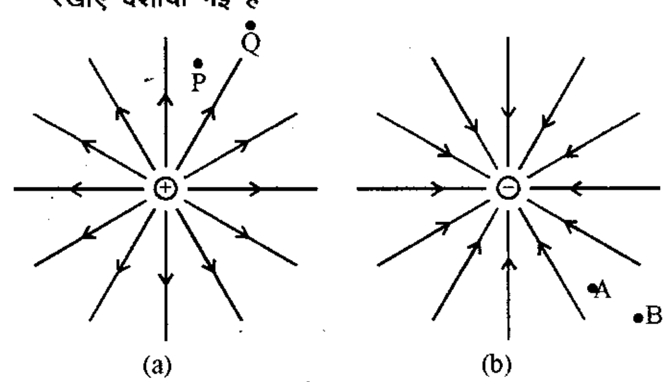
हल– दिया गया है– $q = 1.1 \times 10^{-9}$ C

$r = 10$ cm $= 0.1$ m.

$$\text{विद्युत विभव } V = \frac{Kq}{r} = \frac{9 \times 10^9 \times 1.1 \times 10^{-9}}{0.1}$$

$$V = 99 \text{ वोल्ट}$$

उदा.5. (a) तथा (b) में क्रमशः एकल धन तथा ऋण आवेशों की क्षेत्र रेखाएँ दर्शायी गई हैं–



चित्र 3.8

(a) विभवांतर $V_P - V_Q$; $V_B - V_A$ के चिन्ह बताइए।

(b) बिंदु Q और P : A और B के बीच एक छोटे से ऋण आवेश की स्थितिज ऊर्जा के अंतर का चिन्ह बताइए।

(c) Q से P तक एक छोटे धनावेश को ले जाने में क्षेत्र द्वारा

किए गए कार्य का चिन्ह बताइए।

(d) B से A तक एक छोटे से ऋण आवेश को ले जाने के लिए बाह्य साधन द्वारा किए गए कार्य का चिन्ह बताइए।

(e) B से A तक जाने में क्या एक छोटे से ऋणावेश की गतिज ऊर्जा बढ़ेगी या घटेगी?

हल–(a) चूंकि $V \propto \frac{1}{r}$ अतः $|V_P| > |V_Q|$ तथा $|V_A| > |V_B|$

परंतु बिन्दु P एवं Q पर विभव धनात्मक आवेश के कारण हैं अतः ये धनात्मक ही हैं अतः $V_P > V_Q$ तथा बिन्दु A एवं B पर विभव ऋणात्मक आवेश के कारण है अतः ये ऋणात्मक हैं अर्थात् बिन्दु A पर विभव पर ऋणात्मक मान, बिन्दु B के ऋणात्मक विभव के मान से अधिक है अर्थात् $V_B > V_A$

(b) चूंकि धनावेश एवं ऋणावेश निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{Kq_1q_2}{r_{12}}$$

अतः r_{12} के अधिक होने पर स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक मान कम होगा अर्थात् स्थितिज ऊर्जा उच्च होगी अतः $U_Q - U_P$ = धनात्मक इसी प्रकार ऋणावेश–ऋणावेश निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}}$$

अतः r_{12} के कम होने पर स्थितिज ऊर्जा उच्च होगी

अतः $U_A - U_B$ = धनात्मक

(c) किसी धनावेश को Q से P तक ले जाने में विद्युत क्षेत्र के विरुद्ध बाह्य कार्य करना पड़ता है अतः बाह्य कार्य धनात्मक होगा जबकि विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होगा।

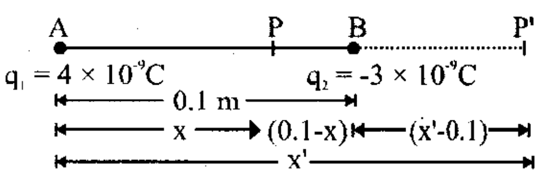
(d) किसी ऋणावेश को B से A तक ले जाने में विद्युत क्षेत्र के विरुद्ध बाह्य कार्य करना पड़ेगा अतः बाह्य कार्य धनात्मक होगा।

(e) B से A तक जाने में ऋणावेश पर प्रतिकर्षण बल का परिमाण बढ़ेगा फलतः आवेश की गतिज ऊर्जा में कमी आयेगी।

उदा.6. दो आवेशों 4×10^{-9} C तथा -3×10^{-9} C के मध्य दूरी 0.1 m है। दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के किस बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होगा? अनन्त पर विभव शून्य लीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.4

हल–



चित्र 3.9

चित्रानुसार q_1 व q_2 विपरीत प्रकृति के हैं तथा q_1 का परिमाण q_2 से अधिक है। अतः q_1 के बांयी ओर कोई ऐसा बिन्दु नहीं होगा, जहाँ q_1 व q_2 के विभव परस्पर निरस्त हो जायें, अर्थात् कुल विद्युत विभव शून्य हो। अतः ऐसे बिन्दु q_1 व q_2 को मिलाने वाली रेखा पर q_1 व q_2 के मध्य कहीं तथा q_2 के दांयी ओर होंगे, जिन्हें चित्र में P व P' द्वारा व्यक्त किया गया है।

स्थिति–I : बिन्दु P के लिए

$$\frac{Kq_1}{x} + \frac{Kq_2}{(0.1-x)} = 0$$

$$\frac{K \times 4 \times 10^{-9}}{x} + \frac{-K \times 3 \times 10^{-9}}{(0.1-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K \times 4 \times 10^{-9}}{x} = \frac{K \times 3 \times 10^{-9}}{0.1-x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{x} = \frac{3}{0.1-x}$$

$$\Rightarrow \quad 0.4 - 4x = 3x$$

$$\Rightarrow \quad 7x = 0.4$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{0.4}{7} = 0.057 \text{ m.}$$

स्थिति– II : बिन्दु P' के लिए

$$\frac{Kq_1}{x'} + \frac{Kq_2}{(x'-0.1)} = 0$$

$$\frac{K \times 4 \times 10^{-9}}{x'} + \frac{-K \times 3 \times 10^{-9}}{(x'-0.1)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K \times 4 \times 10^{-9}}{x'} = \frac{K \times 3 \times 10^{-9}}{x'-0.1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{x'} = \frac{3}{x'-0.1}$$

$$\Rightarrow \quad 4x' - 0.4 = 3x'$$

$$\Rightarrow \quad x' = 0.4 \text{ m.}$$

अतः धनात्मक आवेश से 0.057 m. एवं 0.4 m. दूर (ऋणात्मक आवेश की ओर) विद्युत विभव का मान शून्य होगा।

उदा.7. एक वृत्त की परिधि पर $+q$, $-3q$ और $-5q$ मान के तीन आवेश इस प्रकार रखे गये हैं कि वे तीनों एक समबाहु त्रिभुज के कोनों पर पडते हैं यदि वृत्त की त्रिज्या R हो तो इसके केन्द्र पर विद्युत विभव का मान ज्ञात कीजिए।

हल–वृत्त के केन्द्र पर परिणामी विद्युत विभव

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

जहाँ $V_1 = +q$ आवेश के कारण विभव

$V_2 = -3q$ आवेश के कारण विभव

$V_3 = -5q$ आवेश के कारण विभव

∵ केन्द्र से प्रत्येक आवेश की दूरी R होगी अतः

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R} - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3q}{R} - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{5q}{R}$$

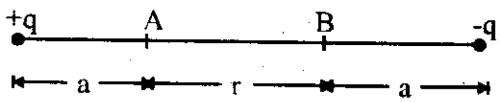
$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R}[1 - 3 - 5]q$$

या $$V = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{7q}{R}$$

या $$V = -(9 \times 10^9) \frac{7q}{R}$$

उदा.8. दो आवेश +q तथा –q चित्रानुसार व्यवस्थित है। A तथा B बिन्दुओं पर विभव क्रमशः V_A तथा V_B है, तब $V_A - V_B$ ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.5



चित्र 3.10

हल— +q आवेश के कारण बिन्दु A पर विभव = $\frac{Kq}{a}$

–q आवेश के कारण बिन्दु A पर विभव = $\frac{-Kq}{a+r}$

∴ बिन्दु A पर कुल विभव

$$V_A = \frac{Kq}{a} - \frac{Kq}{a+r} \qquad ...(1)$$

इसी प्रकार

+q आवेश के कारण बिन्दु B पर विभव

$$= \frac{Kq}{a+r}$$

–q आवेश के कारण बिन्दु B पर विभव

$$= \frac{-Kq}{a}$$

∴ बिन्दु B पर कुल विभव

$$V_B = \frac{Kq}{a+r} - \frac{Kq}{a} \qquad ...(2)$$

∴ विभवांतर $V_A - V_B = \left[\frac{Kq}{a} - \frac{Kq}{a+r}\right] - \left[\frac{Kq}{a+r} - \frac{Kq}{a}\right]$

$$= 2Kq\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+r}\right]$$

$$= 2Kq\left[\frac{a+r-a}{a(a+r)}\right]$$

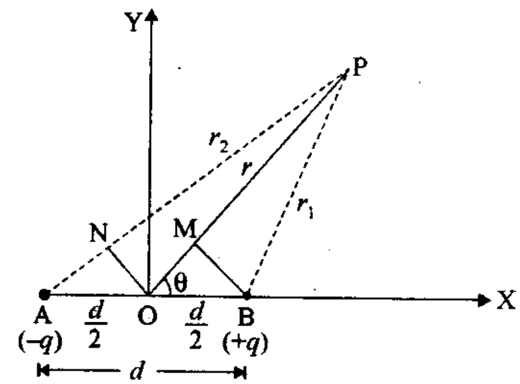
$$= \frac{2Kqr}{a(a+r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qr}{a(a+r)}$$

3.4 विद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत विभव (Electric Potential due to an electric dipole)

चित्र में दर्शायेनुसार माना कि X – Y तल में एक विद्युत द्विध्रुव X -अक्ष के अनुदिश स्थित है। द्विधव का केन्द्र बिन्दु O है। A व B बिन्दु पर क्रमशः $-q$ तथा $+q$ आवेश तथा A से B की दूरी d है, अतः

$$OB = OA = \frac{d}{2}$$

द्विध्रुव के केन्द्र O से r दूरी पर स्थित बिन्दु P पर द्विध्रुव के कारण उत्पन्न विद्युत विभव का मान ज्ञात करना है। रेखा OP, X-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है। माना किसी द्विध्रुव के आवेशों $+q$ तथा $-q$ से P की दूरियाँ क्रमशः $BP = r_1$ तथा $AP = r_2$ हैं, अतः



चित्र 3.11

$+q$ आवेश के कारण P बिन्दु पर विभव

$$V_1 = \frac{Kq}{r_1} \qquad .....(1$$

$-q$ आवेश के कारण P बिन्दु पर विभव

$$V_2 = -\frac{Kq}{r_2} \qquad .....(2$$

अतः P पर कुल विभव V

$$V = V_1 + V_2$$

$$= \frac{Kq}{r_1} - \frac{Kq}{r_2} = Kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) \qquad .....(3$$

r_1 तथा r_2 ज्ञात करने के लिए बिन्दु P को केन्द्र मान कर त्रिज्य r_1 तथा r का चाप क्रमशः BM तथा ON खीचतें है। यदि $r >> d$ तो इन्हें सरल रेखा मान सकते हैं एवं BM तथा ON त्रिज्य रेखायें OP तथा AP पर लम्बवत् होती है।

चित्र की ज्यामिति से स्पष्ट है कि

$$r_1 = OP - OM$$
$$r_1 = r - OM$$

त्रिभुज OBM से $\cos\theta = \frac{OM}{OB}$

$\Rightarrow OM = OB\cos\theta = \frac{d}{2}\cos\theta$

$$\therefore \quad r_1 = r - \frac{d}{2}\cos\theta \qquad .....(4)$$

इस प्रकार $r_2 = AP = NP + AN$

∵ त्रिभुज OAN से $\cos\theta = \frac{AN}{OA}$

$AN = OA\cos\theta = \frac{d}{2}\cos\theta$

$$\therefore \quad r_2 = r + \frac{d}{2}\cos\theta \qquad .....(5)$$

समी. (3) में समी. (4) व (5) से r_1 व r_2 के मान रखने पर

$$V = Kq\left(\frac{(r + \frac{d}{2}\cos\theta) - (r - \frac{d}{2}\cos\theta)}{(r - \frac{d}{2}\cos\theta)(r + \frac{d}{2}\cos\theta)}\right)$$

$$V = \frac{Kq[d\cos\theta]}{r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}$$

∵ $r >> d$ इसलिये $\frac{d^2}{4}\cos^2\theta$ को r^2 की तुलना में नगण्य

मानने पर

$$\therefore \quad V = \frac{Kq\, d\cos\theta}{r^2} = \frac{Kp\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad .....(6)$$

यहाँ $\vec{p} = q\vec{d}$ द्विध्रुव आघूर्ण है। समी. (6) से स्पष्ट है कि विद्युत द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

∵ $\vec{p}$ तथा $\vec{r}$ के मध्य कोण θ है।

अतः $\vec{p}\cdot\vec{r} = pr\cos\theta$

$$\therefore \quad V = \frac{K\, p\, r\cos\theta}{r^3} = \frac{K(\vec{p}.\vec{r})}{r^3} \quad ......(7)$$

समीकरण (7) से स्पष्ट है कि V का मान θ पर निर्भर करता है। θ के विभिन्न मानों के लिए V का मान निम्न प्रकार होगा :

(i) यदि θ = 0° तो cos 0° = 1 (बिन्दु P अक्षीय रेखा पर A से B की ओर) इस समय बिन्दु P अक्षीय रेखा पर होगा।

तथा $$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad .....(8)$$

(ii) यदि θ = π तो cos π = –1 (बिन्दु P अक्षीय रेखा पर B से A की ओर)

तथा $$V = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad .....(9)$$

(iii) θ = 90° (निरक्षीय रेखा पर) cos 90° = 0

इस समय P बिन्दु निरक्षीय रेखा पर होगा।

$$V = 0 \quad .....(10)$$

अर्थात द्विध्रुव के निरक्ष रेखा पर विभव का मान शून्य होगा। इस रेखा पर किन्हीं भी दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर शून्य होता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. विद्युत द्विध्रुव के कारण द्विध्रुव के निरक्ष पर विद्युत विभव का मान शून्य होता है, जबकि विद्युत द्विध्रुव का मान शून्य नहीं होता है।
2. ∵ एकल आवेश q के कारण उत्पन्न विभव

$$V = \frac{Kq}{r}$$

यदि द्विध्रुव के आवेशों के बीच की दूरी d हो, तो द्विध्रुव के कारण उत्पन्न विभव

$$V' = \frac{Kqd\cos\theta}{r^2} = \left(\frac{d\cos\theta}{r}\right)V$$

इस प्रकार समान परिस्थितियों में विद्युत द्विध्रुव द्वारा उत्पन्न विभव, एकल आवेश के कारण उत्पन्न विद्युत विभव का $\frac{d}{r}\cos\theta$ गुना होता है।

3. लघु विद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत विभव दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है, अर्थात्

$$V \propto \frac{1}{r^2}$$

4. किसी विद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत विभव केवल दूरी पर ही निर्भर नहीं करता, बल्कि स्थिति सदिश $\vec{r}$ तथा द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{p}$ के मध्य कोण θ पर भी निर्भर करता है।

उदा.9. दो बिन्दु आवेश क्रमशः 8×10^{-19} C तथा -8×10^{-19} C परस्पर 2×10^{-10} m. दूरी पर स्थित है। इस द्विध्रुव से 4×10^{-6} m दूरी पर स्थित बिन्दु पर विभव ज्ञात कीजिए। जब बिन्दु (अ) द्विध्रुव अक्ष पर हो, (ब) द्विध्रुव निरक्ष पर हो तथा (स) द्विध्रुव आघूर्ण से 60° पर स्थित हो। पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.6

हल– दिया गया है–

$q = 8 \times 10^{-19}$ C,
$d = 2 \times 10^{-10}$ m
$r = 4 \times 10^{-6}$ m.

∵ $p = qd = 8 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-10}$
$= 16 \times 10^{-29}$ कूलॉम × मीटर

(अ) $$V_{\text{अक्षीय}} = \frac{Kp}{r^2}$$

$$V_{\text{अक्षीय}} = \frac{9\times10^9\times16\times10^{-29}}{(4\times10^{-6})^2}$$

$V_{\text{अक्षीय}} = 9 \times 10^{-8}$ वोल्ट

(ब) $V_{\text{निरक्षीय}} = 0$

(स) $$V = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{9\times10^9\times16\times10^{-29}}{(4\times10^{-6})^2}\cos 60^\circ$$

$$= 9 \times 10^{-8} \times \frac{1}{2} = 4.5 \times 10^{-8} \text{ वोल्ट}$$

उदा.10. NaCl के Na^+ तथा Cl^- आयनों के मध्य दूरी 1Å है। द्विध्रुव का द्विध्रुव आघूर्ण ज्ञात करो। इसके केन्द्र से 4Å की दूरी पर अधिकतम एवं न्यूनतम विभव अथवा अक्षीय एवं निरक्षीय रेखाओं पर स्थित किसी बिन्दु पर विभव के मान ज्ञात करो।

हल– $$V = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$$

तथा $p = qd$

$p = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-10}$ कू.मी. $= 1.6 \times 10^{-29}$ कू.मी.

(i) अधिकतम विभव के लिए–

बिन्दु जब अक्षीय रेखा पर है

θ = 0°, cos 0° = 1

$$\therefore \quad V = \frac{Kp}{r^2}$$

$$= \frac{9\times10^9\times1.6\times10^{-29}}{(4\times10^{-10})^2} = 0.9 \text{ वोल्ट}$$

(ii) न्यूनतम विभव के लिए–

बिन्दु जब निरक्षीय रेखा पर है

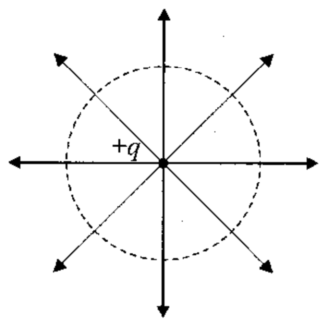
θ = 90° और cos 90° = 0

$$\therefore \quad V = \frac{Kp\times0}{r^2} = 0$$

निरक्षीय रेखा पर विभव शून्य होगा।

3.5 समविभव पृष्ठ (Equipotential Surfaces)

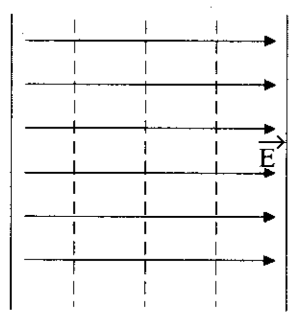
ऐसा पृष्ठ जिसके प्रत्येक बिन्दु पर विभव समान होता है समविभव पृष्ठ कहलाता है। समविभव पृष्ठ के किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर का मान शून्य होता है। अतः समविभव पृष्ठ के किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक किसी आवेश को ले जाने में किया गया कार्य शून्य के बराबर होता है। किन्तु किया गया कार्य तभी शून्य होता है जब आवेश को विद्युत क्षेत्र के लम्बवत् दिशा में ले जाया जाता है। अतः समविभव पृष्ठ विद्युत क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु पर लम्बवत् होता है।



चित्र 3.12

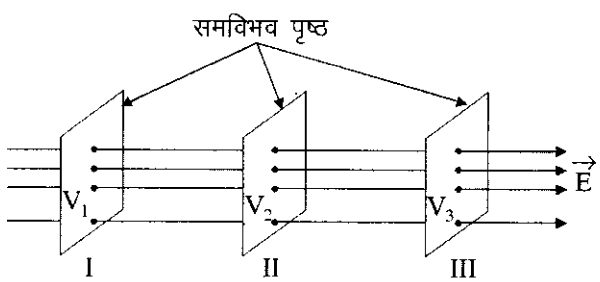
पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर बल रेखाएँ पृष्ठ के लम्बवत् होती है।

यदि किसी बिन्दु आवेश के कारण उसके क्षेत्र की बल रेखाएं खींची जाएं तो हम पाते हैं कि $+q$ को केन्द्र मान r त्रिज्या का एक गोला खींचने पर इस गोले की सतह का प्रत्येक बिन्दु $+q$ आवेश से बराबर दूरी r पर स्थित होता है। अतः इस पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु का विभव भी एक समान होता है अतः एक गोलीय पृष्ठ समविभव पृष्ठ होता है। विद्युत बल रेखाएँ आवेश $+q$ से आरंभ होती है तथा वे पृष्ठ के लम्बवत् एवं त्रिज्यीय होती है।



चित्र 3.13

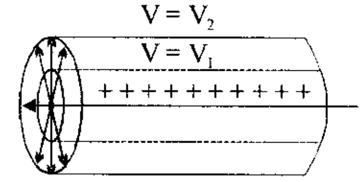
जब दो समान्तर प्लेटों के मध्य बैटरी संयोजित कर निश्चित विभवान्तर आरोपित किया जाता है तब प्लेटों के मध्य एक समान विद्युत क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है। इस विद्युत क्षेत्र में समविभव पृष्ठ प्लेटों के समान्तर समतल पृष्ठ होते हैं। [चित्र से]



