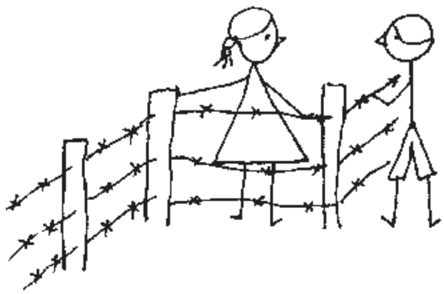
परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ

A1.1 भूमिका



मान लीजिए आपके परिवार के पास एक भूखंड है, परन्तु उसके चारों ओर कोई बाड़ (fence) नहीं बनी है। एक दिन आपके पड़ोसी ने अपने भूखंड के चारों ओर बाड़ (fence) बनाने का निर्णय लिया। जब पड़ोसी ने बाड़ बना ली, तब आपको पता चला कि बाड़ के अंदर आपके परिवार के भूखंड का कुछ भाग चला गया है। आप अपने पड़ोसी को कैसे सिद्ध करेंगे कि उसने आपके भूखंड के कुछ भाग पर कब्जा करने की कोशिश की है। इस संबंध में आपका पहला काम परिसीमा वाले विवाद को सुलझाने के लिए गाँव के बुजर्गों से सहायता लेना हो सकता है। परन्तु, मान लीजिए कि इस मामले में बुजुर्गों के अलग-अलग मत हैं। कुछ बुजुर्ग आपके दावे को सही मानते हैं और कुछ आपके पड़ोसी के दावे को सही मानते हैं। तब, ऐसी स्थिति में आप क्या करेंगे? इस संबंध में आपके सामने केवल यही विकल्प रह जाता है कि अपने भूखंड की परिसीमाओं पर अपने दावे को स्थापित करने के लिए आप एक ऐसी विधि निकालें जो कि सभी को स्वीकार्य हो। उदाहरण के लिए, अपने दावे को सही सिद्ध करने और अपने पड़ोसी के दावे को गलत सिद्ध करने के लिए, आप यदि आवश्यक हुआ तो न्यायालय में, सरकार द्वारा अनुमोदित अपने गाँव के सर्वेक्षण मानचित्र का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति पर विचार करें। मान लीजिए आपकी माँ ने अगस्त महीने, 2005 का घर की बिजली के बिल का भुगतान कर दिया है। परन्तु सितंबर, 2005 के बिल में यह दर्शाया गया है कि अगस्त के बिल का भुगतान नहीं किया गया है। बिजली विभाग द्वारा किए गए इए दावे को आप किस प्रकार गलत सिद्ध करेंगे? इसके लिए आपको भुगतान बिल रसीद प्रस्तुत करनी होगी, जो यह सिद्ध कर देगी कि अगस्त महीने के बिल का भुगतान किया जा चुका है।

ऊपर के उदाहरणों से यह पता चलता है कि हमें अपने दैनिक जीवन में प्रायः यह सिद्ध करना होता है कि अमुक कथन या दावा सत्य है या असत्य। फिर भी, ऐसे अनेक कथन होते हैं जिन्हें सिद्ध किए बिना ही हम स्वीकार कर लेते हैं। परन्तु, गणित में हम किसी कथन को सत्य या असत्य केवल तभी स्वीकार करते हैं (कुछ अभिगृहीतों को छोड़कर) जब गणित के तर्क के अनुसार इस कथन को सिद्ध कर दिया गया हो।

वस्तुतः, गणित में उपपत्तियों का अस्तित्व हजारों वर्षों से रहा है और ये गणित की किसी भी शाखा के केंद्र होती हैं। ऐसा विश्वास किया जाता है कि पहली ज्ञात उपपत्ति (proof) एक यूनानी दार्शनिक और गणितज्ञ थेल्स ने प्रस्तुत की थी। यूँ तो मेसोपोटामिया, मिस्र, चीन और भारत जैसी अनेक प्राचीन सभ्यताओं में गणित केंद्रित है, फिर भी इस बात का कोई स्पष्ट प्रमाण नहीं मिलता है कि उन्होंने उपपत्तियों का प्रयोग उस प्रकार किया था जिस प्रकार आज हम करते हैं।

इस अध्याय में, हम देखेंगे कि कथन क्या होते हैं, गणित में किस प्रकार तर्क दिया जाता है और एक गणितीय उपपत्ति में क्या-क्या अवयव निहित होते हैं।

A1.2 गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन

इस अनुच्छेद में, हम गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन (mathematically acceptable statement) के अर्थ की व्याख्या करने का प्रयास करेंगे। 'कथन' वह वाक्य है जो न तो आदेश सूचक वाक्य होता है और न ही विस्मयादि बोधक (exclamatry) वाक्य। निःसंदेह, कथन एक प्रश्न भी नहीं है! उदाहरण के लिए,

"आपके बालों का रंग क्या है?" यह एक कथन नहीं है। यह एक प्रश्न है।

"कृपया जाइए और मेरे लिए पानी लाइए" एक अनुरोध या एक आदेश है। यह एक कथन नहीं है।

"कितना मनमोहक सूर्यास्त है !" एक *विस्मयादि बोधक* टिप्पणी है। यह एक कथन नहीं है।

फिर भी, "आपके बालों का रंग काला है" एक कथन है।

सामान्यतः, कथन निम्नलिखित प्रकारों में से एक हो सकता है:

- *सदैव सत्य* (*always true*)
- *सदैव असत्य* (*always false*)
- *संदिग्ध* (*ambiguous*)

यहाँ शब्द "संदिग्ध" की कुछ व्याख्या कर देना आवश्यक है। ऐसी दो स्थितियाँ होती हैं जिनसे कथन संदिग्ध बन जाता है। पहली स्थिति तो वह होती है जबकि हम यह निर्णय नहीं ले पाते कि कथन सदैव सत्य है या सदैव असत्य है। उदाहरण के लिए, "कल गुरुवार है" संदिग्ध है, क्योंकि संदर्भ में इतना कुछ नहीं बताया गया है, जिससे हम यह निर्णय ले सकें कि कथन सत्य है या असत्य।

संदिग्धता की दूसरी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब कथन व्यक्तिपरक (subjective) होता है। अर्थात् कुछ व्यक्तियों के लिए यह सत्य होता है और अन्य व्यक्तियों के लिए असत्य होता है। उदाहरण के लिए, "कुत्ते बुद्धिमान होते हैं" संदिग्ध कथन है, क्योंकि कुछ लोग इसे सत्य मानते हैं और कुछ इसे सत्य नहीं मानते हैं।

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्न कथनों में कौन-कौन से कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। अपने उत्तर की कारण सहित पुष्टि कीजिए।