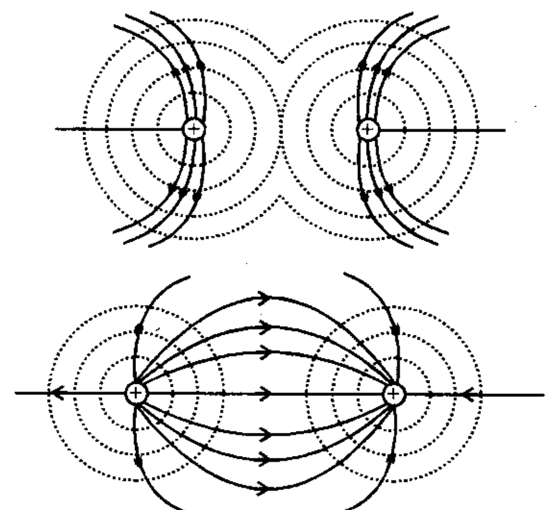
चित्र 3.14

$V_1 > V_2 > V_3$

रेखीय आवेश के लिए समविभव पृष्ठ बेलनाकार पृष्ठ होता है।



आवेशों के युग्म के लिए समविभव पृष्ठ



चित्र में बिन्दुकित गोलीय पृष्ठ समविभव पृष्ठ है।

चित्र 3.15

3.5.1. समविभव पृष्ठ के गुणधर्म (Properties of Equipotential surfaces)

(1) पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विभव एक समान होता है।

(2) इस पृष्ठ के किसी बिंदु से पृष्ठ के ऊपर स्थित अन्य बिन्दु तक इकाई धन आवेश को ले जाने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता

(3) विद्युत बल रेखाएँ पृष्ठ के लम्बवत् होती है।

(4) दो समविभव पृष्ठ एक दूसरे को कभी भी नहीं काटते हैं क्योंकि यदि काटेगें तो कटान बिन्दु पर विद्युत विभव के दो मान होंगे जो कि असंभव है।

(5) किसी चालक की सतह हमेशा समविभव पृष्ठ होती है क्यों कि सतह के सभी बिन्दु एक दूसरे से विद्युत संपर्क में होते हैं। अतः किसी चालक का सम्पूर्ण आयतन एक समान विभव पर होता है।

3.6 विद्युत क्षेत्र तथा विद्युत विभव में सम्बन्ध (Relation between field and potential)

माना q_0 परीक्षण आवेश एक सम विभव पृष्ठ से dr दूरी पर स्थित दूसरी सम विभव पृष्ठ पर विस्थापित होता है।

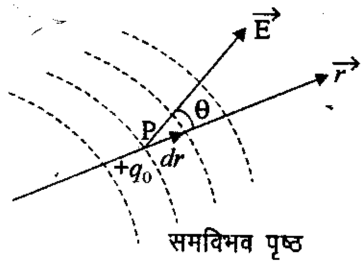
परीक्षण आवेश पर क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य

$$W = -q_0\, dV \qquad .....(1)$$

जहाँ dV = सम विभव पृष्ठों के मध्य विभवान्तर है। इसी कार्य को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं–

$$W = \vec{F}\cdot\vec{dr} = q_0\,\vec{E}\cdot\vec{dr}$$

$$= q_0 E\, dr \cos\theta \qquad .....(2)$$



चित्र 3.16

समीकरण (1) व (2) से

$$-q_0(dV) = q_0 E\, dr \cos\theta$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{dr}$$

यहाँ $E\cos\theta$, $\vec{E}$ का $\vec{r}$ की दिशा में घटक हैं।

$$\therefore \qquad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad .....(3)$$

यहाँ आंशिक अवकलन इस तथ्य का प्रतीक है कि समीकरण (3) में V का परिवर्तन उस दिशा में है जिसमें क्षेत्र $\vec{E}$ का घटक स्थित है। अतः

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\because \qquad \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$\therefore \qquad \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)V$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \qquad .....(4)$$

यहाँ $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$ डेल संकारक है।

इसप्रकार **विभव के साथ ऋणात्मक परिवर्तन की दर विद्युत क्षेत्र के बराबर होती है** अर्थात्

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \qquad .....(5)$$

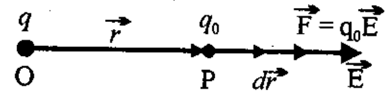
विभव प्रवणता (Potential gradient)

निर्वात अथवा वायु में बिन्दु O पर स्थित धन आवेश q के कारण r दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

विभव V, दूरी r का एक अदिश फलन है। दूरी r के सापेक्ष V के मान के परिवर्तित होने की अधिकतम दर को विभव प्रवणता कहते हैं। इसे $\frac{dV}{dr}$ से व्यक्त करते हैं। r के सापेक्ष V के परिवर्तित होने की अधिकतम दर निश्चित दिशा में होती है। अतः विभव प्रवणता एक सदिश राशि होती है।

माना कि बिन्दु O पर एक धन आवेश q स्थित है। O के सापेक्ष किसी बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। आवेश q के कारण, बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ है। बिन्दु P पर, एक परीक्षण आवेश q_0 रखा है।



चित्र 3.17

विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के कारण q_0 पर एक विद्युत बल $q_0\vec{E}$ आरोपित होता है। इस आवेश q_0 को अनन्त सूक्ष्म दूरी $\vec{dr}$ तक विस्थापित करने में विद्युत क्षेत्र बल द्वारा किया गया कार्य dW हो तो

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$= q_0\,\vec{E}\cdot\vec{dr}$$

$$= q_0 E\,dr \qquad [\because \vec{E} \text{ व } \vec{dr} \text{ के बीच कोण शून्य है}]$$

विद्युत क्षेत्र द्वारा किये गये कार्य के परिणामस्वरूप, परीक्षण आवेश q_0 की विद्युत स्थितिज ऊर्जा (U) में परिवर्तन

$$dU = -dW = -q_0 E\,dr \text{ [इस स्थिति में U घटती है]}$$

विद्युत विभव में होने वाला परिवर्तन

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\frac{q_0 E\,dr}{q_0} = -E\,dr$$

$$\therefore \qquad E = -\frac{dV}{dr}$$

सदिश रूप में

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$$

एकांक सदिश $\hat{r}$, सदिश $-\frac{dV}{dr}$ की दिशा को व्यक्त करता है जो सदैव घटते विभव के अनुदिश होती है अर्थात् **विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, उस बिन्दु पर विभव प्रवणता के ऋणात्मक मान के बराबर होती है।** अतः E का मात्रक $\frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$ भी होता है।

स्पष्ट है कि विद्युत क्षेत्र की दिशा में विभव घटता है अर्थात् विद्युत क्षेत्र की दिशा सदैव उच्च विभव से निम्न विभव की ओर होती है।

विभव प्रवणता को $\vec{\nabla}V$ के रूप में भी लिखा जाता है तब इसे **डेल** V (**del** V) पढ़ते हैं। यहाँ $\vec{\nabla}$ एक संकारक (Operator) है जिसका तात्पर्य

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \text{ से है।}$$

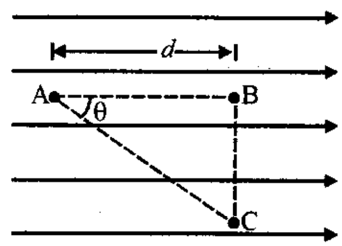
$\vec{E}$ को $\vec{\nabla}V$ के रूप में भी निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जाता है–

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right]$$

$\vec{\nabla}V$ एक सदिश राशि है। $\vec{E}$ की दिशा, $\vec{\nabla}V$ की दिशा के विपरीत होती है।

महत्वपूर्ण तथ्य

मान लीजिए A, B एवं C तीन बिन्दु एक समरूप विद्युत क्षेत्र में स्थित (चित्र) है



(i) A तथा B के बीच विभवान्तर $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$

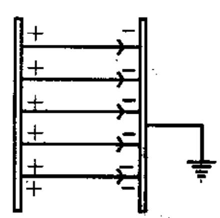
∵ विस्थापन सदिश विद्युत क्षेत्र की दिशा में है अत: $\theta = 0^0$

अत: $V_B - V_A = -\int_A^B Edr\cos 0°$

$$= -\int_A^B Edr = -Ed$$

सामान्य रूप में समरूप विद्युत क्षेत्र में $E = -\frac{V}{d}$

या $$|E| = \frac{V}{d}$$



(ii) A तथा C के बीच विभवान्तर

$$V_c - V_A = -\int_A^C Edr\cos\theta$$
$$= -E(AC)\cos\theta$$
$$= -E(AB)$$
$$= -Ed$$

उपरोक्त सम्बन्ध से पता चलता है कि A व B के बीच विभवान्तर एवं A व C के बीच विभवान्तर समान है अर्थात बिन्दु B व C समान विभव पर है।

उदा.11. किसी विद्युत क्षेत्र में विद्युत विभव निम्न सूत्र से दिया जाता है–

$$V = \frac{343}{r} \text{ वोल्ट}$$

स्थिति सदिश $\vec{r} = (3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})$ मीटर पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.7

हल– ∵ विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$

अब $$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{343}{r}\right) = -\frac{343}{r^2}$$

∴ $$\vec{E} = \frac{343}{r^2}\hat{r} = \frac{343}{r^3}r\hat{r}$$

$$= \frac{343}{r^3}\vec{r} \quad ...(1)$$

∵ $$\vec{r} = 3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$$

∴ $$r = \sqrt{(3)^2+(2)^2+(-6)^2}$$
$$= \sqrt{9+4+36}$$
$$= \sqrt{49} = 7$$

∴ $$r^3 = (7)^3 = 343$$

समी. (1) से

∴ $$\vec{E} = \frac{343}{343}(3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})$$

$$\vec{E} = (3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}) \text{ वोल्ट / मीटर}$$

उदा.12. एक अनन्त विस्तार की आवेश परत का तल आवेश घनत्व $10^{-7}\ C\ m^{-2}$ है। इसके क्षेत्र में दो समविभव पृष्ठ जिनके बीच 5.0 V का विभवान्तर हो, आपस में कितनी दूरी पर स्थित होंगे?

हल–आवेश परत के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, E का मान दूरी पर निर्भर नहीं करता अर्थात् E समान है।

यदि दो समविभव पृष्ठों जिनमें विभवान्तर ΔV है, के बीच दूरी Δx है, तो

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad \text{या} \quad \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

या $$\Delta x = \frac{2\varepsilon_0 \Delta V}{\sigma} = \frac{2\times(8.85\times10^{-12})\times 5}{10^{-7}}$$

$$= 88.5 \times 10^{-5} \text{ मी} = 0.885 \text{ मिमी}$$

उदा.13. विद्युत क्षेत्र में विद्युत विभव को

$$V(x, y, z) = 6x - 8xy - 8y + 6yz$$

से निरूपित किया जाता है, जहाँ V वोल्ट में तथा x, y, z मीटर में है। बिन्दु (1, 1, 1) मीटर पर विद्युत क्षेत्र का परिमाण ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.8

हल– ∵ $$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}(6x-8xy-8y+6yz)$$

$$E_x = -6 + 8y$$

(1, 1, 1) मीटर पर

$$E_x = -6 + 8 = 2 \text{ वोल्ट / मीटर}$$

इसी प्रकार $E_y = \frac{-\partial V}{\partial y}$

$$= \frac{-\partial}{\partial y}(6x - 8xy - 8y + 6yz)$$

$$E_y = 8x + 8 - 6z$$

(1, 1, 1) मीटर पर $E_y = 8 + 8 - 6 = 10$ वोल्ट/मीटर

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial}{\partial Z}(6x - 8xy - 8y + 6yz)$$

$$E_z = -6y$$

(1, 1, 1) मीटर पर

$E_z = -6$ वोल्ट / मीटर

∴ विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = (2\hat{i} + 10\hat{j} - 6\hat{k})$ वोल्ट / मीटर

विद्युत क्षेत्र का परिमाण

$$E = \sqrt{(2)^2 + (10)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 100 + 36}$$

$= \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$ वोल्ट / मीटर

3.7 विद्युत विभव का परिकलन (Calculation of Electric Potential)

3.7.1 आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत विभव (Electric Potential due to charged spherical shell)

माना कि त्रिज्या R के गोलीय कोश को आवेश q से आवेशित किया गया है। कोश के अंदर, पृष्ठ पर और बाहर स्थित बिन्दुओं पर उत्पन्न विद्युत विभव की गणना करनी है। इस गोलीय कोश के कारण दूरी r पर बाहर, पृष्ठ व अंदर स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (हवा या निर्वात में) क्रमश: निम्न होती है–

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r} \text{ जबकि } (r > R) \quad ..(1)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\hat{r} \text{ जबकि } (r = R) \quad ...(2)$$

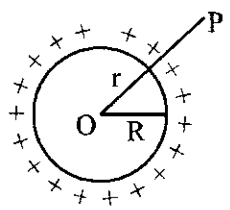
$$\vec{E} = 0 \ (r < R) \quad ...(3)$$

तथा व्यापक रूप से किसी बिन्दु पर विद्युत विभव

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{r} \quad ...(4)$$

द्वारा परिभाषित होता है।

(अ) गोलीय कोश के बाहर (r > R) स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव– आवेशित गोलीय कोश के बाहर स्थित बिन्दु पर विभव समी. (1) व (2) से–



चित्र 3.18

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}.\vec{dr}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} \quad \{\because \hat{r}\vec{dr} = dr\}$$

[∵ $\hat{r}$ व $d\vec{r}$ समान दिशा में है।]

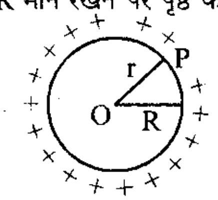
$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad ...(5)$$

स्पष्ट है, कि गोलीय कोश से बाहर के बिन्दुओं के लिए विद्युत विभव r^{-1} के समानुपाती होता है और अनन्त पर शून्य हो जाता है।

(ब) गोलीय कोश के पृष्ठ (r = R) पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव– समी. (5) में r = R मान रखने पर पृष्ठ के बिन्दुओं के लिए विद्युत विभव

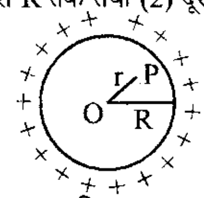


चित्र 3.19

$$V_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad ...(6)$$

(स) गोलीय कोश के अंदर (r < R) के बिन्दु पर विद्युत विभव– गोलीय कोश के अंदर के बिन्दु के लिए विद्युत विभव की गणना में अनन्त से दूरी r तक विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दूरी पर निर्भरता एक जैसी नहीं है। अत: समी. (4) को दो समाकलनों में विभक्त कर हल करते हैं–

(1) अनन्त से दूरी R तक तथा (2) दूरी R से अभीष्ट बिन्दु की दूरी r तक अर्थात्

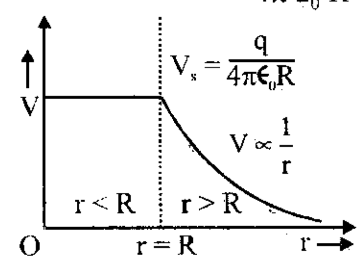


चित्र 3.20

$$V = \int_{\infty}^{R} \vec{E}.\vec{dr} - \int_{R}^{r} \vec{E}.\vec{dr}$$

प्रथम समाकलन का मान समी. (6) से प्राप्त किया जाता है तथा द्वितीय समाकलन का मान शून्य होता है क्योंकि गोलीय कोश में R से r (दूरी r < R में) तक तीव्रता E शून्य होती है।

अत: $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ...(7)



चित्र 3.21

समी. (7) से स्पष्ट है, कि गोलीय कोश के आंतरिक बिन्दु पर विद्युत विभव का मान पृष्ठ पर स्थित बिन्दु के विद्युत विभव के मान के बराबर होता है। यह मान गोलीय कोश से उत्पन्न विभव का अधिकतम मान है। आवेशित गोलीय कोश द्वारा उत्पन्न विद्युत विभव का दूरी के साथ आलेख चित्र में दर्शाया गया है।

3.7.2 आवेशित चालक गोले के कारण विद्युत विभव (Electric Potential due to charged conducting sphere)

गोलीय चालक को आवेश देने पर आवेश इसके पृष्ठ पर ही रहता है। अत: इसके कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, गोलीय कोश के कारण उत्पन्न तीव्रता के समान होती है। अत: विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की भाँति, विद्युत विभव भी गोलीय कोश के समान होगा। इसके लिए गोलीय कोश में वर्णित परिकलन का प्रयोग किया जाता है।

3.7.3 आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत विभव (Electric Potential due to Charged Non-conducting sphere)

त्रिज्या R वाले समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (हवा या निर्वात् में) गोले से बाहर, पृष्ठ और अंदर स्थित बिन्दुओं पर क्रमश: निम्न होती है–

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (r > R) \qquad ...(1)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{r} \quad (r = R) \qquad ...(2)$$

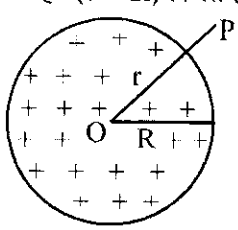
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r\hat{r} \quad (r < R) \qquad ...(3)$$

यहाँ गोले पर कुल आवेश q तथा इसके केन्द्र से अभीष्ट बिन्दु की दूरी r है। विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ में किसी बिन्दु पर विद्युत विभव

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.\vec{dr} \qquad ...(4)$$

अब उपरोक्त तीनों स्थितियों में विद्युत विभव का परिकलन करते हैं–

(अ) जब बिन्दु गोले से बाहर (r > R) स्थित है–



चित्र 3.22

गोले के केन्द्र से दूरी r(r> R) पर स्थित बाहरी बिन्दु पर विद्युत विभव--

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}d\vec{r}$$

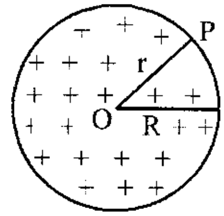
$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} \quad \{\because \hat{r}.d\vec{r} = dr\}$$

$\because$ $\hat{r}$ व $d\vec{r}$ समान दिशा में है।

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad ...(5)$$

(ब) जब बिन्दु गोलीय पृष्ठ (r = R) पर स्थित है–

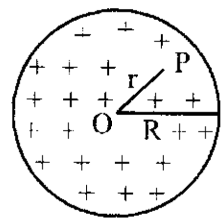


चित्र 3.23

समी. (5) में r = R का मान रखने पर पृष्ठ के बिन्दु के लिए विद्युत विभव

$$V_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad ...(6)$$

(स) जब बिन्दु गोले के अंदर (r < R) स्थित है–



चित्र 3.24

गोले के केन्द्र से दूरी r (r< R) पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{r}$$

यहाँ अनन्त से दूरी r तक, विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E, दूरी r के साथ एक समान रूप से निर्भर नहीं करती है अर्थात् अनन्त से गोले के पृष्ठ तक विद्युत क्षेत्र की तीव्रता r^2 के समानुपाती तथा सतह से गोले के केन्द्र तक r के समानुपाती निर्भर करती है। अत: समाकलन को दो भागों में विभक्त करने पर

$$V = -\int_{\infty}^{R}\vec{E}.d\vec{r} - \int_{R}^{r}\vec{E}.d\vec{r}$$

प्रथम समाकलन का मान समी. (6) से तथा दूसरे समाकलन में E का मान समी. (3) से रखने पर

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \int_{R}^{r}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}\hat{r}d\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\int_{R}^{r} r\,dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R}^{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right]$$

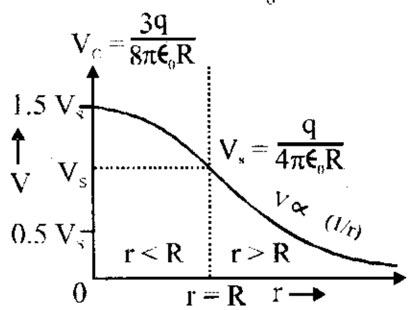
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{r^2}{2R^3} + \frac{1}{2R}\right]$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3R^2 - r^2}{2R^3}\right] \quad ...(7)$$

समी. (7) से स्पष्ट है, कि केन्द्र (r = 0) पर विद्युत विभव

$$V_c = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3}{2R}\right)$$

$$= 1.5\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad ...(8)$$



चित्र 3.25

अतः आवेशित गोलीय अचालक के केन्द्र पर पृष्ठ की तुलना में विद्युत विभव 1.5 गुना अधिक होता है। स्पष्ट है, कि आवेशित गोलीय अचालक में केन्द्र से सतह तक विभव r^2 की विशिष्ट निर्भरता से घटता है, तत्पश्चात् r^{-1} के नियम से कम होकर अनन्त पर शून्य हो जाता है। इसे चित्र में दर्शाया गया है।

उदा.14. 10 cm त्रिज्या के एक ठोस अचालक गोले को 3.2×10^{-19} C आवेश दिया जाता है। गोले के केन्द्र से (i) 14 cm (ii) 10 cm तथा (iii) 4 cm दूर स्थित बिन्दुओं पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिए।

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.9

हल–दिया गया है–

$$R = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$
$$q = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$$

(i) r = 14 cm = 0.14 m.

यह बिन्दु गोले के बाहर स्थित है–

$$\therefore \quad V_{out} = \frac{Kq}{r}$$

$$= \frac{9\times10^9 \times 3.2\times10^{-19}}{0.14}$$

$$= 2.057 \times 10^{-8} \text{ वोल्ट}$$

(ii) r = 10 cm = 0.10 m.

यह बिन्दु गोले की सतह पर स्थित है–

$$\therefore \quad V_{surface} = \frac{Kq}{R}$$

$$= \frac{9\times10^9 \times 3.2\times10^{-19}}{0.10}$$

$$= 2.88 \times 10^{-8} \text{ वोल्ट}$$

(iii) r = 4 cm = 0.04 m.

यह बिन्दु गोले के भीतर स्थित है–

$$\therefore \quad V_{in} = Kq\left(\frac{3R^2 - r^2}{2R^3}\right)$$

$$V_{in} = \frac{Kq}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$= \frac{9\times10^9 \times 3.2\times10^{-19}}{2\times0.10}\left[3 - \left(\frac{0.04}{0.10}\right)^2\right]$$

$$= 14.4 \times 10^{-9}\,(3 - 0.16)$$

$$= 4.09 \times 10^{-8} \text{ वोल्ट}$$

उदा.15. परमाणु क्रमांक Z = 50 तथा 9×10^{-15} मीटर त्रिज्या वाले नाभिक की सतह पर विद्युत विभव का मान ज्ञात कीजिए।

हल–दिया गया है– Z = 50, R = 9×10^{-15} मीटर

∵ परमाणु क्रमांक Z के नाभिक पर आवेश q = Ze होता है। अतः R त्रिज्या वाले नाभिक की सतह पर विभव

$$V = \frac{Kq}{R} = \frac{KZe}{R}$$

$$V = \frac{9\times10^9 \times 50\times1.6\times10^{-19}}{9\times10^{-15}}$$

$$= 8 \times 10^6 \text{ वोल्ट}$$

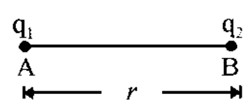
3.8 आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा (Potential energy of a system of charges)

दो या दो से अधिक विद्युत आवेशों के मध्य कार्यरत विद्युत बलों के विरुद्ध किसी बाह्य स्त्रोत द्वारा किया गया कार्य, उन आवेशों के निकाय में विद्युत स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। विद्युत आवेशों के किसी निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है–

बिन्दु आवेशों के किसी निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा उस कार्य के तुल्य होती है जो उन आवेशों को अनन्त दूरी (अर्थात् शून्य ऊर्जा की स्थिति) से उनकी स्थितियों तक लाकर आवेशों के उस निकाय का निर्माण करने में किया जाता है।

दो बिन्दु आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा जबकि बाह्य क्षेत्र अनुपस्थित है

माना कि q_1 तथा q_2 दो बिन्दु आवेश एक दूसरे से r दूरी पर स्थित है। आवेश q_1, बिन्दु A पर तथा आवेश q_2, बिन्दु B पर स्थित है। (चित्र)



चित्र 3.26

आवेशों के इस निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करने के लिए माना कि दोनों आवेश प्रारंभ में बिन्दु A तथा B पर न होकर अनन्त पर स्थित है। तब आवेश q_1 को अनन्त से बिन्दु A तक लाने में किया गया कार्य शून्य होता है। जब आवेश q_1 पर कोई विद्युत बल कार्यरत नहीं हैं, तब बिन्दु A पर स्थित बिन्दु आवेश q_1 के कारण बिन्दु B पर विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

अब विभव की परिभाषा के अनुसार, बिन्दु आवेश q_1 के विद्युत क्षेत्र

में एकांक धनावेश को अनन्त से बिन्दु B तक लाने में किया गया कार्य V होता है। अतः बिन्दु आवेश q_1 की उपस्थिति में आवेश q_2 को अनन्त से बिन्दु B तक लाने में किया गया कार्य

$$W = q_2 V = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

यह कार्य ही बिन्दु आवेशों q_1 व q_2 के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा है।

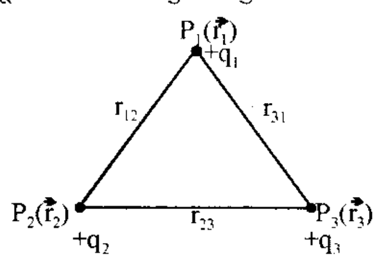
अतः निर्वात में r दूरी पर स्थित दो बिन्दु आवेशों q_1 तथा q_2 के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

उपरोक्त सूत्र में q_1 व q_2 के मान चिन्ह सहित रखते हैं। सजातीय आवेशों को एक दूसरे के समीप लाने में, उनके मध्य प्रतिकर्षण बल के विरुद्ध बाह्य स्त्रोत को कार्य करना पड़ता है जिससे निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है। आवेशों को एक दूसरे से दूर ले जाने में निकाय (प्रतिकर्षण बल) स्वयं कार्य करता है। जिससे निकाय की स्थितिज ऊर्जा घटती है। जबकि विजातीय आवेशों को एक दूसरे के समीप लाने में निकाय की स्थितिज ऊर्जा घटती है तथा दूर ले जाने में स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है।

3.8.1 दो से अधिक बिन्दु आवेश के निकाय की स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा (Electrostatic Potential Energy of a system of more than two point charges)

निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करने के लिए इन आवेशों में से दो–दो आवेशों से बने सभी संभव युग्मों की विद्युत स्थितिज ऊर्जाओं को बीजगणितीय विधि से (अर्थात् चिन्ह सहित) जोड़ देते है। यह योग ही सम्पूर्ण निकाय की कुल विद्युत स्थितिज ऊर्जा होती है।



चित्र 3.27

माना कि चित्र की भाँति q_1, q_2, q_3 आवेश क्रमशः बिन्दु P_1, P_2 तथा P_3 पर स्थित है तब सम्पूर्ण निकाय की स्थितिज ऊर्जा निम्न प्रकार ज्ञात की जा सकती है–

प्रथम आवेश q_1 को $P_1(\vec{r_1})$ तक लाने में किया गया कार्य शून्य होगा क्योंकि क्षेत्र में कोई अन्य आवेश नहीं है अर्थात्

$$W_1 = 0 \quad ....(1)$$

जब q_2 आवेश को क्षेत्र के $P_2(\vec{r_2})$ पर q_1 से r_{12} दूरी पर लाते हैं तो किया गया कार्य

$$W_2 = (q_1 \text{ के कारण विभव}) \times q_2$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}(q_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad ...(2)$$

इसी प्रकार q_3 आवेश को अनन्त से क्षेत्र के $P_3(\vec{r_3})$ बिन्दु पर लाने में किया गया कार्य

$$W_3 = (q_1 \text{ व } q_2 \text{ के कारण विभव}) \times q_3$$

$$W_3 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right) \times q_3$$

$$\Rightarrow \quad W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \quad ...(3)$$

∴ इन सभी आवेशों के निकाय की कुल विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = W_1 + W_2 + W_3$$

समी. (1), (2) व (3) से

$$U = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \quad ...(4)$$

आवेशों के निकाय को बनाने में आवश्यक ऊर्जा, उन आवेशों की केवल अन्तिम स्थितियों पर निर्भर करती है।

समी. (4) द्वारा व्यक्त व्यंजक आवेशों के विन्यास के क्रम पर निर्भर नहीं करता है। स्थितिज ऊर्जा आवेशों के विन्यास की वर्तमान अवस्था का अभिलाक्षणिक गुण होता है तथा यह विन्यास के क्रम पर निर्भर नहीं करता है।

N आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा जबकि बाह्य क्षेत्र अनुपस्थित है–माना किसी क्षेत्र में N बिन्दुवत् आवेश स्थित है। इन बिन्दु आवेशों की कुल स्थितिज ऊर्जा, अनन्त से आवेशों को क्षेत्र तक लाने में किये गये कुल कार्य के बराबर होगी।

प्रथम आवेश q_1 को $P_1(\vec{r_1})$ तक लाने में किया गया कार्य शून्य होगा क्यों कि क्षेत्र में कोई अन्य आवेश नहीं है। अर्थात्

$$W_1 = 0 \quad .....(1)$$

जब q_2 आवेश को क्षेत्र के $P_2(\vec{r_2})$ पर q_1 से r_2 दूरी पर लाते है तो किया गया कार्य

$$W_2 = (q_1 \text{ के कारण विभव}) \times q_2$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}(q_2) \quad ......(2)$$

इसी प्रकार q_3 आवेश को अनन्त से क्षेत्र के $P_3(\vec{r_3})$ बिन्दु पर लाने में किया गया कार्य

$$\therefore \quad W_3 = (q_1 \text{ व } q_2 \text{ के कारण विभव}) \times q_3$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) \times q_3 \quad .....(3)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

इसी प्रकार q_4 आवेश को अनन्त से $P_4(\vec{r_4})$ पर लाने में किया गया कार्य

$$\therefore \quad W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right) \quad .....(4)$$

∴ इन सभी आवेशों के निकाय की कुल स्थितिज अथवा विभव ऊर्जा

$$U = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$= 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

$$+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_4}{r_{14}}+\frac{q_2q_4}{r_{24}}+\frac{q_3q_4}{r_{34}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_1q_4}{r_{14}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}+\frac{q_2q_4}{r_{24}}+\frac{q_3q_4}{r_{34}}\right)$$

अतः N आवेशों के निकाय के लिए विभव ऊर्जा

$$U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\text{all pairs}}\frac{q_iq_k}{r_{ik}} \qquad .....(5)$$

या

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N}\sum_{\substack{k=1\\i\neq k}}^{k=N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q_iq_k}{r_{ik}} \qquad .....(6)$$

पद $\frac{1}{2}$ इस तथ्य का प्रतीक है कि प्रत्येक दो आवेशों के समूह को दो बार काम में लिया गया है। लेकिन सूत्र में उस समूह का विभव ऊर्जा में योगदान एक बार लिया गया है। जैसे–$i=1, k=2$ तथा $i=2, k=1$ अतः $\frac{1}{2}$ पद आवश्यक है।

समीकरण (6) को पुनः लिखने पर

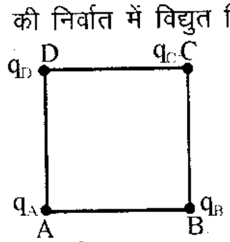
$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N}q_i\left(\sum_{\substack{k=1\\i\neq k}}^{k=N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q_k}{r_{ik}}\right)$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N}q_iV_i \qquad .....(7)$$

जहाँ $V_i=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{k=N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q_k}{r_{ik}}$

= r_i दूरी पर सभी आवेशों के कारण विभव समी. (7) विद्युत स्थितिज ऊर्जा व विभव के मध्य सम्बन्ध प्रदर्शित करती है।

उदाहरण–चित्र में प्रदर्शित वर्ग ABCD के कोनों पर स्थित बिन्दु आवेशों के निकाय की निर्वात में विद्युत स्थितिज ऊर्जा



चित्र 3.28

$$0=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_Aq_B}{AB}+\frac{q_Bq_C}{BC}+\frac{q_Cq_D}{CD}+\frac{q_Dq_A}{DA}+\frac{q_Aq_C}{AC}+\frac{q_Bq_D}{BD}\right]\text{जूल}$$

आवेशों के मान चिन्ह सहित रखने हैं।

नोट-बिन्दु आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होने के लिए–

(i) अधिक परिमाण वाले सजातीय आवेशों को परस्पर अधिकतम संभव दूरी पर रखना चाहिए।

(ii) अधिक परिमाण वाले विजातीय आवेशों को परस्पर न्यूनतम संभव दूरी पर रखना चाहिए।

विद्युत स्थितिज ऊर्जा का मात्रक– विद्युत स्थितिज ऊर्जा का S.I. मात्रक जूल (Joule) है।

अन्य मात्रक इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV) है।

$1\text{ eV}=1.6\times10^{-19}$ कूलॉम × वोल्ट
$=1.6\times10^{-19}$ जूल

1 मिली इलेक्ट्रॉन वोल्ट $=10^{-3}\text{ eV}$
$=1.6\times10^{-22}$ जूल

1 किलो इलेक्ट्रॉन वोल्ट $=1\text{ KeV}=10^{3}\text{ eV}$
$=1.6\times10^{-16}$ जूल

1 मेगा इलेक्ट्रॉन वोल्ट $=1\text{ MeV}=10^{6}\text{ eV}$
$=1.6\times10^{-13}$ जूल

1 गीगा इलेक्ट्रॉन वोल्ट $=1\text{ GeV}=10^{9}\text{ eV}$
$=1.6\times10^{-10}$ जूल

उदा.16. दो प्रोटॉन 6×10^{-15} m की दूरी पर स्थित है। प्रोटॉनों की अन्योन्य स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा का इलेक्ट्रॉन वोल्ट में मान ज्ञात कीजिए। पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.10

हल–दिया गया है– $r=6\times10^{-15}$ m.

∵ दो आवेशित कणों के निकाय की स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U=\frac{Kq_1q_2}{r}$$

$$U=\frac{9\times10^9\times1.6\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}}{6\times10^{-15}}$$

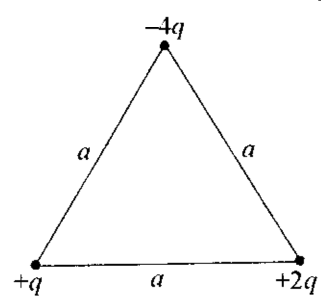
$U=3.84\times10^{-14}$ जूल

$$U=\frac{3.84\times10^{-14}}{1.6\times10^{-19}}\text{eV}$$

$U=2.4\times10^5\text{ eV}=0.24\times10^6\text{ eV}$

$U=0.24\text{ MeV}$

उदा.17. चित्र के अनुसार तीन आवेश व्यवस्थित किये गये हैं। उनकी पारस्परिक स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात करो। मान लो कि $q=1.0\times10^{-7}$ कूलॉम तथा $a=0.10$ मीटर। पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.11



चित्र 3.29

हल– कुल ऊर्जा

$U=U_{12}+U_{13}+U_{23}$

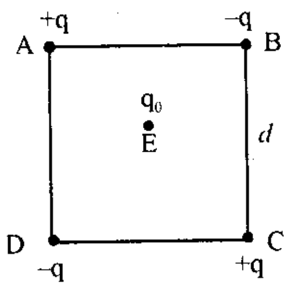
$$=(9.0\times10^9)\left[\frac{(+q)(-4q)}{a}+\frac{(+q)(+2q)}{a}+\frac{(-4q)(+2q)}{a}\right]$$

$= -9.0 \times 10^9 \times (-10q^2)/a$

$= -\frac{9.0 \times 10^9 \times 10 \times (1.0 \times 10^{-7})^2}{0.10} = -9.0 \times 10^{-3}$ जूल।

ऋणात्मक चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि इन आवेश को एक दूसरे से अलग कर अनन्त तक हटाने में 9×10^{-3} जूल कार्य करना पड़ेगा।

उदा.18. चित्र में दर्शाए अनुसार चार आवेश भुजा d वाले किसी वर्ग ABCD के शीर्षों पर व्यवस्थित किए गए हैं। (a) इस व्यवस्था को एक साथ बनाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। (b) कोई आवेश q_0 वर्ग के केंद्र E पर लाया जाता है तथा चारों आवेश अपने शीर्षों पर दृढ़ रहते हैं। ऐसा करने के लिए कितना अतिरिक्त कार्य करना पड़ता है? **पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.12**



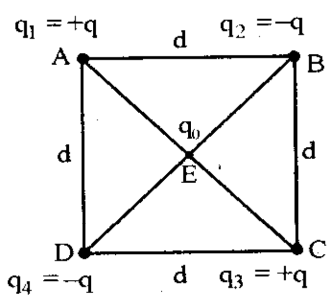
चित्र 3.30

हल– (a) माना आवेशों को चित्र में दिखाई व्यवस्था में क्रमशः A बिन्दु पर, B बिन्दु पर, C बिन्दु पर तथा D बिन्दु पर लाकर स्थापित किया जाता है।

चित्रानुसार दी गई व्यवस्था को एक साथ बनाने में किया गया कार्य

$$W = \frac{Kq_1q_2}{d} + \frac{Kq_1q_3}{\sqrt{2}d} + \frac{Kq_1q_4}{d} + \frac{Kq_2q_3}{d} + \frac{Kq_2q_4}{\sqrt{2}d} + \frac{Kq_3q_4}{d}$$

$$W = -\frac{Kq^2}{d} + \frac{Kq^2}{\sqrt{2}d} - \frac{Kq^2}{d} - \frac{Kq^2}{d} + \frac{Kq^2}{\sqrt{2}d} - \frac{Kq^2}{d}$$



चित्र 3.31

$$W = -\frac{4Kq^2}{d} + \frac{2Kq^2}{d\sqrt{2}} = -\frac{Kq^2}{d}(4-\sqrt{2})$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}(4-\sqrt{2})$$

(b) बिन्दु E पर वर्ग के कोनों पर स्थित चारों आवेशों के कारण कुल विद्युत विभव

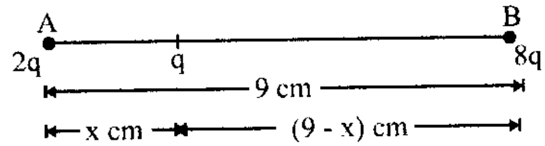
$$V = \frac{+Kq}{(AE)} + \frac{-Kq}{(BE)} + \frac{+Kq}{(CE)} + \frac{-Kq}{(DE)}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{Kq}{d/\sqrt{2}} - \frac{Kq}{d/\sqrt{2}} + \frac{Kq}{d/\sqrt{2}} - \frac{Kq}{d/\sqrt{2}} = 0$$

अतः बिन्दु E पर कुल विभव शून्य है अतः किसी भी आवेश को बिन्दु E तक लाने में कोई अतिरिक्त कार्य नहीं करना पड़ेगा।

उदा.19. तीन आवेश q, 2q तथा 8q को 9 cm लम्बी रेखा पर ले जाना है। इन आवेशों को कहाँ रखें, ताकि निकाय की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम हो सके? **पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.13**

हल–निकाय की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होने के लिए अधिक परिमाण के समान प्रकृति के आवेशों को परस्पर अधिकतम संभव दूरी पर रखा जाना चाहिए। अतः 2q व 8q आवेश परस्पर 9 cm दूर रखे जाने चाहिए।



चित्र 3.32

माना कि तीसरे आवेश q को 2q आवेश से x cm दूर रखा जाना चाहिए।

$$\therefore \quad U = \frac{K(2q)(q)}{x \times 10^{-2}} + \frac{K(8q)(q)}{(9-x)\times 10^{-2}} + \frac{K(8q)(2q)}{9 \times 10^{-2}}$$

$$U = \frac{Kq^2}{10^{-2}}\left(\frac{2}{x} + \frac{8}{9-x} + \frac{16}{9}\right) \quad ...(i)$$

स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होने के लिए

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

∴ समी. (1) से

$$\frac{dU}{dx} = \frac{Kq^2}{10^{-2}}\left[-\frac{2}{x^2} + \frac{8}{(9-x)^2} + 0\right] = ($$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{8}{(9-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(9-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 = (9-x)^2$$

$$9 - x = \pm 2x$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \text{ cm.}$$

या $\quad x = -9$ cm.

यहाँ x = −9 cm मान संभव नहीं है। अतः आवेश q को आवेश 2 व 8q के बीच आवेश 2q से 3cm दूर रखना होगा, जिससे कि निकाय क स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होगी।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

बाह्य क्षेत्र में स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा
(Electrostatic Potential energy in an external field)
एकल आवेश की स्थितिज ऊर्जा
(Potential energy of a single charge)

माना कि किसी बाह्य आवेश (अथवा आवेशों) द्वारा उत्पन्न बाह्य विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ है। यहाँ एकल आवेश की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करने में बाह्य आवेश (अथवा आवेशों) की स्थितिज ऊर्जा का कोई महत्व नहीं है। बाह्य आवेश (अथवा आवेशों) के कारण विभिन्न बिन्दुओं पर विभव का मान परिवर्तित हो सकता है।

अब हम किसी बिन्दु P पर विचार करते हैं जिसका मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}$ तथा विभव $V(\vec{r})$ है।

तब एकल आवेश q को अनन्त से बिन्दु P तक लाने में किया गया

$$\text{कार्य} = qV(\vec{r}) \qquad ...(1)$$

यहाँ $V(\vec{r})$, बिन्दु P पर बाह्य आवेश (अथवा आवेशों) के कारण विभव है।

समी. (1) द्वारा व्यक्त कार्य, आवेश q में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

$$\therefore \qquad U = qV(\vec{r}) \qquad ....(2)$$

किसी बाह्य क्षेत्र में दो आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा (Potential energy of a system of two charges in an external field)

माना कि किसी बाह्य क्षेत्र $\vec{E}$ में q_1 तथा q_2 दो आवेश क्रमशः बिन्दु A तथा B पर रखे गए है जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}$ तथा $\vec{r_2}$ है।

अब q_1 आवेश को अनन्त से बिन्दु A तक लाने में किया गया कार्य

$$W_1 = q_1V(\vec{r_1}) \qquad ....(1)$$

जब q_2 आवेश को अनन्त से बिन्दु B तक लाया जाता है तब किया गया कार्य W_2 = बाह्य क्षेत्र $\vec{E}$ के विरुद्ध किया गया कार्य + q_1 के कारण क्षेत्र के विरुद्ध किया गया कार्य

$$\Rightarrow \qquad W_2 = q_2V(\vec{r_2}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} \qquad ...(2)$$

जहाँ r_{12} = q_1 व q_2 आवेशों के मध्य दूरी

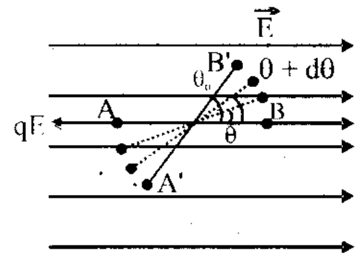
∴ दोनों आवेशों के निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा

$$U = W_1 + W_2$$

$$\Rightarrow \qquad U = q_1V(\vec{r_1}) + q_2V(\vec{r_2}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} \qquad ....(3)$$

3.9 विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव को घुमाने में किया गया कार्य (Work done in Rotating an Electric Dipole in Electric Field)

विद्युत द्विध्रुव को विद्युत क्षेत्र में रखने पर उसमें एक बल युग्म उत्पन्न होता है, जो इसे क्षेत्र की दिशा में संरेखित करने का प्रयत्न करता है। जिससे द्विध्रुव अन्ततः साम्यावस्था को प्राप्त कर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा में आ जाता है। इस प्रकार समविद्युत क्षेत्र में रखे द्विध्रुव को साम्यावस्था से घुमाने में कार्य करना पड़ता है।