(i) एक सप्ताह में आठ दिन होते हैं।

(ii) यहाँ वर्षा हो रही है।

(iii) पश्चिम में सूर्यास्त होता है।

(iv) गौरी एक दयालु लड़की है।

(v) दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सम होता है।

(vi) दो सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।

हल :

(i) कथन सदैव असत्य है, क्योंकि एक सप्ताह में 7 दिन होते हैं।

(ii) यह कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ कहाँ है।

(iii) कथन सदैव सत्य है। हम कहीं भी रहते हों, सूर्यास्त पश्चिम में ही होता है।

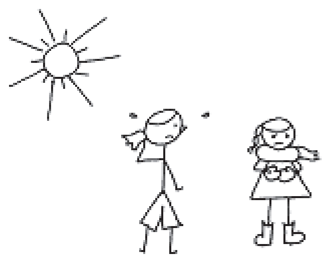
(iv) कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह व्यक्तिपरक है। कुछ लोगों के लिए गौरी दयालु हो सकती है और अन्य लोगों के लिए नहीं।

(v) कथन सदैव असत्य है। दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सदैव विषम होता है।

(vi) यह कथन सदैव सत्य है। फिर भी इस बात की पुष्टि करने के लिए कि यह सत्य है, हमें कुछ और करने की आवश्यकता होगी। इसे *अनुच्छेद* A1.4 में सिद्ध किया जाएगा।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि अपने दैनिक जीवन में हम कथनों की मान्यता के प्रति अधिक सावधान नहीं रहते। उदाहरण के लिए, मान लीजिए आपकी सहेली आपको यह बताती है कि केरल के मनंतावड़ी में जुलाई के महीने में प्रतिदिन वर्षा होती है। पूर्ण विश्वास के साथ आप उसके इस कथन को सत्य मान लेंगी, यद्यपि यह संभव है कि जुलाई के महीने में एक या दो दिन वर्षा न भी हुई हो और, यदि आप वकील नहीं हैं, तो आप उससे बहस नहीं करेंगी।

एक अन्य उदाहरण के रूप में कुछ ऐसे कथन लीजिए, जिन्हें हम प्राय: एक दूसरे से कहते रहते हैं जैसे "आज बहुत गर्मी है।" हम ऐसे कथनों को सरलता से स्वीकार कर लेते हैं, क्योंकि हम संदर्भ जानते हैं, यद्यपि ये कथन संदिग्ध हैं। "आज बहुत गर्मी है" का अर्थ अलग-अलग लोगों के लिए अलग-अलग हो सकता है, क्योंकि कुमायूँ के व्यक्ति के लिए जो मौसम बहुत गर्म होगा, वह चैन्नई के व्यक्ति के लिए गर्म नहीं भी हो सकता है।



परन्तु गणितीय कथन संदिग्ध नहीं हो सकता है। *गणित में कथन केवल स्वीकार्य या मान्य (valid) होता है, जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो।* जब यह सदैव सत्य होता है, तब हम कहते हैं कि यह एक *सत्य कथन* (true statement) है अन्यथा कथन असत्य होता है।

उदाहरण के लिए, $5 + 2 = 7$ सदैव सत्य है। अत: '$5 + 2 = 7$' एक सत्य कथन है। $5 + 3 = 7$ असत्य है। अत: '$5 + 3 = 7$' एक असत्य कथन है।

उदाहरण 2 : बताइए कि नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य :

(i) एक त्रिभुज के अंत:कोणों का योग $180°$ होता है।

(ii) 1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है।

(iii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $4x + x = 5x$ होता है।

(iv) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $2x > x$ होगा।

(v) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq x$ होगा।

(vi) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

हल :

(i) यह कथन सत्य है। आप इसे अध्याय 6 में सिद्ध कर चुके हैं।

(ii) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए 9 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

(iii) यह कथन सत्य है।

(iv) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए, $2 \times (-1) = -2$, और -2, -1 से बड़ा नहीं है।

(v) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, और $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ से बड़ा नहीं है।

(vi) यह कथन असत्य है; क्योंकि समचतुर्भुज की बराबर भुजाएँ तो होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि वह एक वर्ग है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यह स्थापित करने के लिए कि गणित के अनुसार कथन सत्य नहीं है, हमें एक ऐसा उदाहरण या ऐसी स्थिति देनी होगी, जहाँ यह लागू नहीं होता। अत: (ii) में, क्योंकि 9 अभाज्य संख्या नहीं है, यह एक उदाहरण है जो यह दर्शाता है कि कथन "1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है", सत्य नहीं है। इस प्रकार का उदाहरण, जो कथन के अनुकूल न हो, *प्रत्युदाहरण* (*counter example*) कहलाता है। हम अनुच्छेद A1.5 में प्रत्युदाहरणों पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस बात की ओर भी आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यद्यपि कथन (iv), (v) और (vi) असत्य हैं, फिर भी इन पर कुछ प्रतिबंध लगाकर आप इन्हें सत्य बना सकते हैं।

उदाहरण 3 : उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों को पुनः इस प्रकार लिखिए कि वे सत्य कथन हो जाएँ।

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $2x > x$ होगा।

(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq x$ होगा।

(iii) यदि आप एक संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव ही 1 प्राप्त होगा।

(iv) वृत्त के एक बिंदु पर उसकी जीवा द्वारा अंतरित कोण 90° का होता है।

(v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

हल :

(i) यदि $x > 0$ हो, तो $2x > x$ होगा।

(ii) यदि $x \leq 0$ हो या $x \geq 1$ हो, तो $x^2 \geq x$ होगा।

(iii) यदि शून्य के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव 1 प्राप्त होगा।

(iv) वृत्त के एक बिंदु पर वृत्त के एक व्यास द्वारा अंतरित कोण 90° का होता है।

(v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ और सभी अंतःकोण बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

प्रश्नावली A 1.1

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) एक वर्ष में 13 महीने होते हैं।

(ii) दीवाली शुक्रवार को पड़ रही है।

(iii) मगादी में तापमान 26° C है।

(iv) पृथ्वी का एक चन्द्रमा है।

(v) कुत्ते उड़ सकते हैं।

(vi) फरवरी में केवल 28 दिन होते हैं।

2. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित उत्तर दीजिए।

(i) एक चतुर्भुज के अंतःकोणों का योग 350° होता है।

(ii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq 0$ है।

(iii) समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

(iv) दो सम संख्याओं का योग सम होता है।

(v) दो विषम संख्याओं का योग विषम होता है।

3. उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर, निम्नलिखित कथनों को इस प्रकार लिखिए कि वे सत्य कथन बन जाएँ:

(i) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।

(ii) एक वास्तविक संख्या का दुगुना सदा एक सम संख्या होती है।

(iii) किसी भी x के लिए, $3x+1>4$ होता है।

(iv) किसी भी x के लिए, $x^3 \geq 0$ होता है।

(v) प्रत्येक त्रिभुज में माध्यिका एक कोण समद्विभाजक भी होती है।

A1.3 निगमनिक तर्कण

एक **असंदिग्ध (unambiguous)** कथन की सत्यता स्थापित करने में प्रयुक्त मुख्य तर्कसंगत साधन *निगमनिक तर्कण* (*deductive reasoning*) है।

निगमनिक तर्कण को समझने के लिए, आइए हम एक पहेली से प्रारंभ करें जिसे आपको हल करना है।

मान लीजिए आपको चार कार्ड दिए गए हैं। प्रत्येक कार्ड की एक ओर एक संख्या छपी है और दूसरी ओर एक अक्षर छपा है।

A	**V**	**6**	**5**

मान लीजिए आपको यह बताया जाता है कि ये कार्ड निम्नलिखित नियम का पालन करते हैं:

"यदि कार्ड की एक ओर एक सम संख्या हो, तो दूसरी ओर एक स्वर (vowel) होता है।"

नियम की सत्यता की जाँच करने के लिए, **कम से कम** कितने कार्डों को उलटने की आवश्यकता होगी।

हाँ, यह विकल्प तो आपके पास है ही कि आप सभी कार्डों को उलट सकते हैं और जाँच कर सकते हैं। परन्तु क्या आप कम संख्या में कार्डों को उलट कर, दिए हुए कथन की जाँच कर सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि कथन में यह बताया गया है कि वह कार्ड जिसकी एक ओर सम संख्या है उसकी दूसरी ओर एक स्वर होता है। इस कथन में यह नहीं बताया गया है कि जिस कार्ड की एक ओर स्वर है उसकी दूसरी ओर एक सम संख्या अवश्य होनी चाहिए। ऐसा हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। नियम में यह भी नहीं बताया गया है कि वह कार्ड जिसके एक ओर एक विषम संख्या है, उसके दूसरी ओर व्यंजन (consonant) होना ही चाहिए। यह हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है।

अत: क्या हमें 'A' को उलटने की आवश्यकता होगी? उत्तर है: नहीं। दूसरी ओर चाहें एक सम संख्या हो या एक विषम संख्या हो, नियम तब भी लागू होता है।

"5" के संबंध में आप क्या कहेंगे? यहाँ भी हमें कार्ड उलटने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि दूसरी ओर चाहे स्वर हो या व्यंजन, नियम तब भी लागू होता है।

परन्तु V और 6 वाले कार्डों को उलटने की आवश्यकता है। यदि V की दूसरी ओर एक सम संख्या हो, तो नियम भंग हो जाता है। इसी प्रकार, यदि 6 की दूसरी ओर एक व्यंजन हो, तो भी नियम भंग हो जाता है।

इस पहेली को हल करने के लिए हमने जिस प्रकार के तर्कण का प्रयोग किया है, उसे **निगमनिक तर्कण (deductive reasoning)** कहा जाता है। इसे 'निगमनिक' इसलिए कहा जाता है, क्योंकि तर्क का प्रयोग करके पहले स्थापित किए गए कथन से हम एक परिणाम या कथन प्राप्त (अर्थात् निगमित) कर सकते हैं। उदाहरण के लिए ऊपर की पहेली में, निगमित किए गए अनेक तर्कों से हमने यह निगमित (प्राप्त) किया कि केवल V और 6 को ही उलटने की आवश्यकता है।

निगमनिक तर्कण की सहायता से, हम यह भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अमुक कथन सत्य है, क्योंकि यह एक अति व्यापक कथन की, जिसे सत्य माना गया है, एक विशिष्ट स्थिति है। उदाहरण के लिए, एक बार जब हम यह सिद्ध कर लेते हैं कि दो विषम संख्याओं का गुणनफल सदैव ही विषम होता है, तब (बिना अभिकलन के) हम तुरंत यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 70001×134563 विषम होगा, क्योंकि 70001 और 134563 दोनों संख्याएँ ही विषम हैं।

शताब्दियों से निगमनिक तर्कण मानव चिंतन का एक अंग रहा है और इसका प्रयोग हमारे दैनिक जीवन में सदा होता रहता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए ये कथन कि "पुष्प सोलारिस केवल तब खिलता है, जबकि पिछले दिन का अधिकतम तापमान 28°C से अधिक होता है "और" 15 सितंबर, 2005 को काल्पनिक घाटी (imaginary valley) में सोलारिस खिला था, सत्य है। तब निगमनिक तर्कण का प्रयोग करके, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि काल्पनिक घाटी में 14 सितंबर, 2005 को अधिकतम तापमान 28° C से अधिक था।

हमारा दुर्भाग्य यह है कि हम अपने दैनिक जीवन में सही तर्कण का प्रयोग सदा नहीं करते। हम प्राय: सदोष (गलत) तर्कण के आधार पर अनेक निष्कर्ष निकाल लेते हैं। उदाहरण के लिए, यदि आपकी सहेली एक दिन आपको देखकर मुस्कराती नहीं है, तब आप यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि वह आपसे नाराज है। यद्यपि यह सत्य भी हो सकता है कि "यदि वह मुझसे नाराज है, तो मुझे देखकर वह नहीं मुस्कराएगी"; परन्तु यह भी सत्य हो सकता है कि "यदि उसके सिर में बहुत दर्द हो, तो वह मुझे देखकर नहीं मुस्कराएगी''। आप कुछ निष्कर्षों की जाँच क्यों नहीं कर लेते जो कि आप प्रतिदिन निकालते रहते हैं और देखें कि ये निष्कर्ष मान्य तर्कण पर आधारित हैं या सदोष तर्कण पर आधारित हैं?

प्रश्नावली A 1.2

1. निगमनिक तर्कण द्वारा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

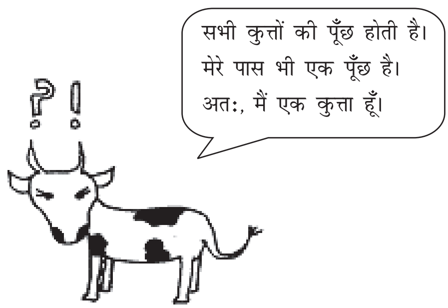
(i) मानव स्तनधारी होते हैं। सभी स्तनधारी कशेरुकों (vertebrates) होते हैं। इन दो कथनों के आधार पर आप मानव के संबंध में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(ii) एंथनी एक नाई है। दिनेश ने अपने बाल कटवाए हैं। क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एंथनी ने दिनेश के बाल काटे हैं?