चित्र 3.33

माना कि एक विद्युत द्विध्रुव, जिसका आघूर्ण $p = qd$ है, को समरूप विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ में इसकी साम्यावस्था AB में रखा गया है। अब विद्युत द्विध्रुव को कोण θ_0 घुमाकर नयी स्थिति A'B' में लाया जाता है।

माना किसी क्षण जब इसे घुमाया जा रहा है, विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{p}$ तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ के मध्य कोण θ है। इस समय द्विध्रुव पर लगने वाला आघूर्ण $\tau = pE\sin\theta$ होगा।

अब विद्युत द्विध्रुव को अल्प कोण $d\theta$ से घुमाने पर आघूर्ण $pE\sin\theta$ के विरूद्ध किया गया कार्य

dw = बल युग्म का आघूर्ण × कोणीय विस्थापन

$$dw = pE\sin\theta \times d\theta \qquad ...(1)$$

अतः द्विध्रुव को इसकी साम्यावस्था $\theta = 0°$ से नयी अवस्था $\theta = \theta_0$ तक घुमाने में किया गया कार्य

$$W = \int_{0}^{\theta_0} pE\sin\theta d\theta = pE[-\cos\theta]_{0°}^{\theta_0}$$

$$W = pE[1-\cos\theta_0] \qquad ...(2)$$

यदि $\theta_0 = \theta$ हो, तो $\qquad W = pE\,(1-\cos\theta) \qquad ...(3)$

स्थिति (i) : यदि द्विध्रुव को θ_1 से θ_2 कोण तक घुमाया जाता है, तब

$$W = pE\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad ...(4)$$

स्थिति (ii) : यदि $\theta_1 = 0°$ तथा $\theta_2 = 90°$ हो, तब

$$W = pE\,(\cos 0° - \cos 90°)$$
$$= pE$$

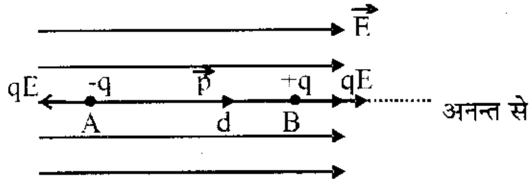
स्थिति (iii) : यदि $\theta_1 = 0°$ तथा $\theta_2 = 180°$ हो, तब

$$W = pE\,(\cos 0° - \cos 180°) = 2pE \qquad ..(5)$$

3.10 विद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy of an Electric Dipole in an Electric field)

विद्युत क्षेत्र में किसी विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा उस कार्य के बराबर होती है, जो विद्युत द्विध्रुव को अनन्त से इस क्षेत्र में लाने के लिये किया जाता है।

चित्र में एक विद्युत द्विध्रुव को अनन्त से समविद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ में इस प्रकार लाया जाता है, कि द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{p}$ सदैव तीव्रता $\vec{E}$ की दिशा में रहे। क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ के कारण द्विध्रुव के आवेश q पर एक बल $F = qE$ क्षेत्र की दिशा में तथा आवेश $-q$ पर उतना ही बल $F = qE$ विपरीत दिशा में लगता है।



चित्र 3.34

अत: द्विध्रुव को क्षेत्र की तीव्रता में लाने के लिए आवेश q पर बाह्य कार्य किया जाता है, जबकि आवेश –q पर स्वयं क्षेत्र कार्य करता है। अनन्त से क्षेत्र में आने में –q आवेश को +q आवेश की तुलना में दूरी d अधिक तय करनी होती है। इस कारण आवेश –q द्वारा किया गया कार्य अधिक तथा ऋणात्मक होता है। अत: क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य–

= आवेश (–q) पर बल × तय की गई अतिरिक्त दूरी

$= -qE \times d = -qdE = -pE \qquad \{\because p = qd\}$

अत: विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ के समान्तर रखे विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा

$$U_1 = -pE \qquad ...(1)$$

अब विद्युत द्विध्रुव को तीव्रता $\vec{E}$ के समान्तर रखी स्थिति से कोण θ घुमाने में किया गया अतिरिक्त कार्य

$$U_2 = pE(1 - \cos\theta) \qquad ...(2)$$

अत: विद्युत क्षेत्र से कोण θ पर स्थित विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा समी. (1) व (2) से

$$U = U_1 + U_2$$
$$U = -pE + pE(1 - \cos\theta)$$
$$= -pE\cos\theta$$
$$U = -\vec{p}.\vec{E} \text{ (सदिश रूप में)} \qquad ...(3)$$

समी. (3) विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा का समीकरण है, जिससे स्पष्ट होता है, कि

स्थिति (i) : यदि विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण की तीव्रता से 0° पर हो, तब स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE\cos\theta = -pE \text{ (न्यूनतम)}$$

अत: विद्युत द्विध्रुव विद्युत क्षेत्र में स्थायी संतुलन (Stable Equilibrium) में होता है।

स्थिति (ii) : यदि विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण क्षेत्र की तीव्रता के लम्बवत् हो (θ = 90°) तब स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE\cos 90^\circ = 0$$

स्थिति (iii) : यदि विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण क्षेत्र की तीव्रता से 180° पर हो, तब स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE\cos 180^\circ = pE \text{ (अधिकतम)}$$

अत: इस स्थिति में द्विध्रुव अस्थायी संतुलन (Unstable Equilibrium) में होता है।

उदा.20. एक विद्युत द्विध्रुव में $+1.0 \times 10^{-6}$ C तथा -1.0×10^{-6} C के दो बिन्दु आवेश एक दूसरे से 2 cm की दूरी पर स्थित है। यह विद्युत द्विध्रुव 1.0×10^5 V/m के समरूप विद्युत क्षेत्र में स्थित है। ज्ञात कीजिए–

(अ) द्विध्रुव पर विद्युत क्षेत्र द्वारा लगने वाला अतिरिक्त बलाघूर्ण

(ब) द्विध्रुव की स्थायी संतुलन की स्थिति में स्थितिज ऊर्जा

(स) द्विध्रुव की स्थायी संतुलन की स्थिति से 180° घुमाने पर स्थितिज ऊर्जा

(द) द्विध्रुव को विद्युत क्षेत्र की दिशा से 90° घुमाने में आवश्यव ऊर्जा

पाठ्यपुस्तक उदाहरण 3.14

हल– दिया गया है– $q = 10^{-6}$ C, d = 2 cm = 2×10^{-2} m

E = 10^5 V/m

∴ द्विध्रुव आघूर्ण $p = qd$

$p = 10^{-6} \times 2 \times 10^{-2}$

$= 2 \times 10^{-8}$ कूलॉम × मीटर

(अ) अधिकतम बलाघूर्ण $\tau = pE = 2 \times 10^{-8} \times 10^5$

$= 2 \times 10^{-3}$ न्यूटन × मीटर

(ब) स्थायी संतुलन में स्थितिज ऊर्जा

$U = -pE = -2 \times 10^{-8} \times 10^5$

$= -2 \times 10^{-3}$ जूल

(स) द्विध्रुव की स्थायी संतुलन की स्थिति से 180° घुमाने पर स्थिति ऊर्जा

$U = +pE = +2 \times 10^{-8} \times 10^5$

$= +2 \times 10^{-3}$ जूल

(द) द्विध्रुव को विद्युत क्षेत्र की दिशा से 90° घुमाने में आवश्यक ऊर्जा

$W = pE(1 - \cos\theta)$

$= 2 \times 10^{-8} \times 10^5 (1 - \cos 90^\circ)$

$= 2 \times 10^{-3}$ जूल

उदा.21. एक पदार्थ के अणु में 10^{-29} C-m का स्थायी विद्युत द्विध्रु आघूर्ण है। 10^6V m^{-1} परिमाण के एक शक्तिशाली स्थिरविद्यु क्षेत्र को लगाकर इस पदार्थ के एक मोल (निम्न ताप पर) व ध्रुवित किया गया है। अचानक क्षेत्र की दिशा 60° कोण से बद दी जाती है। क्षेत्र की नयी दिशा में द्विध्रुवों को पंक्तिबद्ध कर में उन्मुक्त ऊष्मा ऊर्जा का आंकलन कीजिए। सुविधा के लि नमूने का ध्रुवण 100% माना जा सकता है।

हल–प्रत्येक अणु का द्विध्रुव आघूर्ण = 10^{-29} कूलॉम–मी.

1 मोल पदार्थ के सभी अणुओं का कुल द्विध्रुव आघूर्ण

$$p = 6 \times 10^{23} \times 10^{-29} = 6 \times 10^{-6} \text{ कूलॉम–मी.}$$

सभी अणुओं की प्रारम्भिक स्थितिज ऊर्जा

$$U_i = -pE\cos\theta = -6 \times 10^{-6} \times 10^6 \times \cos 0^\circ$$
$$= -6 \text{ जूल}$$

क्षेत्र की दिशा 60° घुमाने पर अन्तिम स्थितिज ऊर्जा

$$U_f = -pE\cos 60^\circ = -6 \times 10^{-6} \times 10^6 \times \frac{1}{2} = -3 \text{ जू}$$

स्थितिज ऊर्जा में अंतर = $U_f - U_i = -3 - (-6) = 3$ जूल

यह अंतर ऊष्मा के रूप में उत्पन्न होता है।

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. विभव ऋणात्मक कब होता है?
2. कोई आवेश समविभव क्षेत्र में एक स्थान से दूसरे स्थान पर विस्थापित होता है, तो कितना कार्य करना होगा?
3. इलेक्ट्रॉन वोल्ट की परिभाषा लिखो एवं जूल मात्रक में उसका मान बताओ।
4. (क) क्या हम पृथ्वी का विद्युत विभव शून्य के स्थान पर 10C वोल्ट मान सकते हैं ? (ख) इससे विभव (ग) विभवान्तर के मापित मानों पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

5. किसी आवेश को विद्युत क्षेत्र में एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने का कार्य पथ पर निर्भर करेगा या नहीं, कारण सहित बताओ।
6. विद्युत द्वि–ध्रुव के कारण विभव का मान कहाँ पर शून्य होता है ?
7. एक कण जिस पर 10^{-5} कूलॉम धन आवेश है, तो अनन्त से विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु तक लाने में 5×10^{-5} जूल कार्य करना पड़ता है। उस बिन्दु पर विद्युत विभव का मान कितना है ?
8. विद्युत विभव का मात्रक क्या है?
9. एक इलेक्ट्रॉन को दो बिन्दुओं के बीच, जिनमें विभवान्तर 10 वोल्ट है, ले जाने में कितना कार्य (जूल में) करना पड़ेगा ?
10. एक आवेशित गोले की सतह पर 5 कूलॉम के आवेश 0.05 मीटर की दूरी तक विस्थापित किया जाता है। इसमें कितना कार्य करना पड़ेगा?
11. एक विद्युत –द्विध्रुव एक समान विद्युत –क्षेत्र में इस प्रकार स्थित है कि इसका आघूर्ण $\vec{p}$ विद्युत –क्षेत्र $\vec{E}$ की दिशा में संरेखित है। द्विध्रुव का सन्तुलन स्थायी है अथवा अस्थायी? यदि $\vec{p}$ व $\vec{E}$ परस्पर विपरीत दिशाओं में हों तब ?
12. क्या किसी बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य हो सकता है, जबकि वहाँ विद्युत –क्षेत्र शून्य नहीं हैं ?
13. विद्युत क्षेत्र में एक इलेक्ट्रॉन रखा है। स्पष्ट कीजिए कि वह उच्च विभव वाले क्षेत्र की ओर गति करेगा या कम विभव वाले क्षेत्र की ओर?
14. विद्युत क्षेत्र रेखाओं के अनुदिश विभव घटता है या बढ़ता है, क्यों?
15. किसी खोखले गोलाकार आवेशित चालक के भीतर तथा चालक की सतह पर विभव का मान कितना होता है?
16. अनन्त पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत विभव का मान कितना होता है?
17. विद्युत विभव का विमीय सूत्र लिखिए।
18. किसी वस्तु के विभव की माप पृथ्वी के विभव के कितने मान को मानकर की जाती है?
19. किसी धनावेशित अथवा ऋणावेशित चालक को भू सम्पर्कित करने पर चालक का परिणामी विभव कितना हो जाता है?
20. किसी बिन्दु आवेश q के कारण r दूरी पर विद्युत विभव का मान कितना होता है?
21. विद्युत द्विध्रुव के कारण अक्षीय रेखा पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत विभव का मान लिखिए।
22. विद्युत द्विध्रुव के कारण निरक्षीय रेखा पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत विभव का मान लिखिए।
23. समविभव पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा बताइये।
24. रेखीय आवेश के लिए समविभव पृष्ठ की आकृति बताइए।
25. विभव प्रवणता का ऋणात्मक मान किस भौतिक राशि के तुल्य होता है?
26. इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV) किस भौतिक राशि का मात्रक है?
27. 1eV के तुल्य ऊर्जा का जूल में मान लिखिए।
28. स्थायी सन्तुलन की अवस्था में द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा का मान कितना होता है?

उत्तरमाला

1. ऋण आवेश के कारण।
2. कोई कार्य नहीं करना पड़ता अर्थात् कार्य = 0
3. 1 वोल्ट विभवान्तर से त्वरित एक इलेक्ट्रॉन द्वारा प्राप्त ऊर्जा को एक इलेक्ट्रॉन वोल्ट कहते है। $1\ eV = 1.6\times10^{-19}$ जूल।
4. (क) हाँ, (ख) विभव के मान +100 वोल्ट अधिक प्राप्त होंगे, (ग) विभवान्तर अपरिवर्तित रहेगा।
5. विद्युत क्षेत्र संरक्षी होता है, अतः कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता।
6. निरक्षीय रेखा पर।
7. कार्य = आवेश × विभवान्तर

$5\times10^{-5} = 10^{-5}\times$ विद्युत विभवान्तर

विद्युत विभव = विभवान्तर = $\frac{5\times10^{-5}}{10^{-5}} = 5$ वोल्ट
8. वोल्ट।
9. 16×10^{-19} जूल।
10. शून्य।
11. स्थायी, अस्थायी।
12. हाँ, उदाहरण–(1) द्विध्रुव की निरक्षीय रेखा पर विभव शून्य होता है, यद्यपि विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं होता तथा (2) दो बराबर व विजातीय आवेशों को मिलाने वाली रेखा के मध्य–बिन्दु पर।
13. उच्च विभव वाले क्षेत्र की ओर।
14. घटता है।
15. दोनों पर एकसमान $\frac{KQ}{R}$ के बराबर, जहाँ R गोलाकार चालक की त्रिज्या है।
16. शून्य
17. $[ML^2T^{-3}A^{-1}]$
18. शून्य
19. शून्य
20. $V = \frac{kq}{r}$
21. $V = \frac{kp}{r^2}$
22. शून्य
23. समविभव पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र पृष्ठ के लम्बवत् होता है।
24. रेखीय आवेश के लिए समविभव पृष्ठ बेलनाकार पृष्ठ होता है।
25. विद्युत क्षेत्र की तीव्रता।
26. विद्युत स्थितिज ऊर्जा का।
27. $1eV = 1.6\times10^{-19}$ जूल
28. $U = -pE$

विविध उदाहरण

Basic Level

उदा.22. मिलिकन की तेल बूँद विधि के एक प्रयोग में Q आवेश की एक तेल बूँद को 2400 वोल्ट विभवान्तर से दोनों प्लेटों के बीच स्थिर रखा जाता है। इस बूँद की आधी त्रिज्या की एक अन्य बूँद को स्थिर रखने के लिए 600 वोल्ट विभवान्तर की आवश्यकता होती है। तब इस दूसरी बूँद पर आवेश ज्ञात कीजिए।

हल- सन्तुलन की स्थिति में $qE = mg$

$$\Rightarrow q\left(\frac{V}{d}\right) = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)g$$

$$\Rightarrow q \propto \frac{r^3}{V}$$

∵ द्रव्यमान = घनत्व × आयतन

$$m = \rho\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \times \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{q_2} = \left(\frac{r}{r/2}\right)^3 \times \frac{600}{2400} = 2$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{q}{2}$$

उदा॰23. एक बिन्दुवत् स्थिर आवेश के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में एक बिन्दु पर विभव 60 वोल्ट है तथा विद्युत क्षेत्र 20 न्यूटन/कूलॉम है। आवेश का मान तथा बिन्दु आवेश से दूरी ज्ञात कीजिये।

हल– विभव $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 60$ वोल्ट

विद्युत क्षेत्र $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 20$ न्यूटन/कूलॉम

$\frac{V}{E} = r = \frac{60}{20} = 3$ मीटर

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 60$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$$

$$q = 4\pi\varepsilon_0 \times 60 \times 3$$

$= \frac{180}{9\times10^9} = 2 \times 10^{-8}$ कूलॉम

उदा॰24. एक इलेक्ट्रॉन, एक बिन्दु जिस पर विभव 50 वोल्ट है, से विराम अवस्था में उस बिन्दु की ओर जाता है जिस पर विभव 70 वोल्ट है। अन्तिम बिन्दु पर उसकी गतिज ऊर्जा तथा वेग की गणना करो?

हल– बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर

$= 70 - 50 = 20$ वोल्ट

इलेक्ट्रॉन पर आवेश $q = -1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम

इन बिन्दुओं के मध्य विस्थापन में क्षेत्र के विरुद्ध किया गया कार्य

$W = -1.6 \times 10^{-19} \times 20$

$= -32 \times 10^{-19}$ जूल

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह का तात्पर्य है कि कार्य क्षेत्र के विरुद्ध किया जा रहा है। बल क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य गतिज ऊर्जा में वृद्धि के बराबर होगा।

$$= \frac{1}{2}mv^2 = E$$

जहाँ v अन्तिम बिन्दु पर वेग है। प्रारम्भिक बिन्दु पर कण विराम अवस्था में था।

$\therefore$ $E = 32 \times 10^{-19}$ जूल

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2\times32\times10^{-19}}{9\times10^{-31}}}$$

$= 2.67 \times 10^6$ मी./से.

उदा॰25. किसी क्षेत्र का विभव फलन $V = 3x^2 + 4xy - z$ है। यदि क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E} = -\,grad\,V$ हों तो बिन्दु (x, y, z) पर $\vec{E}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल–

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4xy - z) = 6x + 4y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4xy - z) = 4x$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 + 4xy - z) = -1$$

$$\vec{E} = -\,grad\;V = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right]$$

$$= -\left[(6x+4y)\hat{i} + 4x\,\hat{j} - \hat{k}\right]$$

उदा॰26. एक गोलाकार चालक की त्रिज्या 3 सेमी. है तथा उस प[र] 2×10^{-9} कूलॉम आवेश है। (i) गोले पर (ii) केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर तथा (iii) गोले के अन्दर विभव का मान ज्ञात कीजिये

हल– गोलाकार आवेशित चालक पर स्थित आवेश गोले के पृष्ठ पर तथ[ा] इसके बाहर स्थित बिन्दुओं के लिये इस प्रकार व्यवहार करता [है] जैसे सम्पूर्ण आवेश इसके केन्द्र पर स्थित हो। यदि गोले क[ी] त्रिज्या R है तो

(i) गोले पृष्ठ पर विभव $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$= 9\times10^9 \times \left(\frac{q}{R}\right)$$

$q = 2 \times 10^{-9}$ C

R = 3 सेमी. = 0.03 मी.

$\therefore$ $V = \frac{2\times10^{-9}\times9\times10^9}{0.03}$

= 600 वोल्ट

(ii) गोले के केन्द्र से 5 सेमी. दूरी पर

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{2\times10^{-9}\times9\times10^9}{0.05}$$

= 360 वोल्ट

(iii) चालक गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है अत: वि[भव] नियत होता है। गोले के अन्दर विभव उसके पृष्ठ पर विभव [के] तुल्य होता है।

$\therefore$ चालक गोले के अन्दर सभी बिन्दुओं पर विभव = 600 वो[ल्ट]

उदा॰27. मूल कणों के क्वार्क मॉडल में एक प्रोटॉन, दो "अप" क्वा[र्क] प्रत्येक का आवेश $+(2e/3)$ और एक "डाउन" क्वार्क, आवे[श] $(-e/3)$ का बना हुआ माना जाता है। मानाकि तीनों क्वार्क सम[ान] दूरियों (दूरी $= r$) पर स्थित हैं तब इस निकाय की वि[द्युत] स्थितिज ऊर्जा क्या होगी?