(iii) मार्टियन (Martians) की जीभ लाल होती हैं। गुलग एक मार्टियन है। इन दो कथनों के आधार पर आप गुलग के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

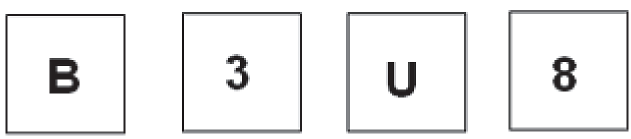
(iv) यदि किसी दिन चार घंटे से अधिक समय तक वर्षा होती है, तो अगले दिन गटरों की सफाई करनी पड़ती है। आज 6 घंटे तक वर्षा हुई है। कल गटर की अवस्था क्या होगी, इसके बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(v) नीचे के कार्टून में दिए गए गाय के तर्क में क्या विरोधाभास (fallacy) है?



2. आपको फिर से चार कार्ड दिए गए हैं। प्रत्येक कार्ड के एक ओर एक संख्या और दूसरी ओर एक अक्षर छपा है। नीचे दिया गया नियम लागू होता है या नहीं, इसकी जाँच करने के लिए, वे कौन-से दो कार्ड होंगे जिन्हें उलटने की आवश्यकता होगी?

"यदि एक कार्ड की एक ओर एक व्यंजन हो, तो उसकी दूसरी ओर एक विषम संख्या होती है।"



A1.4 प्रमेय, कंजेक्चर और अभिगृहीत

अभी तक हमने कुछ कथनों पर चर्चा की है और देखा है कि इन कथनों की मान्यता की जाँच किस प्रकार की जाती है। इस अनुच्छेद में, आप उन तीन अलग-अलग प्रकार के कथनों में भेद करने के बारे में अध्ययन करेंगे जिनसे गणित का निर्माण हुआ है। ये हैं: प्रमेय, कंजेक्चर (conjecture) और अभिगृहीत।

आप पहले भी अनेक प्रमेयों को देख चुके हैं। अत: प्रमेय क्या है? उस गणितीय कथन को जिसकी सत्यता स्थापित (सिद्ध) कर दी गई है, *प्रमेय* (*theorem*) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, नीचे दिए गए कथन प्रमेय हैं, जैसा कि आप अनुच्छेद A1.5 में देखेंगे।

प्रमेय A 1.1 : *एक त्रिभुज के अंत:कोण का योग* 180° *होता है।*

प्रमेय A 1.2 : *दो प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।*

प्रमेय A 1.3 : किन्हीं भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।

कंजेक्चर वह कथन है, जिसे हम अपने गणितीय ज्ञान और अनुभव अर्थात् गणितीय *अंर्तज्ञान* (*intuition*) के आधार पर सत्य मानते हैं। कंजेक्चर सत्य या असत्य हो सकता है। साथ ही, यदि हम इसे सिद्ध भी कर सकें, तो यह एक प्रमेय हो जाता है। प्रतिरूपों को देखने और बुद्धिमतापूर्ण गणितीय अनुमान लगाने के लिए, गणितज्ञ प्राय: कंजेक्चर का प्रयोग करते हैं। आइए हम कुछ प्रतिरूप लें और देखें कि हम किस प्रकार का बुद्धितापूर्ण अनुमान लगा सकते हैं।

उदाहरण 4 : कोई भी तीन क्रमागत सम संख्याएँ लीजिए और उन्हें जोड़िए, जैसे–

$2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$, $20 + 22 + 24 = 66$

आदि। क्या आप इन योगफलों से किसी प्रतिरूप का अनुमान लगा सकते हैं? इनके बारे में आप क्या कजेक्चर दे सकते हैं?

हल : एक कंजेक्चर यह हो सकता है:

(i) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग सम होता है।

अन्य कंजेक्चर यह हो सकता है:

(ii) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से विभाज्य होता है।

उदाहरण 5 : संख्याओं का निम्न प्रतिरूप लीजिए जिसे पास्कल-त्रिभुज कहा जाता है :

पंक्ति		संख्याओं का योग
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

पंक्तियों 7 और 8 की संख्याओं के योगफलों के लिए कंजेक्चर आप क्या दे सकते हैं? पंक्ति 21 की संख्याओं के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या आप एक प्रतिरूप देख रहे हैं? पंक्ति n की संख्याओं के योग के एक सूत्र के बारे में अनुमान लगाइए।

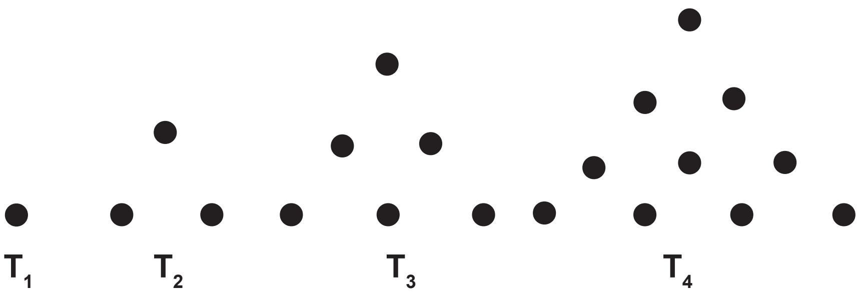
हल : पंक्ति 7 की संख्याओं का योग $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$ है।

पंक्ति 8 की संख्याओं का योग $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$ है।

पंक्ति 21 की संख्याओं का योग $= 2^{20}$ है।

पंक्ति n की संख्याओं का योग $= 2^{n-1}$ है।

उदाहरण 6 : तथाकथित त्रिभुजीय संख्याएँ T_n लीजिए:

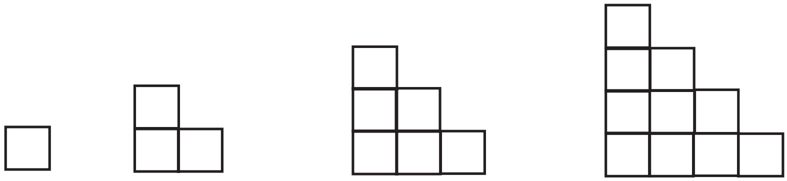


आकृति A 1.1

बिंदुओं का विन्यास इस प्रकार किया गया है कि इनसे एक त्रिभुज बनता है। यहाँ $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, आदि-आदि। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि T_5 क्या है? T_6 के बारे में आप क्या कह सकते हैं? T_n के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

T_n का एक कंजेक्चर दीजिए।

यदि आप इन्हें नीचे दी गई विधि से पुनः खींचें, तो इससे आपको सहायता मिल सकती है:



T_1 T_2 T_3 T_4

आकृति A 1.2

हल :

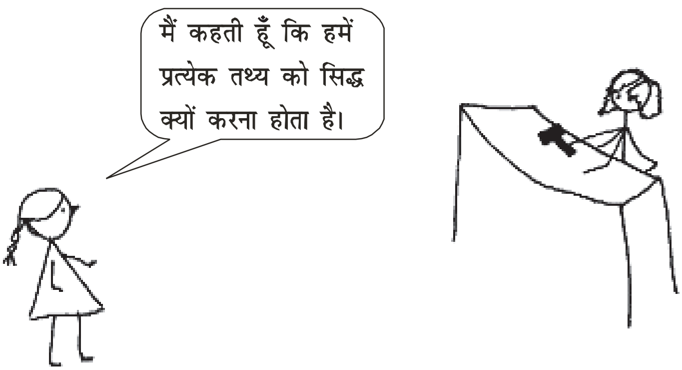
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

कंजेक्चर का एक अनुकूल उदाहरण जो कि अभी भी खुला हुआ है (अर्थात् अभी तक सिद्ध नहीं किया गया है कि यह सत्य है या असत्य), गणितज्ञ क्रिश्चियन गोल्डबाक (1690–1764) के नाम पर रखा गया गोल्डबाक कंजेक्चर है। इस कंजेक्चर का कथन यह है: "*4 से बड़े प्रत्येक सम पूर्णांक को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।*" यदि आप यह सिद्ध कर लेंगे कि यह परिणाम सत्य है या असत्य तो आप प्रसिद्ध हो जाएँगे।

यह देखकर आपको अवश्य आश्चर्य हुआ होगा कि गणित में हमारे सामने जो कुछ भी आता है, क्या उसे सिद्ध करना आवश्यक है, और यदि नहीं, तो क्यों नहीं?



वास्तविकता तो यह है कि गणित का प्रत्येक क्षेत्र कुछ कथनों पर आधारित होता है' जिन्हें हम सत्य मान लेते हैं और उन्हें सिद्ध नहीं करते। ये "स्व-प्रमाणित सत्य" हैं जिन्हें हम बिना उपपत्ति के

सत्य मान लेते हैं। इन कथनों को *अभिगृहीत* (*axioms*) कहा जाता है। अध्याय 5 में आप यूक्लिड के अभिगृहीतों और अभिधारणाओं (postulates) का अध्ययन कर चुके हैं (आजकल अभिगृहीतों और अभिधारणाओं के बीच कोई भेद नहीं रखा जाता है)।

उदाहरण के लिए युक्लिड की पहली अभिधारणा है:

किसी एक बिंदु से किसी अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।

और उनकी तीसरी अभिधारणा है:

कोई भी केंद्र और कोई भी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

ये कथन पूर्णतः सत्य दिखाई पड़ते हैं और यूक्लिड ने इन्हें सत्य मान लिया था। क्यों?

उन्होंने इसे सत्य इसलिए मान लिया था, क्योंकि हम प्रत्येक तथ्य को सिद्ध नहीं कर सकते और हमें कहीं न कहीं से प्रारंभ तो करना ही पड़ता है। इसके लिए, हमें कुछ कथनों की आवश्यकता होती है, जिन्हें हम सत्य मान लेते हैं और फिर इन अभिगृहीतों पर आधारित तर्क के नियमों का प्रयोग करके हम अपने ज्ञान का निर्माण कर सकते हैं।

आपको यह जानकर आश्चर्य हो सकता है कि तब हम उन सभी कथनों को स्वीकार क्यों नहीं कर लेते जो स्व-प्रमाणित प्रतीत होते हैं। इसके अनेक कारण हैं। प्रायः हमारा अंतर्ज्ञान गलत सिद्ध हो सकता है; चित्र या प्रतिरूप हमें धोखा दे सकते हैं और फिर हमारे सामने केवल एक ही विकल्प बच जाता है कि दिए हुए तथ्य को सिद्ध करें। उदाहरण के लिए, हममें से अनेक व्यक्ति यह विश्वास करते हैं कि यदि एक संख्या को एक अन्य संख्या से गुणा करें, तो प्राप्त परिणाम दोनों संख्याओं से बड़ा होगा। परन्तु हम यह जानते हैं कि यह सदैव सत्य नहीं होता है। उदाहरण के लिए, $5 \times 0.2 = 1$ है, जो कि 5 से कम है।

अब आप नीचे दी गई आकृति देखिए। कौन सा रेखाखंड अधिक लंबा है, AB या CD?

आकृति A 1.3

दोनों ही रेखाखंड ठीक-ठीक समान लंबाई के हैं, यद्यपि AB छोटा दिखाई पड़ता है।

तब आप अभिगृहीतों की मान्यता के संबंध में आश्चर्य कर सकते हैं। आपने अंतर्ज्ञान के आधार पर वे अभिगृहीत लिए गए हैं जो स्व-प्रमाणित दिखाई पड़ते हैं। फिर भी संभव है कि बाद में चलकर हमें पता चल सकता है कि अमुक अभिगृहीत सत्य नहीं है। इस संभावना से किस प्रकार बचाव किया जाए? इसके लिए हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं?

(i) अभिगृहीतों की संख्या कम से कम रखिए। उदाहरण के लिए, यूक्लिड के केवल अभिगृहीतों और 5 अभिधारणाओं के आधार पर हम सैकड़ों परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं।

(ii) सुनिश्चित हो जाइए कि अभिगृहीत संगत (अविरोधी) (consistent) है।

हम अभिगृहीतों के संग्रह को *असंगत* (inconsistent) तब कहते हैं जबकि हम इनका प्रयोग करते हुए, यह सिद्ध कर लें कि इनमें से एक अभिगृहीत सत्य नहीं है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित दो कथन लीजिए। यहाँ हम यह दिखाएँगे कि ये कथन असंगत हैं।

कथन 1 : कोई भी पूर्ण संख्या अपनी परवर्ती संख्या के बराबर नहीं होती।

कथन 2 : एक पूर्ण संख्या को शून्य से भाग देने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

(स्मरण रहे कि **शून्य से दिया गया भाग परिभाषित नहीं है।**) परन्तु, एक क्षण के लिए यह मान लीजिए कि ऐसा संभव है और फिर देखते हैं कि क्या होता है।)