हल– $U = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{Kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{Kq_3q_1}{r_{13}}$

$$= \frac{K}{r}\left[\left(\frac{2e}{3}\right)\left(\frac{2e}{3}\right) + \left(\frac{2e}{3}\right)\left(-\frac{e}{3}\right) + \left(\frac{-e}{3}\right)\left(\frac{2e}{3}\right)\right] = 0$$

Advance Level

उदा॰28. किसी विद्युत क्षेत्र में विद्युत विभव $V = \frac{K}{r}$ द्वारा व्यक्त कि[या] जाता है तो विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए यदि सा[थ] $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ है।

हल– $\because$ यदि $V = V(x, y, z)$ है तो

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\; E_y = \frac{-\partial V}{\partial y} \text{ तथा } E_z = \frac{-\partial V}{\partial z}$$

तथा $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$

यहाँ $V = \frac{K}{r} = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = K(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right]$$

[$\because$ यदि $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{i}+z\hat{k}$ तो $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$]

$$E_x = +\frac{1}{2}\frac{K}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot 2x$$

$$E_x = +\frac{Kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = +\frac{Kx}{r^3}$$

इसी प्रकार $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = +\frac{Ky}{r^3}$

$$E_z = \frac{-\partial V}{\partial z} = \frac{+Kz}{r^3}$$

अतः $\vec{E} = \frac{-\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$

$$= \frac{K}{r^3}x\,\hat{i} + \frac{K}{r^3}y\,\hat{j} + \frac{K}{r^3}\hat{k}$$

$$= \frac{K}{r^3}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}) = \frac{K}{r^3}\vec{r}$$

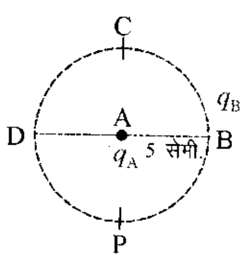
[$\because$ दिया है– $\vec{r} = 2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$

$\Rightarrow r = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore r^3 = (7)^3 = 343$]

$$\vec{E} = \frac{K}{343}\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$$

उदा.29. 5×10^{-9} कूलॉम परिमाण का एक बिन्दु आवेश q_A वायु में बिन्दु A पर रखा है। (चित्र से)। एक दूसरा बिन्दु आवेश q_B, बिन्दु B पर रखा है तथा $q_B = 4\times10^{-9}$ कूलॉम है। निम्न की गणना कीजिए। यदि AB = 5 सेमी. हो तो–



चित्र 3.35

(i) A पर रखे आवेश q_A के कारण B पर विभव

(ii) q_A के कारण D पर विभव

(iii) B से D तथा B से C तक q_B को ले जाने में किया गया कार्य

(iv) q_B को A के चारों ओर 5 सेमी. के त्रिज्या के वृत्त पर चार चक्कर घुमाने में किया गया कार्य

(v) q_B को A से 5 सेमी. से 4 सेमी. दूर स्थित बिन्दु पर ले जाने में किया गया कार्य

हल– $\because$ किसी आवेश q_A से r दूरी पर स्थित बिन्दु पर विभव

$$V = \frac{Kq_A}{r} = 9\times10^9\frac{q_A}{r} \text{ वोल्ट}$$

अतः (i) q_A के कारण B पर विभव [दिया है– $r_B = 5\times10^{-2}$ मी.

$q_A = 5\times10^{-9}$ कूलॉम]

$$V = 9\times10^9\frac{q_A}{r_B} = \frac{9\times10^9\times5\times10^{-9}}{5\times10^{-2}} = 900 \text{ वोल्ट}$$

(ii) q_A के कारण D पर विभव

$$V_D = 9\times10^9\frac{q_A}{r_D} = \frac{9\times10^9\times5\times10^{-9}}{5\times10^{-2}} = 900 \text{ वोल्ट}$$

(iii) $W_{B\to D} = q_B(V_D - V_B) =$ शून्य $\quad \because V_D = V_B = 900$ वोल्ट

$W_{B\to D} = q_B(V_C - V_B) =$ शून्य $\quad \because V_C = V_B = V_D$ q_A से समान दूरी पर है।

(iv) q_B को A के चारों ओर चार चक्कर लगाने में किया गया कार्य शून्य होगा क्योंकि q_A से वृत्ताकार पथ का प्रत्येक बिन्दु समान दूरी पर होगा। अतः वृत्ताकार पथ पर विभव समान होने के कारण विभवान्तर शून्य होगा। अतः $W = q\Delta V =$ शून्य

(v) q_B को 5 सेमी. से 4 सेमी. तक ले जाने में किया गया कार्य

$$W = q_B(V_2 - V_1)$$

$$= q_B\left[9\times10^9\frac{q_A}{r_2} - 9\times10^9\frac{q_A}{r_1}\right]$$

$$= q_Aq_B\times9\times10^9\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right]$$

$\because$ दिया है–

$q_B = 4\times10^{-9}$ कूलॉम,

$q_A = 5\times10^{-9}$ कूलॉम,

$r_1 = 5\times10^{-2}$ मीटर,

$r_2 = 4\times10^{-2}$ मीटर

अतः $W = 5\times10^{-9}\times4\times10^{-9}\times9\times10^9\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]\times\frac{1}{10^{-2}}$

$$= 4\times45\times10^{-9}\left[\frac{100}{4}-\frac{100}{5}\right]$$

$$= 180\times10^{-9}\times5$$

$$= 9\times10^{-7} \text{ जूल}$$

उदा.30. (i) अनन्त आवेश (प्रत्येक q कूलॉम) X- अक्ष पर $x = 1$ मीटर, $x = 2$ मीटर, $x = 8$ मीटर ...... पर रखे हैं। इनके कारण बिन्दु $x = 0$ पर विद्युत विभव तथा क्षेत्र ज्ञात कीजिये : (ii) यदि एकान्तर आवेश विपरीत चिन्ह के हों तो विभव तथा क्षेत्र क्या होंगे ?

हल– (i) निर्वात् (अथवा वायु) में स्थित एक बिन्दु-आवेश q कूलॉम के कारण r मीटर की दूरी पर विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \text{ वोल्ट।}$$

अतः जब सभी आवेश एक ही चिन्ह के हैं तब मूल-बिन्दु $x = 0$ पर

विभव $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{1}+\frac{q}{2}+\frac{q}{4}+\frac{q}{8}+\ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

[∵ गुणोत्तर श्रेणी में सर्वनिष्ठ अनुपात $\frac{1}{2}$ का है]

$$V = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \text{ वोल्ट} = (18 \times 10^9)\, q \text{ वोल्ट।}$$

सभी आवेशों के कारण $x = 0$ पर विद्युत्-क्षेत्र एक ही रेखा के अनुदिश है। अतः परिणामी क्षेत्र

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{1^2}+\frac{q}{2^2}+\frac{q}{4^2}+\frac{q}{8^2}+\ldots\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)\right\}} \text{ [सर्वनिष्ठ अनुपात } \tfrac{1}{4} \text{ है]}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4a}{3}\right) \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

$$= (12 \times 10^9)\, q \text{ न्यूटन/कूलॉम।}$$

(ii) यदि एकान्तर आवेश विपरीत चिन्ह के हैं, तब $x = 0$ पर विभव

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots\right]$$

[गुणोत्तर श्रेणी में सर्वनिष्ठ अनुपात $-\frac{1}{2}$ है।]

$$\therefore \quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{3}\right) \text{ वोल्ट} = (6 \times 10^9)\, q \text{ वोल्ट।}$$

$x = 0$ पर विद्युत-क्षेत्र

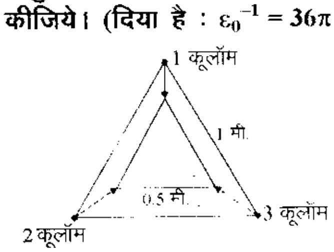
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}+\ldots\right]$$

इस श्रेणी में सर्वनिष्ठ अनुपात $= -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ है।

$$\therefore \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4q}{5}\right) = (7.2 \times 10^9)\, q \text{ न्यूटन/कूलॉम।}$$

उदा.31. तीन बिन्दु-आवेश जिनके मान क्रमशः 1 C, 2 C तथा 3 C हैं . मीटर भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के कोनों पर रखे गये है। इन आवेशों को संलग्न चित्रानुसार एक छोटे 0.5 मीटर भुजाओं के समबाहु त्रिभुज के कोनों पर लाने में किये गये आवश्यक कार्य की गणना कीजिये। (दिया है : $\varepsilon_0^{-1} = 36\pi \times 10^9$ V-*m*/A-*s*)



चित्र 3.36

हल– r_{12}, r_{23} व r_{13} भुजाओं वाले एक त्रिभुज के कोनों पर स्थित q_1, q_2 व q_3 आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}\right].$$

पहली दशा में, बड़े समबाहु त्रिभुज (भुजायें 1 मीटर) के कोनों पर स्थित आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1\times2}{1}+\frac{2\times3}{1}+\frac{1\times3}{1}\right] = \frac{11}{4\pi\varepsilon_0}.$$

जब आवेश छोटे समबाहु त्रिभुज (भुजायें 0.5 मीटर) के कोनों पर लाये जाते हैं, तब निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1\times2}{0.5}+\frac{2\times3}{0.5}+\frac{1\times3}{0.5}\right] = \frac{22}{4\pi\varepsilon_0}.$$

इस प्रक्रिया में किया गया कार्य निकाय की अतिरिक्त स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित रहता है, अर्थात्

$$W = U' - U = \frac{22}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{11}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{11}{4\pi\varepsilon_0}$$

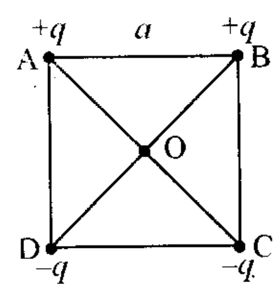
$$= \frac{11}{4\pi}\times(36\pi\times10^9) = 99\times10^9 \text{ जूल}$$

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न-उत्तर

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. किसी बिन्दु आवेश से नियत दूरी पर विद्युत क्षेत्र 50 V / m तथा विभव 300 V है यह दूरी है
(अ) 9 m (ब) 15 m
(स) 6 m (द) 3 m

2. एक वर्ग के कोनों पर आवेश चित्र की भाँति रखे हैं। माना इसके केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा विद्युत विभव V है। यदि A तथा B पर रखें आवेश C तथा D पर रखे आवेशों से परस्पर प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं तो–



चित्र 3.37

(अ) $\vec{E}$ अपरिवर्तित रहता है, V बदल जाता है।
(ब) $\vec{E}$ तथा V दोनों बदल जाते है।
(स) $\vec{E}$ तथा V दोनों अपरिवर्तित रहते है
(द) $\vec{E}$ बदल जाता है तथा V अपरिवर्तित रहता है।

3. एक विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर विभव का मान 200 V है तो एक इलेक्ट्रॉन को वहाँ ले जाने में कार्य करना पड़ेगा
(अ) -3.2×10^{-17} जूल (ब) 200 जूल
(स) −200 जूल (द) 100 जूल

4. r_1 तथा r_2 त्रिज्या के दो आवेशित चालक गोले समान विभव पर हैं तब उनके पृष्ठ आवेश घनत्वों का अनुपात होगा

(अ) $\frac{r_2}{r_1}$ (ब) $\frac{r_1}{r_2}$

(स) $\frac{r_2^2}{r_1^2}$ (द) $\frac{r_1^2}{r_2^2}$

5. $X-Y$ निर्देशांक के मूल बिन्दु पर 10 μC का आवेश स्थित है। बिन्दुओं $(a, 0)$ तथा $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ के मध्य विभवान्तर का मान volt में होगा

(अ) 9×10^4 (ब) शून्य

(स) $\frac{9\times10^4}{a}$ (द) $\frac{9\times10^4}{\sqrt{2}}$

6. 2 मीटर त्रिज्या के एक आवेशित खोखले गोलीय चालक के पृष्ठ पर 500 volt विद्युत विभव है। केन्द्र से 1.5 मीटर दूरी पर विद्युत विभव होगा–

(अ) 375 V (ब) 250 V

(स) शून्य (द) 500 V

7. एक α–कण को विरामावस्था में एक बिन्दु जहाँ विभव 70 V है से दूसरे बिन्दु जहाँ विभव 50 V है तक ले जाने पर उसकी गतिज ऊर्जा होगी–

(अ) 20 eV (ब) 40 eV

(स) 20 MeV (द) 40 MeV

8. एक ऐसे क्षेत्र में जहाँ विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E का मान शून्य है तो उस क्षेत्र में विभव के मान में दूरी के साथ परिवर्तन होगा

(अ) $V\propto\frac{1}{r}$ (ब) $V\propto\frac{1}{r^2}$

(स) V = शून्य (द) V = स्थिरांक

9. समान पृष्ठ आवेश घनत्व से आवेशित दो चालक गोलों की त्रिज्यायें R_1 व R_2 हैं यदि उनके केन्द्र पर विभव क्रमशः V_1 व V_2 हो तब V_1/V_2 होगा–

(अ) $\frac{r_1}{r_2}$ (ब) $\frac{r_2}{r_1}$

(स) $\frac{r_1^2}{r_2^2}$ (द) $\frac{r_2^2}{r_1^2}$

10. एक विद्युत क्षेत्र का विभव फलन $V=-5x+3y+\sqrt{15}z$ से परिभाषित हैं बिन्दु (x, y, z) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता SI मात्रक में होगी–

(अ) $3\sqrt{2}$ (ब) $4\sqrt{2}$

(स) $5\sqrt{2}$ (द) 7

11. एक एकांक आवेश को q आवेश से r दूरी पर उसके चारों ओर वृत्ताकार पथ पर घुमाया जाता हैं। तब किया गया कार्य होगा–

(अ) शून्य (ब) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$

(स) $2\pi r J$ (द) $2\pi rqJ$

12. एक इलेक्ट्रान को दूसरे इलेक्ट्रान की ओर ले जाने पर निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा–

(अ) बढ़ती है (ब) घटती है

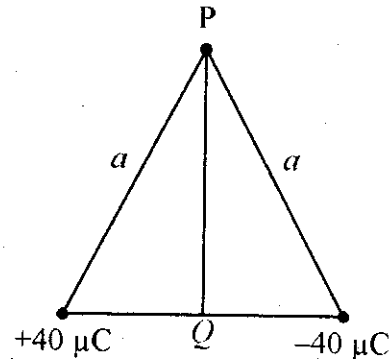
(स) उतना ही रहती है (द) शून्य हो जाती है

13. 1000 छोटी–छोटी पानी की बूँदें जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या r है और प्रत्येक पर आवेश q है मिलकर एक बड़ी बूँद बनानी है। बड़ी बूँद का विभव, छोटी बूँद के विभव से निम्न गुना अधिक होगा–

(अ) 1000 (ब) 100

(स) 10 (द) 1

14. चित्र के अनुसार व्यवस्थित आवेशों के कारण एक कूलॉम आवेश को P से Q तक ले जाने के लिये कार्य का मान जूल में होगा



चित्र 3.38

(अ) 10 (ब) 5

(स) अनन्त (द) शून्य

15. एक जैसी 64 पारे की गोलियाँ (प्रत्येक पर विभव 10 वोल्ट) मिलाकर एक बड़ी गोली बनाई जाये तब बड़ी गोली की सतह पर विभव होगा–

(अ) 80 वोल्ट (ब) 160 वोल्ट

(स) 640 वोल्ट (द) 320 वोल्ट

उत्तरमाला

1 (स)	2 (द)	3 (अ)	4 (अ)	5 [illegible]
6 (द)	7 (ब)	8 (द)	9 (अ)	10 [illegible]
11 (अ)	12 (अ)	13 (ब)	14 (द)	15 (ब)

हल एवं संकेत (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. (स) $\because$ E $= 50\ \frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$

V = 300 वोल्ट

$\therefore$ $E=\frac{V}{d}$

$\Rightarrow$ $d=\frac{V}{E}=\frac{300}{50}=6$ मी.

2. (द) विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ परिवर्तित हो जाता है, जबकि विद्युत विभव V अपरिवर्तित रहता है।

3. (अ) $W=-eV=-1.6\times10^{-19}\times200$

$=-3.2\times10^{-17}$ जूल

4. (अ) $\because\ \sigma_1=\frac{q_1}{4\pi r_1^2}$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi r_2^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} \quad ...(i)$$

$$\therefore \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1 V}{C_2 V} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

∴ समी. (i) से

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

5. (ब) किसी बिन्दु आवेश q से r दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव

$$V = \frac{Kq}{r}$$

बिन्दु (a, 0) पर विभव $V_1 = \frac{Kq}{r_1}$ वोल्ट

बिन्दु $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ पर विभव

$$V_2 = \frac{Kq}{r_2} \text{ वोल्ट}$$

$$\therefore \quad V_2 - V_1 = Kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\therefore \quad \vec{r}_1 = a\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = a$$

$$\vec{r}_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{a}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\therefore \quad V_2 - V_1 = Kq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right) = 0$$

6. (द) ∵ केन्द्र से 1.5 मीटर दूरी पर स्थित बिन्दु खोखले गोलीय चालक के भीतर होगा।

∴ खोखले गोलीय चालक के भीतर विद्युत विभव का मान चालक के पृष्ठ पर विभव के मान के बराबर होता है।

∴ V = 500 वोल्ट

7. (ब) $W = qV = 2eV = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times (70 - 50)$ जूल

$$\text{गतिज ऊर्जा} = \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 20}{1.6 \times 10^{-19}} = 40eV$$

8. (द) जिस क्षेत्र में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान शून्य होता है, वहाँ विभव के मान में दूरी के साथ परिवर्तन नहीं होगा अर्थात्

V = स्थिरांक

9. (अ) $\therefore \sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi r_1^2}$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi r_2^2}$$

$$\because \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} \quad ...(1)$$

$$\because \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1 V_1}{C_2 V_2} = \frac{r_1 V_1}{r_2 V_2}$$

∴ समी. (1) से $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_1 V_1}{r_2 V_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{V_1 r_2}{V_2 r_1}$

∵ $\sigma_1 = \sigma_2$ (प्रश्नानुसार)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

10. (द) ∵ $V = -5x + 3y + \sqrt{15}\,z$

$$E_x = \frac{-\partial V}{\partial x} = 5$$

$$E_y = \frac{-\partial V}{\partial y} = -3$$

$$E_z = \frac{-\partial V}{\partial z} = -\sqrt{15}$$

$$\therefore \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

$$E = \sqrt{(5)^2 + (-3)^2 + \left(-\sqrt{15}\right)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 9 + 15} = \sqrt{49} = 7$$

11. (अ) ∵ एकांक आवेश को आवेश q की विद्युत क्षेत्र रेखाओं वे लम्बवत् घुमाया जा रहा है, तब किया गया कार्य शून्य होगा।

12. (अ) एक इलेक्ट्रॉन को दूसरे इलेक्ट्रॉन की ओर ले जाने पर प्रतिकर्षण बल के कारण निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है।

13. (ब) माना कि बड़ी बूँद की त्रिज्या R है, तब 1000 छोटी बूँदों क आयतन = 1 बड़ी बूँद का आयतन

$$1000 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$R^3 = 1000 r^3$$

$$R = 10r$$

अब 1000 छोटी बूँदों का आवेश = 1 बड़ी बूँद का आवेश

$$\Rightarrow \quad 1000 C_i V_i = C_f V_f$$

$$\Rightarrow \quad 1000 \times 4\pi\epsilon_0 r V_i = 4\pi\epsilon_0 R V_f$$

$$\Rightarrow \quad 1000 \times r V_i = 10r V_f$$

$$\Rightarrow \quad V_f = 100 V_i$$

14. (द) P से Q तक रेखाखण्ड के प्रत्येक बिन्दु पर परिणामी विभव =(

∴ 1 कूलॉम आवेश को P से Q तक ले जाने में किया गया कार्य

W = 0

15. (ब) माना कि एक छोटी पारे की गोली की त्रिज्या r तथा एक बड़ी पा

की गोली की त्रिज्या R है, तब 64 छोटी पारे की गोलियों का आयतन = एक बड़ी पारे की गोली का आयतन

$$64\times\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$R^3 = 64r^3$$
$$R = 4r$$

अब 64 छोटी पारे की गोलियों का आवेश = 1 बड़ी पारे की गोली का आवेश

$\Rightarrow \quad 64C_iV_i = C_fV_f$

$\Rightarrow \quad 64\times 4\pi\epsilon_0 rV_i = 4\pi\epsilon_0 RV_f$

$\Rightarrow \quad 64\times rV_i = 4rV_f$

$\Rightarrow \quad V_f = 16V_i = 16\times 10 = 160$ वोल्ट

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. विद्युत विमव अदिश राशि है अथवा सदिश राशि, बताइये।

उत्तर– $\because$ विद्युत विभव $V = \frac{W}{q}$

विद्युत विभव अदिश राशि है।

प्र.2. विद्युत विमव की परिभाषा दीजिये।

उत्तर– विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर विभव एक परीक्षण आवेश q_0 को अनंत से उस बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य एवं परीक्षण आवेश की मात्रा की निष्पति के बराबर होता है।

प्र.3. क्या दो समविमव पृष्ठ परस्पर काट सकते हैं?

उत्तर– नहीं, दो समविभव पृष्ठ एक दूसरे को नहीं काटते हैं क्योंकि यदि दो समविभव पृष्ठ एक दूसरे को काटेंगे तो कटान बिन्दु पर विद्युत विभव के दो मान होंगे, जो कि असंभव है।

प्र.4. किसी आवेश के कारण अनन्त पर विमव कितना होता है?

उत्तर– किसी आवेश के कारण अनन्त पर विद्युत विभव का मान शून्य होता है।

प्र.5. क्या निर्वात में किसी बिन्दु पर विद्युत विमव शून्य हो सकता है, जबकि उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं है? उदाहरण दीजिये।

उत्तर– हाँ (i) दो समान परिमाण तथा विपरीत प्रकृति के आवेशों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होता है, जबकि विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं होता है।

(ii) विद्युत द्विध्रुव की निरक्षीय रेखा पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होता है, जबकि विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं होता है।

प्र.6. क्या किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य हो सकता हो सकता है, जबकि उसी बिन्दु पर विद्युत विमव शून्य न हो। उदाहरण दीजिये।

उत्तर– हाँ (i) दो समान परिमाण तथा समान प्रकृति के आवेशों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, जबकि विद्युत विभव शून्य नहीं होता है।

(ii) आवेशित गोलीय कोश या चालक गोले के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, जबकि विद्युत विभव शून्य नहीं होता है।

प्र.7. एक समविमव पृष्ठ पर परस्पर 10 cm दूर स्थित बिन्दुओं के मध्य 200 μC आवेश को ले जाने में कितना कार्य करना पड़ेगा?