कथन 2 से हमें $\frac{1}{0} = a$ प्राप्त होता है, जहाँ a एक पूर्ण संख्या है। इससे यह पता चलता है कि $1 = 0$ है। परन्तु कथन 1 को, जो कहता है कि कोई भी पूर्ण संख्या अपनी परवर्ती पूर्ण संख्या के बराबर नहीं होती, यह असत्य सिद्ध कर देता है।

(iii) कभी न कभी एक असत्य अभिगृहीत के कारण अंतर्विरोध अवश्य होगा। *हम अंतर्विरोध तब मानते हैं जबकि हमें एक ऐसा कथन प्राप्त होता है, जिससे कि कथन और उसका निषेध (negation) दोनों ही सत्य हो जाएँ।* उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए कथन 1 और कथन 2 को पुनः लीजिए।

कथन 1 से हम यह परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं कि $2 \neq 1$ है।

अब आप $x^2 - x^2$ लीजिए। इसका गुणनखंडन हम दो विधियों से कर सकते हैं :

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ और

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

अतः, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$ हुआ।

कथन 2 के अनुसार, हम दोनों पक्षों से $(x - x)$ काट सकते हैं।

तब हमें $x = 2x$ प्राप्त होता है, जिससे यह पता चलता है कि $2 = 1$ है।

अतः कथन $2 \neq 1$ और इसका निषेध $2 = 1$ दोनों ही सत्य हैं। यह एक अंतर्विरोध है। यह अंतर्विरोध असत्य अभिगृहीत के कारण है, जोकि यह है कि एक पूर्ण संख्या को 0 से भाग देने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

अतः, हम जिन कथनों को अभिगृहीत मानते हैं, उसके लिए बहुत सोच-विचार और अंतर्दृष्टि की आवश्यकता होती है। इस संबंध में हमें यह अवश्य सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि इनसे कोई असंगतता या तर्कसंगत अंतर्विरोध न हो, फिर भी, कभी-कभी अभिगृहीतों या अभिधारणों के चयन से कुछ नए तथ्यों का पता लगता है। अध्याय 5 से आप यूक्लिड के पाँचवीं अभिधारणा और अयूक्लिडीय ज्यामितियों के आविष्कार से आप परिचित हैं। वहाँ आपने यह देखा है कि गणितज्ञों का यह विश्वास था कि पाँचवीं अभिधारणा को एक अभिधारणा लेने की आवश्यकता नहीं है और वास्तव में यह एक प्रमेय है, जिसे पहली चार अभिधारणाओं की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है। आश्चर्य है कि इन कार्यों से अयूक्लिडीय ज्यामितियों का आविष्कार हो गया।

अभिगृहीत, प्रमेय और कंजेक्चर के बीच के अंतरों को बताते हुए, हम इस अनुच्छेद को यहीं समाप्त करते हैं। **अभिगृहीत** एक गणितीय कथन है जिसे बिना उपपत्ति के सत्य मान लिया जाता है। कंजेक्चर एक गणितीय कथन है जिसकी सत्यता या असत्यता को अभी स्थापित करना शेष है, और प्रमेय एक गणितीय कथन है जिसकी सत्यता तार्किक रूप से स्थापित की गई है।

प्रश्नावली A 1.3

1. कोई भी तीन क्रमागत सम संख्याएँ लीजिए और उनका गुणनफल ज्ञात कीजिए : उदाहरण के लिए, $2 \times 4 \times 6 = 48, 4 \times 6 \times 8 = 192$, आदि आदि। इन गुणनफलों के तीन कंजेक्चर बनाइए।

2. पास्कल-त्रिभुज पर आ जाइए।

पंक्ति $1 : 1 = 11^0$

पंक्ति $2 : 1 \;\; 1 = 11^1$

पंक्ति $3 : 1 \;\; 2 \;\; 1 = 11^2$

पंक्ति 4 और पंक्ति 5 के लिए एक-एक कंजेक्चर बनाइए। क्या आपका कंजेक्चर सत्य है? क्या आपका कंजेक्चर पंक्ति 6 पर भी लागू होता है?

3. आइए हम त्रिभुजीय संख्याओं को पुनः देखें (आकृति A1.2) दो क्रमागत संख्याओं को जोड़िए। उदाहरण के लिए, $T_1 + T_2 = 4, T_2 + T_3 = 9, T_3 + T_4 = 16$ है।

$T_4 + T_5$ के बारे में आपका क्या कहना है? $T_{n-1} + T_n$ का एक कंजेक्चर बनाइए।

4. निम्नलिखित प्रतिरूप देखिए :

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का एक कंजेक्चर बनाइए:

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

जाँच कीजिए कि आपका कंजेक्चर सत्य है या नहीं।

5. इस पुस्तक में प्रयुक्त पाँच अभिगृहीत (अभिधारणाएँ) बताइए।

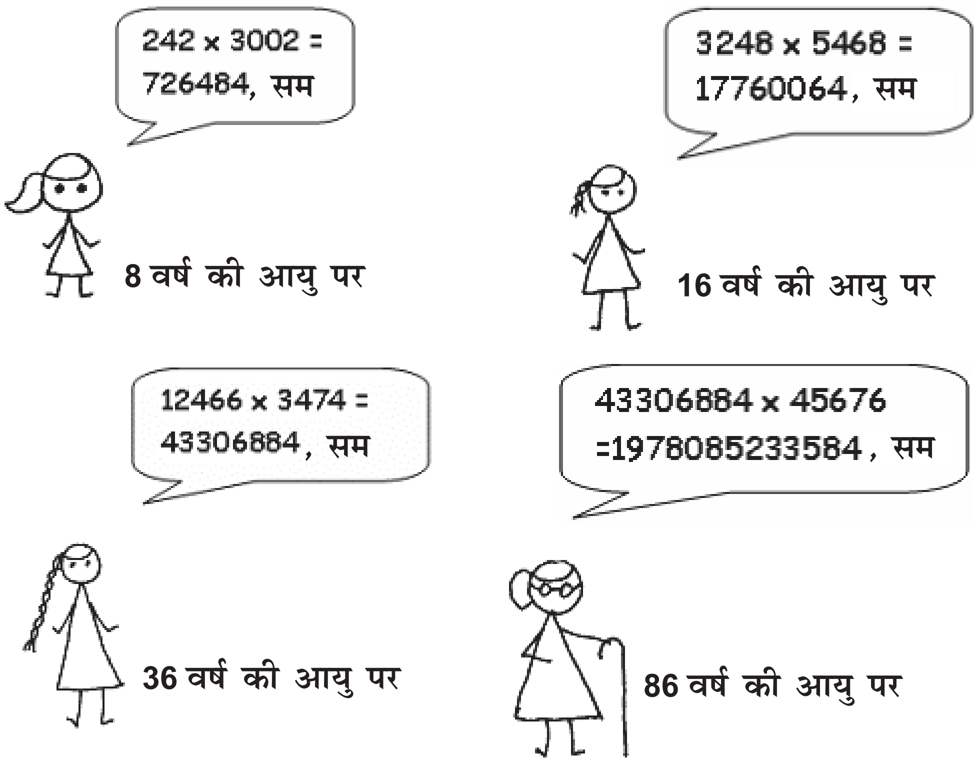
A1.5 गणितीय उपपत्ति क्या है?

आइए हम उपपत्तियों के विभिन्न पहलुओं पर विचार करें। सबसे पहले हम सत्यापन (verification) और उपपत्ति (proof) के बीच के अंतर को समझेंगे। गणित में उपपत्तियों का अध्ययन करने से पहले, आपसे कथनों को सत्यापित करने के लिए कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, उदाहरणों के साथ यह सत्यापित करने के लिए कहा जा सकता है कि "दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है"। अतः इसके लिए आप यदृच्छया दो सम संख्या ले सकते हैं। मान लीजिए वे संख्याएँ 24 और 2006 ली जा सकती हैं और जाँच की जा सकती हैं कि $24 \times 2006 = 48144$ एक सम संख्या है। इस तरह के और उदाहरण लेकर भी आप यह क्रिया कर सकते हैं।

आपको कक्षा में अनेक त्रिभुज खींचने और इनके अंतःकोणों का योग अभिकलित करने के लिए कहा जा सकता है। मापन में त्रुटियाँ न होने पर त्रिभुज के अंतःकोणों का योग $180°$ होता है।

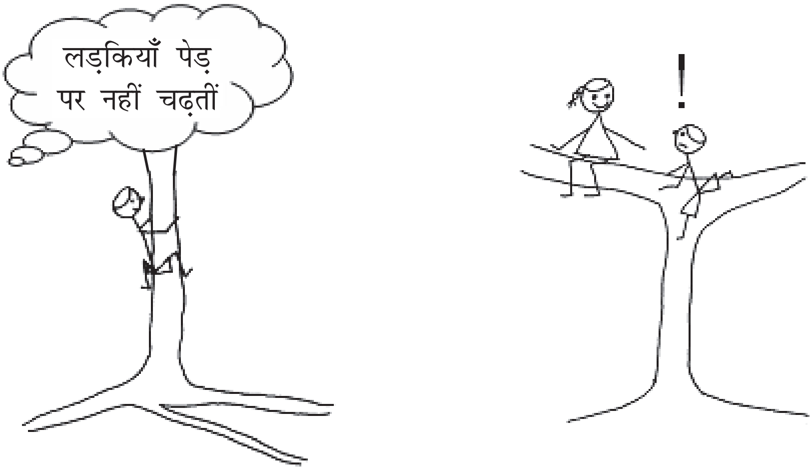
इस विधि में त्रुटि (flaw) क्या है? ऐसी अनेक समस्याएँ हैं, जिनका सत्यापन करना है। इसकी सहायता से आप यह तो कह सकते हैं कि जिस कथन को आप सही मानते हैं वह सत्य है, परन्तु आप इस बात से सुनिश्चित नहीं हो सकते कि यह सभी स्थितियों के लिए सत्य है। उदाहरण के लिए, सम संख्याओं के अनेक युग्मों के गुणन से आप यह अनुमान तो लगा सकते हैं कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है। फिर भी, आप सुनिश्चित नहीं हो पाते कि सम संख्याओं के सभी युग्मों का गुणनफल सम है। आप व्यक्तिगत रूप से सम संख्याओं के सभी युग्मों के गुणनफलों की जाँच नहीं कर सकते। यदि ऐसा आप कर पाते तो कार्टून में दिखाई गई लड़की की भाँति अपने शेष जीवन में सम संख्याओं के गुणनफलों का परिकलन करते ही रहते। इसी प्रकार, कुछ ऐसे भी त्रिभुज हो सकते हैं जिन्हें अभी तक आपने नहीं बनाया है और जिनके अंतःकोणों का योग $180°$ नहीं है। हम सभी संभव त्रिभुजों के अंतःकोणों को नहीं माप सकते।



प्रायः सत्यापन भी भ्रामक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, पहले किए गए सत्यापनों के आधार पर पास्कल-त्रिभुज (प्रश्नावली A1.3 का प्रश्न 2) से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $11^5 = 15101051$ है। परन्तु वास्तव में $11^5 = 161051$ है।

अतः आपको एक अन्य विधि से सोचना होगा जो कि केवल कुछ स्थितियों के सत्यापन पर ही निर्भर न हो। एक अन्य विधि है जिसमें कथन को सिद्ध करके दिखाया जाता है। वह प्रक्रम, जो केवल तर्कसंगत तर्कों के आधार पर गणितीय कथन की सत्यता स्थापित कर सकता है उसे *गणितीय उपपत्ति* (*mathematical proof*) कहा जाता है।

अनुच्छेद A1.2 के उदाहरण 2 में, आपने यह देखा है कि गणितीय कथन को असत्य स्थापित करने के लिए एक प्रत्युदाहरण प्राप्त कर लेना ही पर्याप्त है। अतः, यद्यपि हजारों स्थितियाँ लेकर एक गणितीय कथन की जाँच करके अथवा सत्यापन करके इसकी मान्यता स्थापित करना पर्याप्त नहीं होता। फिर भी, इसके लिए एक ऐसा प्रत्युदाहरण प्राप्त कर देना ही पर्याप्त होता है जो कथन को असत्य सिद्ध कर देता है (अर्थात् यह दिखाना कि कुछ असत्य है)। इस बात पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है।



गणितीय कथन को असत्य दर्शाने के लिए एक प्रत्युदाहरण ज्ञात कर लेना ही पर्याप्त होता है।

अतः, 7 + 5 = 12 कथन दो विषम संख्याओं का योग विषम होता है, का एक प्रत्युदाहरण है।

आइए अब हम एक उपपत्ति के आधारभूत अवयवों की सूची देखें :

(i) एक प्रमेय को सिद्ध करने के लिए, हमें इस बात का एक स्थूल विचार (rough idea) होना चाहिए कि यह प्रक्रिया किस प्रकार की जाती है।