उत्तर– $\because$ समविभव पृष्ठ पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विद्युत विभवांतर शून्य होता है।

$\therefore$ कार्य = आवेश × विभवांतर

$$W = 200\times 10^{-6}\times 0 = 0$$

अर्थात् कोई कार्य नहीं करना पड़ेगा।

प्र.8. निम्नलिखित के कारण समविमव पृष्ठों की आकृति क्या होती है

(अ) बिन्दु आवेश के कारण

(ब) एक समान विद्युत क्षेत्र के कारण

उत्तर– (अ) बिन्दु आवेश को केन्द्र मानकर खींचे गए संकेन्द्रीय गोले समविभव पृष्ठ होंगे।

(ब) विद्युत क्षेत्र रेखाओं के लम्बवत् परस्पर समान्तर समतल समविभव पृष्ठ होंगे।

प्र.9. जब कोई विद्युत द्विधुव किसी विद्युत क्षेत्र के समान्तर रखा जाता है तब इसकी विद्युत स्थितिज ऊर्जा क्या होगी?

उत्तर– $\because$ विद्युत द्विध्रुव की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = -pE\cos\theta$$

विद्युत द्विध्रुव के विद्युत क्षेत्र के समान्तर होने पर

$$\theta = 0^\circ$$

$\therefore \quad U = -pE\cos 0^\circ = -pE$

प्र.10. एक त्रिज्या 10 cm के चालक गोले को आवेशित करने पर उसकी सतह पर 15 *V* विभव है। इसके केन्द्र पर विमव कितना होगा?

उत्तर– किसी चालक गोले को आवेशित करने पर उसके भीतर विद्युत विभव का मान पृष्ठ पर विद्युत विभव के मान के बराबर होगा।

$\therefore$ केन्द्र पर विद्युत विभव = 15 वोल्ट

प्र.11. एक 5 cm त्रिज्या के समरूप आवेशित अचालक गोले की सतह पर 10 *V* विमव है। इसके केन्द्र पर विमव कितना होगा?

उत्तर– $\because$ आवेशित अचालक गोले के भीतर विद्युत विभव

$$V = Kq\left(\frac{3R^2 - r^2}{2R^3}\right)$$

केन्द्र के लिए r = 0

$\therefore$ आवेशित अचालक गोले के केन्द्र पर विद्युत विभव

$$V_{केन्द्र} = \frac{3}{2}\frac{Kq}{R} = \frac{3}{2}V_{सतह}$$
$$= \frac{3}{2}\times 10 = 15 \text{ वोल्ट}$$

प्र.12. निर्वात में किसी बिन्दु (*x, y, z*) (सभी मीटर में) पर विद्युत विमव $V = 2x^2$ volt है। (1m, 2m, 3m) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिये।

उत्तर– $\because \quad V = 2x^2$ वोल्ट

$\because \quad E_x = \frac{-\partial V}{\partial x} = \frac{-\partial}{\partial x}(2x^2) = -4x$

$$E_y = E_z = 0$$

$\therefore \quad \vec{E}_x = -4x\hat{i}$

$\therefore$ (1m, 2m, 3m) बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = -4\times 1\hat{i}$$

$$= -4\hat{i}\ \frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$$

प्र.13. दो बिन्दु आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक लिखिये।

उत्तर– दो बिन्दु आवेशों q_1 व q_2 के निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{Kq_1q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q_1q_2}{r}$$

प्र.14. तीन बिन्दु आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक लिखिये।

उत्तर– तीन बिन्दु आवेशों q_1, q_2 व q_3 के निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right]$$

प्र.15. विभव प्रवणता का मात्रक लिखिये।

उत्तर– विभव प्रवणता का SI मात्रक $\frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$

प्र.16. एक इलेक्ट्रान को दो बिन्दुओं के मध्य, जिनमें विभवान्तर 20 *V* है, ले जाने में कितना कार्य करना पड़ेगा?

उत्तर–
$$W = -eV = -1.6 \times 10^{-19} \times 20$$
$$= -32 \times 10^{-19}\ \text{जूल}$$

प्र.17. किसी बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर निर्वात में विद्युत विभव 10 *V* है। यदि बिन्दु के चारों ओर 2 परावैधुतांक वाला पदार्थ रख दिया जाये, तब विद्युत विभव क्या होगा।

उत्तर– ∵
$$V_m = \frac{V}{\epsilon_r} = \frac{10}{2} = 5\ \text{वोल्ट}$$

प्र.18. विद्युत द्विध्रुव को बाह्य समरूप विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में शून्य (0°) से 180° तक घुमाने में किये गये कार्य का मान लिखिये।

उत्तर– ∵
$$W = pE(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$
$\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 180^\circ$
$$W = pE(\cos 0^\circ - \cos 180^\circ)$$
$$W = pE\,[1-(-1)]$$
$$W = 2pE\ \text{जूल}$$

प्र.19. पृथ्वी का विद्युत विभव कितना माना जाता हैं?

उत्तर– पृथ्वी का विद्युत विभव शून्य माना जाता है।

प्र.20. यदि विभव फलन $V = 4x + 3yV$ हो तो (2, 1) बिन्दु (मी मीटर में) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण ज्ञात कीजिये।

उत्तर– ∵
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(4x + 3y) = -4$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(4x + 3y) = -3$$

∴ बिन्दु (2, 1) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = -4\hat{i} - 3\hat{j}$$

तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण

$$E = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\ \frac{\text{वोल्ट}}{\text{मीटर}}$$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. विद्युत विभव किसे कहते हैं? इसका सूत्र एवं मात्रक लिखिये।

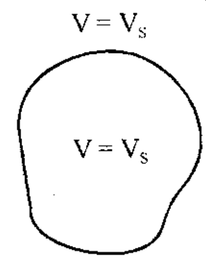
उत्तर– विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर विभव एक परीक्षण आवेश q_0 को अनंत से उस बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य एवं परीक्षण आवेश की मात्रा की निष्पति के बराबर होता है।

विद्युत विभव $V = \frac{W}{q}$

विद्युत विभव का मात्रक $\frac{\text{जूल}}{\text{कूलॉम}}$ = वोल्ट होता है।

प्र.2. सिद्ध कीजिये कि आवेशित गोलीय कोश के अन्दर विभव का मान उतना ही है जितना पृष्ठ पर।

उत्तर– किसी आवेशित गोलीय कोश के भीतर $\vec{E} = 0$ होने से परीक्षण आवेश को गोलीय कोश के भीतर गति कराने में कोई कार्य नहीं होता है जिससे किन्ही दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर शून्य होने से गोलीय कोश के भीतर स्थिर विद्युत विभव का मान नियत रहता है।



चित्र 3.39

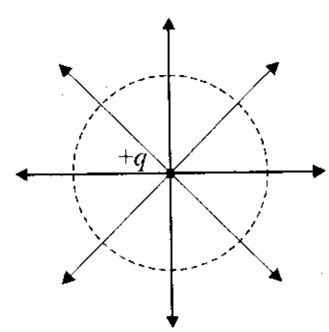
इसी प्रकार आवेशित गोलीय कोश के पृष्ठ पर $\vec{E}$ पृष्ठ के लम्बवत् होता है तथा $\vec{E}$ का कोई स्पर्श रेखीय घटक नहीं होता है। इससे परीक्षण आवेश को पृष्ठ पर गति कराने में कोई कार्य नहीं होता है। इस स्थिति में पृष्ठ पर किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर शून्य तथा स्थिर विद्युत विभव का मान नियत रहता है।

अतः यह स्पष्ट होता है कि किसी आवेशित गोलीय कोश के समस्त आयतन में स्थिर विद्युत विभव का मान नियत रहता है तथा यह पृष्ठ पर विभव के मान के बराबर होता है।

प्र.3. समविभव पृष्ठ किसे कहते हैं? बिन्दु आवेश के कारण समविभव पृष्ठ बनाइये।

उत्तर– ऐसा पृष्ठ जिसके प्रत्येक बिन्दु पर विभव समान होता है समविभव पृष्ठ कहलाता है।

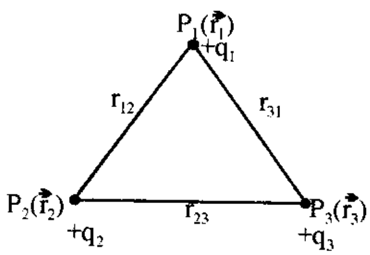
बिन्दु आवेश के कारण समविभव पृष्ठ



चित्र 3.40

प्र.4. तीन बिन्दु आवेशों से निर्मित किसी तंत्र की विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

उत्तर–



चित्र 3.41

माना कि चित्र की भाँति q_1, q_2, q_3 आवेश क्रमशः बिन्दु P_1, P_2 तथा P_3 पर स्थित है तब सम्पूर्ण निकाय की स्थितिज ऊर्जा निम्न प्रकार ज्ञात की जा सकती है–

प्रथम आवेश q_1 को $P_1(\vec{r_1})$ तक लाने में किया गया कार्य शून्य होगा क्योंकि क्षेत्र में कोई अन्य आवेश नहीं है अर्थात्

$$W_1 = 0 \quad ....(1)$$

जब q_2 आवेश को क्षेत्र के $P_2(\vec{r_2})$ पर q_1 से r_{12} दूरी पर लाते हैं तो किया गया कार्य

$$W_2 = (q_1 \text{ के कारण विभव}) \times q_2$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}(q_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad ...(2)$$

इसी प्रकार q_3 आवेश को अनन्त से क्षेत्र के $P_3(\vec{r_3})$ बिन्दु पर लाने में किया गया कार्य

$$W_3 = (q_1 \text{ व } q_2 \text{ के कारण विभव}) \times q_3$$

$$W_3 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right) \times q_3$$

$$\Rightarrow \quad W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \quad ...(3)$$

∴ इन सभी आवेशों के निकाय की कुल विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = W_1 + W_2 + W_3$$

समी. (1), (2) व (3) से

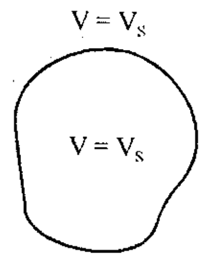
$$U = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \quad ...(4)$$

आवेशों के निकाय को बनाने में आवश्यक ऊर्जा, उन आवेशों की केवल अन्तिम स्थितियों पर निर्भर करती है।

प्र.5. आवेशित चालक के पूर्ण आयतन में स्थिर विद्युत विभव उसके पृष्ठ पर स्थिर विद्युत विभव के तुल्य होता है। क्यों?

उत्तर– किसी चालक के भीतर $\vec{E} = 0$ होने से परीक्षण आवेश को चालक के भीतर गति कराने में कोई कार्य नहीं होता है जिससे किन्ही दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर शून्य होने से चालक के भीतर स्थिर विद्युत विभव का मान नियत रहता है।



चित्र 3.42

इसी प्रकार चालक के पृष्ठ पर $\vec{E}$ पृष्ठ के लम्बवत् होता है तथा $\vec{E}$ का कोई स्पर्श रेखीय घटक नहीं होता है। इससे परीक्षण आवेश को पृष्ठ पर गति कराने में कोई कार्य नहीं होता है। इस स्थिति में पृष्ठ पर किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर शून्य तथा स्थिर विद्युत विभव का मान नियत रहता है।

अतः यह स्पष्ट होता है कि किसी चालक के समस्त आयतन में स्थिर विद्युत विभव का मान नियत रहता है तथा यह पृष्ठ पर विभव के मान के बराबर होता है।

प्र.6. विद्युत विमव एवं विद्युत क्षेत्र की तीव्रता में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर– माना q_0 परीक्षण आवेश एक सम विभव पृष्ठ से dr दूरी पर स्थित दूसरी सम विभव पृष्ठ पर विस्थापित होता है।

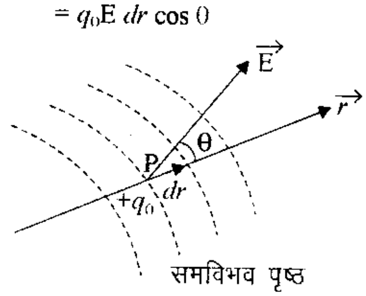
परीक्षण आवेश पर क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य

$$W = -q_0\, dV \quad .....(1)$$

जहाँ dV = सम विभव पृष्ठों के मध्य विभवान्तर है। इसी कार्य को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं–

$$W = \vec{F}\cdot\vec{dr} = q_0\, \vec{E}\cdot\vec{dr}$$

$$= q_0 E\, dr \cos\theta \quad .....(2)$$



चित्र 3.43

समीकरण (1) व (2) से

$$-q_0(dV) = q_0 E\, dr \cos\theta$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{dr}$$

यहाँ $E\cos\theta$, $\vec{E}$ का $\vec{r}$ की दिशा में घटक हैं।

$$\therefore \quad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad .....(3)$$

यहाँ आंशिक अवकलन इस तथ्य का प्रतीक है कि समीकरण (3) में V का परिवर्तन उस दिशा में है जिसमें क्षेत्र $\vec{E}$ का घटक स्थित है। अतः

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$\because \quad \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) V$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad .....(4)$$

यहाँ $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$ डेल संकारक है।

इसप्रकार **विभव के साथ ऋणात्मक परिवर्तन की दर विद्युत क्षेत्र के बराबर होती है** अर्थात्

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad .....(5)$$

प्र.7. समरूप विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव को धुमाने में किये गये कार्य का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर– $\because$ θ° विक्षेप की स्थिति में द्विध्रुव पर विद्युत क्षेत्र में कार्य करने वाला बलाघूर्ण

$$\tau = pE\sin\theta$$

इस स्थिति में $d\theta$ कोणीय विस्थापन देने में किया गया कार्य

$$dw = \tau d\theta = pE\sin\theta d\theta$$

अत: द्विध्रुव को θ_1 से θ_2 कोण तक घुमाने में किया गया कार्य

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} pE\sin\theta d\theta$$

$$= pE\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta$$

$$= pE[-\cos\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$= -pE(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$= pE(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

प्र.8. प्रदर्शित कीजिये कि समविभव पृष्ठ पर किसी परीक्षण आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता।

उत्तर– समविभव पृष्ठ पर विभव का मान नियत होता है, जिससे समविभव पृष्ठ पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवांतर का मान शून्य होता है।

$\because$ कार्य = आवेश × विभवांतर

= आवेश × 0 = 0

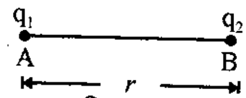
अत: समविभव पृष्ठ पर किसी परीक्षण आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता।

प्र.9. विद्युत स्थितिज ऊर्जा से क्या तात्पर्य है? आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक उत्पन्न कीजिये।

उत्तर– बिन्दु आवेशों के किसी निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा उस कार्य के तुल्य होती है जो उन आवेशों को अनन्त दूरी (अर्थात् शून्य ऊर्जा की स्थिति) से उनकी स्थितियों तक लाकर आवेशों के उस निकाय का निर्माण करने में किया जाता है।

दो बिन्दु आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

माना कि q_1 तथा q_2 दो बिन्दु आवेश एक दूसरे से r दूरी पर स्थित है। आवेश q_1, बिन्दु A पर तथा आवेश q_2, बिन्दु B पर स्थित है। (चित्र)



चित्र 3.44

आवेशों के इस निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करने के लिए माना कि दोनों आवेश प्रारंभ में बिन्दु A तथा B पर न होकर अनन्त पर स्थित है। तब आवेश q_1 को अनन्त से बिन्दु A तक लाने में किया गया कार्य शून्य होता है। जब आवेश q_1 पर कोई विद्युत बल कार्यरत नहीं हैं, तब बिन्दु A पर स्थित बिन्दु आवेश q_1 के कारण बिन्दु B पर विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

अब विभव की परिभाषा के अनुसार, बिन्दु आवेश q_1 के विद्युत क्षेत्र में एकांक धनावेश को अनन्त से बिन्दु B तक लाने में किया गया कार्य V होता है। अतः बिन्दु आवेश q_1 की उपस्थिति में आवेश q_2 को अनन्त से बिन्दु B तक लाने में किया गया कार्य

$$W = q_2V = q_2\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$$

यह कार्य ही बिन्दु आवेशों q_1 व q_2 के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा है।

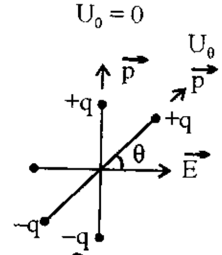
अतः निर्वात में r दूरी पर स्थित दो बिन्दु आवेशों q_1 तथा q_2 के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$$

उपरोक्त सूत्र में q_1 व q_2 के मान चिन्ह सहित रखते हैं।

प्र.10. बाह्य विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक ज्ञात कीजिये।

उत्तर– "विद्युत क्षेत्र में शून्य ऊर्जा की स्थिति से किसी स्थिति विशेष तक द्विध्रुव को ले जाने में अर्थात् घुमाने में किया गया कार्य उस स्थिति में द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा के बराबर होता है।" द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा तब शून्य होती है जब वह क्षेत्र के साथ लम्बवत् होता है।



चित्र 3.45

θ° विक्षेप की स्थिति में द्विध्रुव पर विद्युत क्षेत्र में कार्य करने वाले बल युग्म का आघूर्ण

$$\tau = pE\sin\theta$$

इस स्थति में $d\theta$ कोणीय विस्थापन देने में किया गया कार्य

$$dW = \tau.d\theta$$

अतः शून्य स्थितिज ऊर्जा की स्थिति (द्विध्रुव की शून्य सदिश स्थिति अर्थात् $\theta_1 = 90°$) से θ विक्षेप देने में किया गया कार्य अर्थात् द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा

$$U = W = \int_{90}^{\theta} dW = \int_{90}^{\theta}\tau d\theta = \int_{90}^{\theta} pE\sin\theta.d\theta$$

$$= pE\int_{90}^{\theta}\sin\theta d\theta = pE[-\cos\theta]_{90}^{\theta}$$

$$= pE[-\cos\theta + \cos 90°]$$

$= pE[-\cos\theta + 0]$ या $U = -pE\cos\theta$

$= -\vec{p}\cdot\vec{E}$

प्र.11. समरूप बाह्य विद्युत क्षेत्र में $\vec{r_1}$ व $\vec{r_2}$ स्थिति सदिश पर रखे दो बिन्दु आवेशों q_1 व q_2 के स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक लिखिये।

उत्तर– माना कि किसी बाह्य क्षेत्र $\vec{E}$ में q_1 तथा q_2 दो आवेश क्रमशः बिन्दु A तथा B पर रखे गए है जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}$ तथा $\vec{r_2}$ है।

अब q_1 आवेश को अनन्त से बिन्दु A तक लाने में किया गया कार्य

$$W_1 = q_1 V(\vec{r_1}) \quad ....(1)$$

जब q_2 आवेश को अनन्त से बिन्दु B तक लाया जाता है तब किया गया कार्य W_2 = बाह्य क्षेत्र $\vec{E}$ के विरुद्ध किया गया कार्य + q_1 के कारण क्षेत्र के विरुद्ध किया गया कार्य

$$\Rightarrow \quad W_2 = q_2 V(\vec{r_2}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad ...(2)$$

जहाँ r_{12} = q_1 व q_2 आवेशों के मध्य दूरी

∴ दोनों आवेशों के निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा

$$U = W_1 + W_2$$

$$\Rightarrow \quad U = q_1 V(\vec{r_1}) + q_2 V(\vec{r_2}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad ....(3)$$

प्र.12. समविभव पृष्ठ के दो गुण लिखिये।

उत्तर– समविभव पृष्ठ के गुण–

(1) पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विभव एक समान होता है।

(2) इस पृष्ठ के किसी बिंदु से पृष्ठ के ऊपर स्थित अन्य बिन्दु तक इकाई धन आवेश को ले जाने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता।

प्र.13. सिद्ध कीजिये कि किसी बिन्दु आवेश के चारों ओर परावैधुत माध्यम होने पर, उसके कारण विद्युत विमव निर्वात की तुलना $1/\epsilon_r$ गुना कम हो जाता हैं।

उत्तर– ∵ बिन्दु आवेश के कारण निर्वात् में r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

बिन्दु आवेश के चारों ओर परावैद्युत माध्यम होने पर

$$V_m = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{q}{r}$$

$$= \frac{V}{\epsilon_r}$$

∵ $\epsilon_r > 1$

∴ V_m का मान V के मान का $\frac{1}{\epsilon_r}$ गुना कम हो जाता है।

प्र.14. सिद्ध कीजिये की समरूप आवेशित आवेशित अचालक गोले के केन्द्र पर विद्युत विमव उसकी सतह पर विद्युत विमव की तुलना में 1.5 गुना होता है।

उत्तर– ∵ समरूप आवेशित अचालक गोले के भीतर विद्युत विभव

$$V = Kq\left(\frac{3R^2 - r^2}{2R^3}\right)$$

केन्द्र के लिए $\quad r = 0$

$$\therefore \quad V_{\text{केन्द्र}} = \frac{3}{2}\frac{Kq}{R} = \frac{3}{2}V_{\text{सतह}}$$

$$= 1.5\, V_{\text{सतह}}$$

प्र.15. 10 μC तथा 5 μC के दो आवेश परस्पर 1 m दूरी पर स्थित है। इन आवेशों के मध्य दूरी 0.5 m करने के लिये कितना कार्य करना पड़ेगा।

उत्तर– प्रथम स्थिति में–

$$U_1 = \frac{Kq_1q_2}{r}$$

द्वितीय स्थिति में–

$$U_2 = \frac{Kq_1q_2}{r'} = \frac{Kq_1q_2}{r/2} = \frac{2Kq_1q_2}{r}$$

∵ $\quad r = 1m$ जबकि $r' = 0.5\,m = \frac{r}{2}$

∴ $\quad$ किया गया कार्य $W = U_2 - U_1$

$$W = \frac{2Kq_1q_2}{r} - \frac{Kq_1q_2}{r} = \frac{Kq_1q_2}{r}$$

$$W = \frac{9\times10^9\times10\times10^{-6}\times5\times10^{-6}}{1}$$

$W = 45\times10^{-2}$ जूल

$W = 0.45$ जूल

प्र.16. विद्युत विमवान्तर की परिभाषा दीजिये। विद्युत विमवान्तर एवं विद्युत विमव में अन्तर स्पष्ट कीजिये।

उत्तर– विद्युत क्षेत्र में एकांक धन आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य उन दोनों बिन्दुओं के बीच विभवान्तर को प्रदर्शित करता है। अनुच्छेद 3.1 पर देखें।

निबंधात्मक प्रश्न

प्र.1 किसी बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव का व्यंजक व्युत्पन्न कीजियें

उत्तर– अनुच्छेद 3.2 पर देखें।

प्र.2. किसी विद्युत द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु (r, θ) पर विद्युत विभव का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये। सिद्ध कीजिये कि अक्ष पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव अधिकतम तथा निरक्ष पर विद्युत विभव शून्य होता हैं।

उत्तर– अनुच्छेद 3.4 पर देखें।

प्र.3. आवेशित गोलीय कोश द्वारा इसके बाहर, पृष्ठ पर तथा अन्दर स्थित बिन्दुओं के लिये विभव के सूत्र व्युत्पन्न कीजियें। दूरी के साथ विभव में परिवर्तन का आलेख खींचिये।

उत्तर– अनुच्छेद 3.7.1 पर देखें।

प्र.4. आवेशित अचालक गोले के द्वारा इसके बाहर, पृष्ठ तथा अन्दर स्थित बिन्दुओं के लिये विभव के सूत्र व्युत्पन्न कीजिये। दूरी के साथ विभव में परिवर्तन का आलेख खींचिये।

उत्तर– अनुच्छेद 3.7.3 पर देखें।

प्र.5. विद्युत स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित कीजिये। एक समान विद्युत क्षेत्र में किसी द्विध्रुव की विद्युत स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त कीजिये। स्थाई एवं अस्थााई संतुलन की अवस्थाएँ

किन स्थतियों में प्राप्त होगी।

उत्तर– अनुच्छेद 3.8 तथा 3.10 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. दो बिन्दुओं के मध्य 3 C आवेश को ले जाने में 6 जूल कार्य करना पड़ता है। इन बिन्दुओं के मध्य विद्युत विभवान्तर ज्ञात कीजिये।

हल– दिया गया है– आवेश q = 3 कूलॉम

W = 6 जूल

∵ कार्य = आवेश × विभवांतर

$W = q\Delta V$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{W}{q} = \frac{6}{3} = 2 \text{ वोल्ट}$$

प्र.2. यदि दो बिन्दुओं A तथा B पर विद्युत विभव क्रमशः 2 V तथा 4 V हैं तब 8 μC के बिन्दु आवेश को बिन्दु A से बिन्दु B तक ले जाने में कितना कार्य करना होगा?

हल– दिया गया है–

विभवांतर $\Delta V = 4 - 2 = 2$ वोल्ट

$q = 8\ \mu C = 8 \times 10^{-6}$ C

∵ कार्य = आवेश × विभवांतर

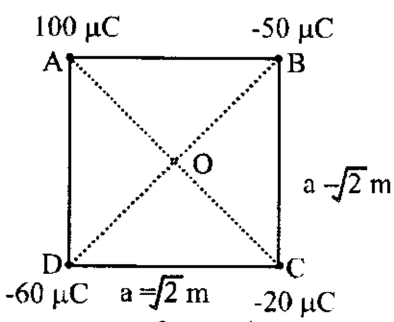
$\Rightarrow W = q\Delta V = 8 \times 10^{-6} \times 2$

$= 16 \times 10^{-6}$ जूल

$W = 1.6 \times 10^{-5}$ जूल

प्र.3. $\sqrt{2}$ m भुजा के वर्ग के कोनों पर 100 μC, –50 μC, 20 μC तथा –60 μC के चार आवेश क्रमशः रखे है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिये।

हल–



चित्र 3.46

$$\because \quad AO = BO = CO = DO = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ मीटर}$$

∴ वर्ग के केन्द्र पर कुल विद्युत विभव

$$V = K\left[\frac{100\times10^{-6}}{1} - \frac{50\times10^{-6}}{1} + \frac{20\times10^{-6}}{1} - \frac{60\times10^{-6}}{1}\right]$$

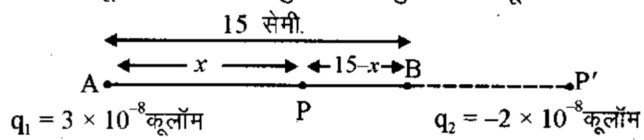
$V = K \times 10^{-6}(100 - 50 + 20 - 60)$

$V = 9 \times 10^{9} \times 10^{-6} \times 10$

$V = 9 \times 10^{4}$ वोल्ट

प्र.4. $3\times10^{-8}\,C$ **तथा** $-2\times10^{-8}\,C$ **के दो आवेश परस्पर 15 cm दूर है। इन दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के किस बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होगा? अन्नत पर विद्युत विभव शून्य मान लीजिये।**

हल– माना बिन्दु A पर धनात्मक आवेश $q_1 = 3 \times 10^{-8}$ कूलॉम तथा बिन्दु B पर ऋणात्मक आवेश $q_2 = -2 \times 10^{-8}$ कूलॉम स्थित हैं तथा A से x दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत विभव शून्य है



चित्र 3.47

तब **स्थिति I**–जब बिन्दु P, A तथा B के मध्य कहीं स्थित है– तब प्रश्न से

$$\frac{Kq_1}{x} + \frac{Kq_2}{(15-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{K\times3\times10^{-8}}{x} + \frac{-K\times2\times10^{-8}}{(15-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{K\times3\times10^{-8}}{x} = \frac{K\times2\times10^{-8}}{(15-x)}$$

$\Rightarrow 45 - 3x = 2x$

$\Rightarrow 5x = 45$ या $x = 9$ सेमी.

स्थिति II–जब बिन्दु P, AB रेखा को विस्तारित करने पर P' स्थिति पर है तथा AP' = x है

तब प्रश्न से

$$\frac{Kq_1}{x} + \frac{Kq_2}{(x-15)} = 0$$

$$\text{या} \quad \frac{K\times3\times10^{-8}}{x} - \frac{K\times2\times10^{-8}}{(x-15)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{K\times3\times10^{-8}}{x} = \frac{K\times2\times10^{-8}}{(x-15)}$$

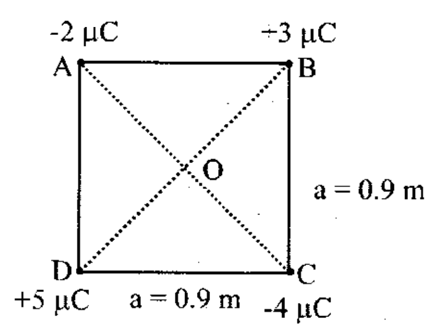
$\Rightarrow 3x - 45 = 2x$

$\Rightarrow x = 45$ सेमी

अतः धनात्मक आवेश से 9 सेमी. एवं 45 सेमी. दूर (ऋणात्मक आवेश की ओर) विद्युत विभव का मान शून्य होगा।

प्र.5. एक वर्ग की प्रत्येक भुजा 0.9 m लम्बी है। इसके कोनों पर क्रमशः –2 μC, +3 μC, –4 μC तथा +5 μC आवेश रखे है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत विभव ज्ञात करो।

हल–



चित्र 3.48

$\because \quad AO = BO = CO = DO = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$= \frac{0.9}{\sqrt{2}}$ मीटर

$\therefore$ वर्ग के केन्द्र पर कुल विद्युत विभव

$$V = K\left[\frac{-2\times10^{-6}}{0.9/\sqrt{2}} + \frac{3\times10^{-6}}{0.9/\sqrt{2}} - \frac{4\times10^{-6}}{0.9/\sqrt{2}} + \frac{5\times10^{-6}}{0.9/\sqrt{2}}\right]$$

$$V = \frac{9\times10^{9}\times\sqrt{2}\times10^{-6}}{0.9}[-2+3-4+5]$$

$V = \sqrt{2}\times10^{4}\times2 = 2.8\times10^{4}$ वोल्ट

प्र.6. 10 cm भुजा के समषटभुज के प्रत्येक शीर्ष पर 5 μC का आवेश है। समषटभुज के केन्द्र पर विद्युत विभव ज्ञात कीजिये।

हल– समषट्भुज की प्रत्येक भुजा केन्द्र पर एक समबाहु त्रिभुज बनाती है अतः प्रत्येक आवेश से केन्द्र O की दूरी, भुजा की लम्बाई 10 सेमी. या 10×10^{-2} मी. के समान होगी तथा प्रत्येक आवेश, समान है अतः

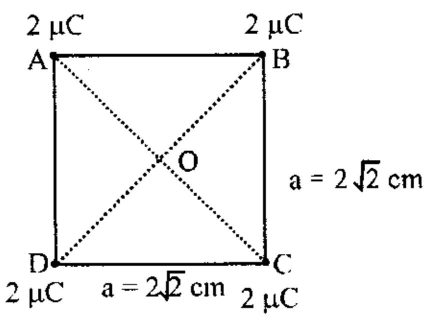
केन्द्र पर विभव $V = 6\times\frac{Kq}{r}$

या $V = 6\times\frac{9\times10^{9}\times5\times10^{-6}}{10\times10^{-2}}$

$V = 27\times10^{5}$ वोल्ट $= 2.7\times10^{6}$ वोल्ट

प्र.7. $2\sqrt{2}$ cm भुजा वाले वर्ग ABCD के प्रत्येक कोने पर 2 μC के आवेश रखे गये है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत विभव की गणना कीजिये।

हल–



चित्र 3.49

$\because \quad AO = BO = CO = DO = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ सेमी. $= 2\times10^{-2}$ मीटर

$\therefore$ वर्ग के केन्द्र पर कुल विद्युत विभव

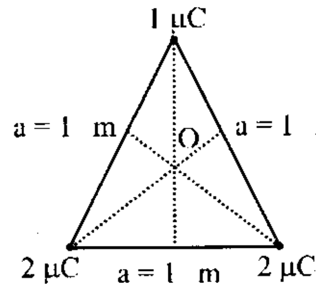
$$V = \frac{4Kq}{r}$$

$$= \frac{4\times9\times10^{9}\times2\times10^{-6}}{2\times10^{-2}}$$

$V = 36\times10^{5}$ वोल्ट

प्र.8. किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा 100 cm है। इसके तीनों कोनों पर क्रमशः 1 μC, 2 μC तथा 3 μC आवेश रखे है। त्रिभुज के तीनों कोनों से समान दूरी (केन्द्र) पर स्थित बिन्दु पर विभव की गणना कीजिये।

हल–



चित्र 3.50

$\because$ त्रिभुज के शीर्ष से केन्द्रक की दूरी

$= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ मीटर

$\therefore$ त्रिभुज के केन्द्रक पर कुल विभव

$$V = K\left[\frac{1\times10^{-6}}{1/\sqrt{3}} + \frac{2\times10^{-6}}{1/\sqrt{3}} + \frac{3\times10^{-6}}{1/\sqrt{3}}\right]$$

$V = \sqrt{3}\times9\times10^{9}\times10^{-6}(1+2+3)$

$V = \sqrt{3}\times9\times6\times10^{3} = 93.5\times10^{3}$ वोल्ट

प्र.9. एक विद्युत द्विध्रुव के आवेशों –1 μC तथा +1 μC के मध्य दूरी $4\times10^{-14}\,m$ है। द्विध्रुव के केन्द्र से $2\times10^{-6}\,m$ दूरी पर स्थित किसी अक्षीय बिन्दु पर विभव ज्ञात कीजिये।

हल– दिया गया है–

$q = 1\mu C = 10^{-6}$ C

$d = 4\times10^{-14}$ m.

$r = 2\times10^{-6}$ m

द्विध्रुव की अक्षीय रेखा पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव

$$V = \frac{Kp}{r^2} = \frac{Kqd}{r^2}$$

$$V = \frac{9\times10^{9}\times10^{-6}\times4\times10^{-14}}{(2\times10^{-6})^2} = 90 \text{ वोल्ट}$$

प्र.10. (अ) **आवेश $4\times10^{-7}\,C$ के कारण इससे 9cm दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर विभव ज्ञात कीजिये।**

(ब) अब आवेश $2\times10^{-9}\,C$ को अनन्त से इस बिन्दु तक लाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिये। क्या यह कार्य उस पथ पर निर्भर करता है, जिसके अनुदिश उसे लाया गया है?

हल– (a) दिया है– आवेश $q = 4\times10^{-7}$ कूलॉम, दूरी r = 9 सेमी. $= 9\times10^{-2}$ मी

अतः विभव $V_p = \frac{Kq}{r} = \frac{9\times10^{9}\times4\times10^{-7}}{9\times10^{-2}}$

$= 4\times10^{4}$ वोल्ट

(b) किसी आवेश q_1 को V वोल्ट विभव के बिन्दु तक, अनन्त से लाने में किया गया कार्य $W = q_1V$

अतः कार्य $W = 2\times10^{-9}\times4\times10^{4} = 8\times10^{-5}$ जूल

($\because q_1 = 2\times10^{-9}$ कूलॉम)

यह कार्य आवेश के लाये जाने वाले पथ पर निर्भर नहीं करता।

प्र.11. **30 μC** का एक आवेश ***x-y*** निर्देश तंत्र के मूल बिन्दु पर स्थित है। $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ तथा $(a, 0)$ बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर ज्ञात कीजिये।

हल– किसी बिन्दु आवेश q से r दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत विभव

$$V = \frac{Kq}{r}$$

बिन्दु $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ पर विभव $V_1 = \frac{Kq}{r_1}$ वोल्ट

बिन्दु (a, 0) पर विभव $V_2 = \frac{Kq}{r_2}$ वोल्ट

$$\therefore \quad V_2 - V_1 = Kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\because \quad \vec{r}_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{a}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}}$$

$$= \sqrt{a^2} = a$$

$$\vec{r}_2 = a\hat{i} + 0\hat{j} \Rightarrow r_2 = a$$

$$\therefore \quad V_2 - V_1 = Kq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right) = 0$$

प्र.12. तीन आवेश ***–q, +q*** तथा ***+q*** क्रमशः ***x-y*** तल में **(0, –*a*), (0, 0)** तथा **(0, *a*)** बिन्दुओं पर स्थित हैं। y अक्ष से θ कोण बनाने वाली रेखा पर ***r*** दूरी पर सिद्ध कीजिये कि विभव ***V*** निम्न होगा–

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{2qa\cos}{r^2}\right), r >> a$$

हल– (0, –a) तथा (0, +a) बिन्दुओं पर स्थित –q तथा +q आवेशों का युग्म विद्युत द्विध्रुव का निर्माण करता हैं जिसके कारण (r, θ) बिन्दु पर विभव जबकि r > > d (जहाँ d = 2a)

$$V_1 = \frac{Kqd\cos\theta}{r^2} = \frac{Kq(2a)\cos\theta}{r^2}$$

अब (0,0) बिन्दु पर +q आवेश के कारण विभव $V_2 = \frac{Kq}{r}$

अतः कुल विभव $V = V_1 + V_2$

$$V = \frac{Kq(2a)\cos\theta}{r^2} + \frac{Kq}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{2qa\cos\theta}{r^2}\right)$$

प्र.13. आवेशों ***+q, 2q*** तथा ***+4q*** को ***a*** मीटर भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के कोनों पर रखने पर कितना कार्य करना पड़ेगा?

हल– $$W = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{Kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{Kq_2q_3}{r_{23}}$$

$$W = K\left[\frac{(q)(2q)}{a} + \frac{(q)(4q)}{a} + \frac{(2q)(4q)}{a}\right]$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2q^2}{a} + \frac{4q^2}{a} + \frac{8q^2}{a}\right]$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{14q^2}{a}\right)$$

प्र.14. (अ) दो आवेशों **7 μC** तथा **–2 μC** जो क्रमशः **(–9 cm, 0, 0)** तथा **(+9 cm, 0, 0)** पर स्थित हैं, के निकाय पर कोई बाह्य क्षेत्र आरोपित नहीं है। इस निकाय की स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

(ब) दोनों आवेशों को परस्पर अनन्त दूरी तक अलग करने के लिये कितना कार्य करना होगा?

हल– दिया है– $q_1 = 7\mu C = 7\times10^{-6}$ कूलॉम, $q_2 = -2\mu C = -2\times10^{-6}$ कूलॉम

आवेशों के मध्य दूरी $r = 9 - (-9) = 18$ सेमी. $= 18\times10^{-2}$ मी.

(अ) निकाय की स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{Kq_1q_2}{r}$

$$= \frac{9\times10^{9}\times7\times10^{-6}\times(-2)\times10^{-6}}{18\times10^{-2}}$$

$\Rightarrow \quad U = -7\times10^{-1} = -0.7$ जूल

(ब) आवेशों को अनन्त दूरी तक पृथक करने का कार्य

$W = U_\infty - U = 0 - (-0.7) = 0.7$ जूल

प्र.15. किसी विद्युत क्षेत्र में ***(x, y)*** बिन्दु पर विद्युत विभव का मान निम्न है– $V = 6xy + y^2 - x^2$

इस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र के मान का परिकलन कीजिये।

हल– $\because$ $$E_x = \frac{-\partial V}{\partial x} = \frac{-\partial}{\partial x}(6xy + y^2 - x^2)$$

$$= -6y + 2x = 2x - 6y$$

$$E_y = \frac{-\partial V}{\partial y} = \frac{-\partial}{\partial y}(6xy + y^2 - x^2)$$

$$= -6x - 2y = -(6x + 2y)$$

$\therefore$ विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = (2x - 6y)\hat{i} - (6x + 2y)\hat{j}$

प्र.16. **0.2m** त्रिज्या के खोखले धातु के गोले को **+15 μC** का आवेश दिया जाता है। ज्ञात कीजिये **(i)** गोले के पृष्ठ पर विद्युत विभव **(ii)** गोले के केन्द्र पर विद्युत विभव **(iii)** गोले के केन्द्र से **0.1 m** की दूरी पर विद्युत विभव **(iv)** गोले के केन्द्र से **0.3 m** की दूरी पर विद्युत विभव

हल– दिया गया है– $q = 15\mu C = 15\times10^{-6}$ C

$R = 0.2$ m.

(i) गोले के पृष्ठ पर विद्युत विभव $V = \frac{Kq}{R}$

$$V = \frac{9\times10^9\times15\times10^{-6}}{0.2}$$
$$V = 6.75\times10^5 \text{ वोल्ट}$$

(ii) गोले के केन्द्र पर विद्युत विभव $V = \frac{Kq}{R}$

$$V = 6.75\times10^5 \text{ वोल्ट}$$

(iii) $\because$ गोले के केन्द्र से 0.1 m की दूरी पर स्थित बिन्दु गोले के भीतर होगा।

$\therefore$ $$V = 6.75\times10^5 \text{ वोल्ट}$$

(iv) गोले के केन्द्र से r = 0.3 m. की दूरी पर विद्युत विभव

$$V = \frac{Kq}{r} = \frac{9\times10^9\times15\times10^{-6}}{0.3}$$
$$= 4.5\times10^5 \text{ वोल्ट}$$

प्र.17. *r* भुजा वाली समबाहु त्रिभुज के कोनों पर तीन बिन्दु आवेश *+q*, *+2q* तथा *xq* रखे है। निकाय की स्थितिजऊर्जा शून्य होने के लिये *x* का मान ज्ञात करो।

हल– $$U = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{Kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{Kq_2q_3}{r_{23}}$$

$$0 = K\left[\frac{(q)(2q)}{r} + \frac{(q)(xq)}{r} + \frac{(2q)(xq)}{r}\right]$$

$$\frac{K}{r}(2q^2 + xq^2 + 2xq^2) = 0$$

$$2q^2 + 3xq^2 = 0$$
$$q^2(2+3x) = 0$$
$$2 + 3x = 0$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

महत्त्वपूर्ण वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. एक E = 0 वाले विद्युत क्षेत्र की तीव्रता में विद्युत विभव का दूरी के साथ परिवर्तन होगा–

(अ) $V \propto r$. (ब) $V \propto \frac{1}{r}$

(स) $V \propto \frac{1}{r^2}$ (द) V = नियत

2. समविभव पृष्ठ में से पारित फलक्स हमेशा–

(अ) पृष्ठ के लम्बवत् होता है (ब) पृष्ठ के समान्तर होता है

(स) शून्य होता है (द) पृष्ठ से 45° कोण पर होता है

3. एक वर्ग जिसकी भुजा की लम्बाई a है, के प्रत्येक कोने पर q आवेश स्थित है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत विभव होगा–

(अ) $\frac{1}{\pi\epsilon_0}.\frac{(\sqrt{2})q}{a}$ (ब) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{(\sqrt{2})q}{a}$

(स) $\frac{1}{\pi\epsilon_0}.\frac{q}{a}$ (द) $\frac{1}{2\pi\epsilon_0}.\frac{(\sqrt{2})q}{a}$

4. एक समबाहु त्रिभुज के तीन कोनों पर समान आवेश स्थित है। त्रिभुज के केन्द्र O पर विद्युत विभव V तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E के लिए सत्य कथन होगा–

(अ) V = 0, E = 0 (ब) V = 0, E ≠ o

(स) V = 0, E ≠ 0 (द) V ≠ 0, E = 0

5. किसी बिन्दु पर E तथा V विद्युत क्षेत्र तथा विद्युत विभव को प्रदर्शित करता है–

(अ) यदि V = 0 है तो E भी शून्य होना चाहिए

(ब) यदि E = 0 है तो V भी शून्य होना चाहिए

(स) यदि E = 0 है तो V शून्य भी हो सकता है तथा नियत भी

(द) उपरोक्त में से कोई भी तर्क सत्य नहीं है

हल एवं संकेत

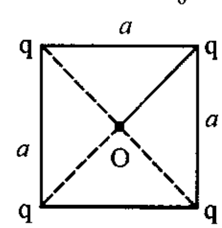
1. **(द)** $E = \frac{-dV}{dr}$ $\therefore$ V = नियतांक

2. **(अ)** पृष्ठ के लम्बवत् होता है।

3. **(अ)** $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q}{r}$, यहाँ $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $V = 4V_1$

$$V = 4\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q\sqrt{2}}{a}$$



चित्र 3.51

4. **(द)** V ≠ 0, E = 0, क्योंकि $V = V_1 + V_2 + V_3$

E सदिश राशि है अतः किन्हीं दो आवेशों से उत्पन्न क्षेत्र तीसरे के बराबर व विपरीत होगा।

5. **(स)** यदि E = 0 है तो V शून्य भी हो सकता है तथा नियत भी

$\because$ $$E = -\frac{dV}{dr}$$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. क्या यह संभव है कि समान आयतन तथा समान आवेश से आवेशित दो समीप रखे चालकों के मध्य विभवान्तर हो?

उत्तर–हाँ, यदि उन चालकों के आकार भिन्न–भिन्न हों।

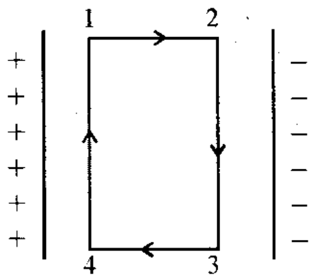
प्र.2. यदि किसी आवेश q' को आवेश q के परितः r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर बार-बार घुमाया जाये तो उसके लिए कितना कार्य करना पड़ेगा?

उत्तर–आवेश q' को आवेश q की विद्युत क्षेत्र रेखाओं के लम्बवत् घुमाया जा रहा है। अतः कोई कार्य नहीं करना पड़ेगा। क्योंकि $W = Fd\cos\theta = Fd\cos 90° = 0$

प्र.3. दो आवेशित प्लेटों के बीच एक समान विद्युत क्षेत्र E है। एक आवेश q को बन्द आयताकार पथ पर घुमाने में कितना कार्य करना पड़ेगा?

उत्तर–आवेश q को 1 से 2 तक ले जाने में किया गया कार्य = बल × दूरी = qEd

जहाँ d आयताकार पथ की चौड़ाई है। आवेश को 3 से 4 तक ले जाने में किया गया कार्य = –qE.d



चित्र 3.52

आवेश को 2 से 3 तथा 4 से 1 तक ले जाने में किया गया कार्य शून्य होगा, क्योंकि बल तथा विस्थापन परस्पर लम्बवत् है।

अतः आवेश q को बन्द आयताकार पथ पर घुमाने में किया गया कुल कार्य = qEd – q Ed = 0

प्र.4. एक धनावेशित धातु के गोले के भीतर एक धनावेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता, जबकि धातु के गोले के बाहर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु (गोले की ओर) तक ले जाने में कार्य करना पड़ता है। क्यों?

उत्तर–धनावेशित धातु के गोले के भीतर सभी बिन्दुओं पर विभव एकसमान होता है। अतः धनावेश को गोले के भीतर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता। धातु के गोले के बाहर किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर होता है, अतः गोले की ओर एक धनावेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में कार्य करना पड़ता है।

प्र.5. उच्च आवेश से आवेशित एक खोखले गोलीय चालक के भीतर एक व्यक्ति झटके (shock) का अनुभव नहीं करता, क्यों?

उत्तर–झटका (shock) अनुभव करने के लिए विभवान्तर होना चाहिए। खोखले गोलीय चालक के भीतर प्रत्येक बिन्दु पर विभव एकसमान तथा गोलीय चालक के पृष्ठ के विभव के समान होता है। अतः गोलीय चालक और उसके भीतर खड़े व्यक्ति के बीच कोई विभवान्तर नहीं होता जिससे व्यक्ति झटके का अनुभव नहीं करता।

प्र.6. $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ का प्रयोग करते हुये विद्युत द्विध्रुव से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करो।

उत्तर– हम जानते हैं कि द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर उत्पन्न विद्युत विभव

$$V = \frac{kp\cos\theta}{r^2}$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ से

विद्युत क्षेत्र का त्रिज्य घटक $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{kp\cos\theta}{r^2}\right)$

या
$$E_r = \frac{2kp\cos\theta}{r^3} \qquad ....(1)$$

तथा दिगंशी घटक
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{kp\cos\theta}{r^2}\right)$$

या
$$E_\theta = \frac{kp\sin\theta}{r^3} \qquad ....(2)$$

अतः परिणामी विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$$

$$E = \sqrt{\left(\frac{2kp\cos\theta}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{kp\sin\theta}{r^3}\right)^2}$$

या
$$E = \frac{kp}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} \qquad ....(3)$$

अक्षीय बिन्दु के लिए $\theta = 0$, $\cos 0^\circ = 1$

अतः:
$$E_{अक्ष} = \frac{kp}{r^3}\sqrt{1+3} = \frac{2kp}{r^3}$$

तथा निरक्षीय बिन्दु के लिए $\theta = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$

$$E_{निरक्ष} = \frac{kp}{r^3}$$

प्र.7. किसी क्षेत्र में यदि विभव नियत हो तो वहाँ विद्युत क्षेत्र जितना होगा?

उत्तर–शून्य होगा चूँकि $E = \frac{-dV}{dx}$ होता है, यहाँ पर E विद्युत क्षेत्र की तीव्रता है और V विद्युत विभव है।

प्र.8. इस सत्य की भौतिक व्याख्या कीजिये कि धन आवेश युग्म की स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है।

उत्तर–धन आवेश युग्म के दो आवेश आपस में प्रतिकर्षित करेंगे और त्वरित गति से एक–दूसरे से दूर हो जायेंगे जब तक उनके बीच की दूरी अनन्त नहीं हो जाये। उन आवेशों में गति उनके अन्दर स्थितिज ऊर्जा के कारण ही सम्भव है, इसलिये धन आवेश युग्म की स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है।

प्र.9. विद्युत क्षेत्र Z-दिशा में समान है। उसके लिये समविभव पृष्ठ को बताइये।

उत्तर–कोई भी तल जो XY तल के समान्तर होगा वे सभी तल समविभव पृष्ठ होंगे।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. 6cm की दूरी पर अवस्थित दो बिंदुओं A एवं B पर दो आवेश 2μC तथा –2μC रखे हैं।

(a) निकाय के सम विभव पृष्ठ की पहचान कीजिए।

(b) इस पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा क्या है?

हल–(a) AB के मध्य बिन्दु से गुजरने वाला अभिलम्बवत् तल एक सम विभव पृष्ठ का ही कार्य करेगा क्योंकि इसके प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत विभव शून्य होता है।

(b) इस पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर क्षेत्र की तीव्रता तल के लम्बवत् AB के अनुदिश होगी।

प्र.2. मूल बिन्दु पर एक 8mC का आवेश अवस्थित है। -2×10^{-9} C के एक छोटे से आवेश को बिन्दु P(0, 0, 3cm) से, बिन्दु R(0, 6cm, 9cm) से होकर, बिन्दु Q(0, 4cm, 0) तक ले जाने में किया गया कार्य परिकलित कीजिए।

हल- आवेश q = 8 मिली कूलॉम = 8×10^{-3} कूलॉम

तथा परीक्षण आवेश $q_0 = -2\times 10^{-9}$ कूलॉम

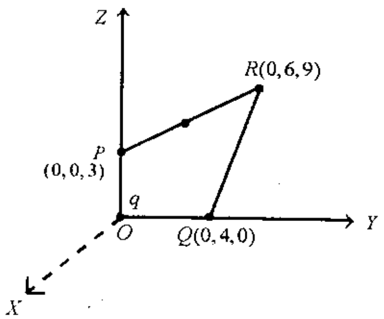
दूरियाँ OP= 3 सेमी. = 3×10^{-2} मी

OQ= 4 सेमी. = 4×10^{-2} मी.

अत: बिन्दु P एवं बिन्दु Q पर आवेश q का विभव

$$V_p = \frac{Kq}{(OP)} = \frac{9\times10^9\times8\times10^{-3}}{3\times10^{-2}} = 24\times10^8 \text{ वोल्ट}$$

$$V_Q = \frac{Kq}{OQ} = \frac{9\times10^9\times8\times10^{-3}}{4\times10^{-2}} = 18\times10^8 \text{ वोल्ट}$$



चित्र 3.53

चूँकि स्थिर विद्युत क्षेत्र, संरक्षी क्षेत्र है अत: आवेश के विस्थापन में किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता अत: P से Q तक विस्थापन में कार्य

$W = q_0 (V_Q - V_P) = -2\times 10^{-9} (18 \times 10^8 - 24 \times 10^8)$

$W = -2\times 10^{-9} \times (-) 6 \times 10^8 = +1.2$ जूल

प्र.3. b भुजा वाले घन के प्रत्येक शीर्ष पर q आवेश है। इस आवेश विन्यास के कारण घन के केन्द्र पर विद्युत विभव तथा विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

हल- चूंकि घन के प्रत्येक शीर्ष से, घन के केन्द्र की दूरी $r = \frac{b\sqrt{3}}{2}$

अत: केन्द्र पर प्रत्येक आवेश के कारण विभव $V' = \frac{Kq}{r} = \frac{2Kq}{b\sqrt{3}}$

(जहाँ $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$)

चूँकि घन के 8 शीर्ष होते हैं अत: केन्द्र पर कुल विभव

$$V = 8V' = \frac{16Kq}{b\sqrt{3}} = \frac{16q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}b} = \frac{4q}{\sqrt{3}\pi\epsilon_0 b}$$

तथा प्रत्येक सम्मुख आवेश युग्म के कारण केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, परिमाण में समान एवं दिशा में विपरीत होगी अत: केन्द्र पर कुल विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी।

प्र.4. आंतरिक त्रिज्या r_1 तथा बाह्य त्रिज्या r_2 वाले एक गोलीय चालक खोल (कोश) पर Q आवेश है–

(a) खोल के केंद्र पर एक आवेश q रखा जाता है। खोल के भीतरी और बाहरी पृष्ठों पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्या है?

(b) क्या किसी कोटर (जो आवेश विहीन है) में विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, चाहे खोल गोलीय न होकर किसी भी अनियमित आकार का हो? स्पष्ट कीजिए।

हल–(a) गोलीय चालक खोल का आवेश +Q, उसके बाह्य पृष्ठ पर स्थित होगा तथा केन्द्र पर स्थित आवेश q के प्रेरण के कारण गोलीय खोल के आन्तरिक पृष्ठ पर –q तथा बाह्य पृष्ठ पर +q आवेश प्रेरित होगा अत:

आंतरिक पृष्ठ पर कुल आवेश = – q

तथा पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma_1 = \frac{Q+q}{4\pi r_1^2}$

बाह्य पृष्ठ पर कुल आवेश = Q + q

तथा पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma_2 = \frac{Q+q}{4\pi r_2^2}$

(b) किसी आवेश विहीन कोटर में विद्युत क्षेत्र शून्य होता है चाहे यह किसी भी अनियमित आकार का हो क्योंकि यदि हम एक बन्द लूप जिसका कुछ भाग कोटर में विद्युत क्षेत्र रेखा के अनुदिश स्थित हो तथा शेष भाग बाहर स्थित हो तो इस बन्द लूप पर एक आवेश को गति कराने में किये गए कुल कार्य का मान शून्य नहीं होगा। स्थिर विद्युत क्षेत्र एक संरक्षी क्षेत्र है अत: बन्द लूप पर कार्य का मान शून्य ही होना चाहिए। इससे यह सिद्ध होता है कि कोटर के अन्दर क्षेत्र रेखाएँ स्थित नहीं है अर्थात् विद्युत क्षेत्र शून्य है।

प्र.5. एक हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन लगभग 0.53Å दूरी पर परिबद्ध हैं-

(a) निकाय की स्थितिज ऊर्जा का eV में परिकलन कीजिए, जबकि प्रोटॉन से इलेक्ट्रॉन के मध्य की अनंत दूरी पर स्थितिज ऊर्जा को शून्य माना गया है।

(b) इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने में कितना न्यूनतम कार्य करना पड़ेगा, यदि यह दिया गया है कि इसकी कक्षा में गतिज ऊर्जा (a) में प्राप्त स्थितिज ऊर्जा के परिमाण की आधी है?

(c) यदि स्थितिज ऊर्जा को 1.06Å में पृथक्करण पर शून्य ले लिया जाए तो उपर्युक्त (a) और (b) के उत्तर क्या होंगे?

हल–(a) r दूरी पर स्थित दो आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा (जबकि अनन्त को शून्य स्थितिज ऊर्जा बिन्दु माना गया है)

$$U = \frac{Kq_1q_2}{r}$$

$$= \frac{9\times10^9\times1.6\times10^{-19}\times(-1.6\times10^{-19})}{0.53\times10^{-10}}$$

$$\Rightarrow \quad U = -43.47\times10^{-19} \text{ जूल}$$

$$= \frac{-43.47\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}} \text{ eV} = -27.16 \text{ eV}$$

(b) कक्षीय इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा $K.E. = \left|\frac{U}{2}\right|$

$$= \frac{(43.47\times10^{-19})}{2} \text{ जूल}$$

या $\quad K.E. = \frac{27.16}{2} eV = 13.58 eV$

अत: इलेक्ट्रॉन की कुल ऊर्जा E = U + KE = –27.16 + 13.58

$= -13.58$ eV

इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए आवश्यक न्यूनतम ऊर्जा

$$E_B = -E = 13.58 \text{ eV}$$

(c) 1.06 Å दूरी का पृथक्करण होने पर स्थितिज ऊर्जा

$$U_1 = \frac{Kq_1q_2}{r} = \frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{1.06\times10^{-10}} \text{ जूल}$$

$$= -\frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{1.06\times10^{-10}\times1.6\times10^{-16}} \text{eV}$$

अतः $U_1 = -13.58$ eV

अतः 1.06 Å दूरी के पृथक्करण की शून्य स्थितिज ऊर्जा स्थिति लेने पर r = 0.53 Å दूरी पर निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$U_2 = U - U_1 = -27.16 - (-13.58) = -13.58 \text{ eV}$$

इस स्थिति में भी इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए आवश्यक न्यूनतम ऊर्जा 13.58 eV होगी।

प्र.6. यदि H_2 अणु के दो में से एक इलेक्ट्रॉन को हटा दिया जाए तो हमें हाइड्रोजन आणविक आयन (H_2^+) प्राप्त होगा। (H_2^+) की निम्नतम अवस्था (ground state) में दो प्रोटॉन के बीच दूरी लगभग 1.5Å है और इलेक्ट्रॉन प्रत्येक प्रोटॉन से लगभग 1Å की दूरी पर है। निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। स्थितिज ऊर्जा की शून्य स्थिति के चयन का उल्लेख कीजिए।

हल–दिया है– इलेक्ट्रॉन पर आवेश $q_1 = -1.6\times10^{-19}$ कूलॉम,

प्रत्येक प्रोटोन पर आवेश $q_2 = q_3 = 1.6\times10^{-19}$ कूलॉम

प्रत्येक प्रोटोन से इलेक्ट्रॉन की दूरी $r_{12} = r_{13} = 1$Å $= 10^{-10}$ मी.,

दोनों प्रोटोनों के मध्य दूरी $r_{23} = 1.5$ Å $= 1.5\times10^{-10}$ मी.

शून्य स्थितिज ऊर्जा बिन्दु अनन्त पर लेने पर

$$U = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

$$\text{या } U = -\frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{10^{-10}} + \frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{1.5\times10^{-10}}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{10^{-10}}\left(-2+\frac{1}{1.5}\right)$$

$$= -\frac{9\times1.6\times1.6\times10^{-19}\times2}{1.5}$$

$$\Rightarrow \quad U = -30.72\times10^{-19} \text{ जूल}$$

प्र.7. बिंदु (0, 0, – a) तथा (0,, 0, a) पर दो आवेश क्रमशः –q और +q स्थित हैं-

(a) बिंदुओं (0, 0, z) और (x, y, 0) पर स्थिरविद्युत विभव क्या है?

(b) मूल बिंदु से किसी बिंदु की दूरी r पर विभव की निर्भरता ज्ञात कीजिए, जबकि r/a > > 1 है।

(c) x-अक्ष पर बिंदु (5, 0, 0) से बिंदु (–7, 0, 0) तक एक परीक्षण आवेश को ले जाने में कितना कार्य करना होगा? यदि परीक्षण आवेश के उन्हीं बिंदुओं के बीच x-अक्ष से होकर न ले जाएं तो क्या उत्तर बदल जाएगा?

हल–स्पष्टतः आवेशों के मध्य दूरी = 2a, तथा आवेशों का यह निकाय Z-अक्ष पर स्थित एक विद्युत द्विध्रुव की भांति कार्य करेगा जिसका द्विध्रुव आघूर्ण

$$p = 2qa \ (+Z \text{ अक्ष की ओर})$$

(i)(A) बिन्दु (0,0,z) पर विद्युत विभव–

$$V = \frac{Kq}{(z-a)} - \frac{Kq}{(z+a)} = \frac{2Kqa}{(z^2-a^2)}$$

$$= \frac{Kq}{(z^2+a^2)} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0(z^2-a^2)}$$

(i)(B) बिन्दु (x,y,0), z- अक्ष (द्विध्रुव की अक्ष) के लम्बवत् है अतः यह निरक्षीय बिन्दु है फलतः इस बिन्दु पर विद्युत विभव = शून्य

(ii) किसी बिन्दु (r,θ) पर द्विध्रुव के कारण विद्युत विभव

$$V = \frac{Kp\cos\theta}{(r^2-a^2\cos^2\theta)}$$

$\because \frac{r}{a} >> 1 \Rightarrow a << r$ अतः $a^2\cos^2\theta$ के पद को r^2 की तुलना में नगण्य माना जा सकता है अतः

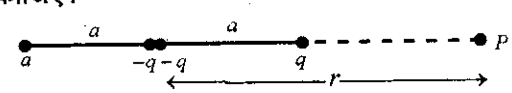
$$V = \frac{Kp\cos\theta}{r^2} \Rightarrow V \propto \frac{1}{r^2}$$

अतः विद्युत विभव, दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है।

(iii) X-अक्ष द्विध्रुव (जिसकी अक्ष –Zअक्ष है तथा मध्य बिन्दु केन्द्र पर है) की निरक्ष रेखा है अतः दोनों बिन्दुओं (5,0,0) एवं (–7,0,0) पर विद्युत विभव शून्य होगा फलतः परीक्षण आवेश को (5,0,0) से (–7,0,0) तक ले जाने में कार्य = शून्य

चूंकि स्थिर विद्युत क्षेत्र सरंक्षी क्षेत्र है अतः किया गया कार्य परीक्षण आवेश के पथ पर निर्भर नहीं करता। अतः इस तथ्य से उत्तर पर कोई प्रभाव नहीं होगा कि एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक किस पथ पर होकर लाया गया है।

प्र.8. नीचे दिए गए चित्र में एक आवेश विन्यास जिसे विद्युत चतुर्ध्रुवी कहा जाता है, दर्शाया गया है। चतुर्ध्रुवी के अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के लिए r पर विभव की निर्भरता प्राप्त कीजिए, जहां r/a>> 1 अपने परिणाम की तुलना एक विद्युत द्विध्रुव व विद्युत एकल ध्रुव (अर्थात् किसी एकल आवेश) के लिए प्राप्त परिणामों से कीजिए।



चित्र 3.54

हल–चित्रानुसार बिन्दु P पर कुल विद्युत विभव

$$V = \frac{Kq}{(r-a)} - \frac{Kq}{r} + \frac{Kq}{(r+a)}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{Kq[r(r+a) - 2(r^2 - a^2) + r(r-a)]}{r(r^2 - a^2)}$$

$$= \frac{Kq[r^2 + ar - 2r^2 + 2a^2 + r^2 - ar]}{r(r^2 - a^2)}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2Kqa^2}{r^3\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}$$

इस प्रकार

विद्युत चतुर्ध्रुवी के कारण विद्युत विभव $V \propto \frac{1}{r^3}$

जबकि विद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत विभव $V \propto \frac{1}{r^2}$

तथा एकल ध्रुव (एक आवेश) के कारण विद्युत विभव $V \propto \frac{1}{r}$ होता है।

प्र.9. व्यवस्थात्मकतः निम्नलिखित में संगत समविभव पृष्ठ का वर्णन कीजिए-

(a) Z-दिशा में अचर विद्युत क्षेत्र

(b) एक क्षेत्र जो एकसमान रूप से बढ़ता है, परंतु एक ही दिशा (मान लीजिए Z-दिशा) में रहता है।

(c) मूल बिंदु पर कोई एकल धनावेश, और

(d) एक समतल में समान दूरी पर समांतर लंबे आवेशित तारों से बने एकसमान जाल।

हल–(a) Z-दिशा में अचर विद्युत क्षेत्र होने पर समविभव पृष्ठ X–Y तल के समान्तर, परस्पर समान दूरी पर स्थित तल होंगे।

(b) इस स्थिति में भी समविभव पृष्ठ, X–Y तल के समान्तर होंगे परंतु इनके मध्य दूरी, क्षेत्र के बढ़ने पर घटेगी।

(c) इस स्थिति में समविभव पृष्ठ मूल बिन्दु को केन्द्र मानकर खींचे गए संकेन्द्रीय गोलीय पृष्ठ होंगे।

(d) जाल के समीप एक आवर्ती रूप से परिवर्तित आकृति का समविभव पृष्ठ निर्मित होता है जबकि ग्रिड से दूर ये समविभव पृष्ठ परस्पर समान्तर समतल होते हैं।