(ii) प्रमेय में पहले से दी गई सूचनाओं (अर्थात् परिकल्पना) को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए और प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण के लिए, प्रमेय A1.2 में, जो यह है कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है, हमें दो सम प्राकृत संख्याएँ दी हुई हैं। अत: हमें इनके गुणों का प्रयोग करना चाहिए। (अध्याय 2 के) गुणनखंड प्रमेय में एक बहुपद $p(x)$ दिया गया है और बताया गया है कि $p(a) = 0$ का यह दर्शाने के लिए आपको प्रयोग करना है कि $(x - a)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, गुणनखंड प्रमेय के विलोम (converse) के लिए यह दिया गया है कि $(x - a)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है और इसका प्रयोग आपको इस परिकल्पना (hypothesis) को सिद्ध करने के लिए करना है कि $p(a) = 0$ है।

एक प्रमेय को सिद्ध करने के प्रक्रम में, आप रचनाओं का भी प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यह सिद्ध करने के लिए कि एक त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है, हम किसी एक भुजा के समांतर और उस भुजा के सम्मुख शीर्ष से होकर जाने वाली एक रेखा खींचते हैं और समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करते हैं।

(iii) उपपत्ति में गणितीय कथनों का एक उत्तरोत्तर (successive) अनुक्रम होता है। उपपत्ति का प्रत्येक कथन उपपत्ति के पिछले कथन से, पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, एक अभिगृहीत से या अपनी परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित हो जाता है।

(iv) एक तार्किक रूप से सही क्रम में विन्यासित गणितीय रूप से सत्य कथनों के अनुक्रम का निष्कर्ष वही होना चाहिए जिसे हम सिद्ध करना चाहते हैं, अर्थात् यह वह होना चाहिए जिसका प्रमेय में दावा किया गया है।

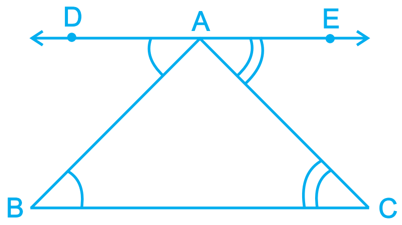
इन अवयवों को समझने के लिए, हम प्रमेय A1.1 और उसकी उपपत्ति का विश्लेषण करेंगे। आप अध्याय 6 में इस प्रमेय को पढ़ चुके हैं। परन्तु पहले हम ज्यामिति की उपपत्तियों के संबंध में कुछ टिप्पणी देंगे। प्राय: हम प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए आकृतियों या आरेखों की सहायता लेते हैं और यह एक अति महत्वपूर्ण बात है। फिर भी, उपपत्ति के प्रत्येक कथन को केवल तर्क की सहायता से स्थापित करना होता है। प्राय: हमने विद्यार्थियों को यह कहते सुना है कि "वे दो कोण बराबर हैं, क्योंकि आकृति में वे बराबर दिखाई पड़ते हैं" या "वह कोण 90° का होगा, क्योंकि दो रेखाएँ ऐसी दिखाई पड़ती हैं जैसे वे एक-दूसरे पर लंब हैं।" अत:, जो कुछ भी आप देखते हैं, उससे धोखा न खा जाइए। आकृति A1.4 को पुन: ध्यान से देखिए।

अत: आइए अब हम प्रमेय A1.1 लें।

प्रमेय A1.1 : *एक त्रिभुज के अंत:कोणों का योगफल* 180° *होता है।*

उपपत्ति : त्रिभुज ABC लीजिए (देखिए आकृति A1.4)

हमें यह सिद्ध करना है कि $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ (1)



आकृति A1.4

BC के समांतर एक रेखा DE खींचिए जो A से होकर जाती है। (2)

DE, BC के समांतर है और AB एक तिर्यक रेखा (transversal) है।

अत:, $\angle$ DAB और $\angle$ ABC एकांतर कोण हैं। इसलिए अध्याय 6 के प्रमेय 6.2 के अनुसार, ये कोण बराबर हैं। अर्थात् $\angle DAB = \angle ABC$ है। (3)

इसी प्रकार, $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

इसलिए, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

परन्तु $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ है, क्योंकि इनसे एक ऋजु कोण (straight angle) बनता है। (6)

अत:, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$ (7)

अब हम उपपत्ति में प्रयुक्त प्रत्येक चरण पर टिप्पणी देंगे।

चरण 1 : क्योंकि हमारे प्रमेय का संबंध त्रिभुज के एक गुण से है, इसलिए सबसे पहले हम एक त्रिभुज लेंगे।

चरण 2 : यह एक मुख्य विचार है–अंर्तज्ञानात्मक प्रारंभिक कदम या यह समझ लेना कि कौन सी प्रक्रिया अपनाई जाए जिससे हम प्रमेय सिद्ध कर सकें। प्राय: ज्यामितीय उपपत्तियों में रचना करने की आवश्यकता होती है।

चरण 3 और 4 : इस तथ्य का प्रयोग करके कि DE, BC के समांतर है (अपनी रचना से) और पहले सिद्ध किए गए प्रमेय 6.2 से, जो यह है कि यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती हो, तो एकांतर कोण बराबर होते हैं, यहाँ हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि $\angle DAE = \angle ABC$ और $\angle CAE = \angle ACB$ है।

चरण 5 : यहाँ हम निम्नलिखित निगमित करने के लिए यूक्लिड के अभिग्रहीत (देखिए अध्याय 5) का प्रयोग करते हैं, जो यह है "यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूरे बराबर होते हैं।"

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$$

अर्थात् त्रिभुज के अंत:कोणों का योग एक ऋजु रेखा पर के कोणों के योग के बराबर होता है।

चरण 6 : यह दिखाने के लिए कि $\angle$ DAB +$\angle$ BAC + $\angle$ CAE = 180° है, हम अध्याय 6 के रैखिक युग्म अभिगृहीत का प्रयोग करते हैं, जिसका कथन यह है कि एक ऋजु रेखा पर के कोणों का योग 180° होता है।

चरण 7 : यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि $\angle$ ABC + $\angle$ BAC + $\angle$ ACB = $\angle$ DAB + $\angle$ BAC + $\angle$ CAE = 180° है, हम यूक्लिड के अभिगृहीत का प्रयोग करते हैं, जो यह है "वे वस्तुएँ जो समान वस्तु के बराबर हैं, एक-दूसरे के बराबर होती हैं। ध्यान दीजिए कि चरण 7 उस प्रमेय द्वारा किया गया दावा है, जिसे हमें सिद्ध करना है।

अब हम विश्लेषण किए बिना ही प्रमेयों A1.2 और A1.3 को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय A1.2 : *दो सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।*

उपपत्ति : मान लीजिए x और y कोई दो सम प्राकृत संख्याएँ हैं।

हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि xy सम है।

क्योंकि x और y सम हैं, इसलिए ये 2 से भाज्य हैं। इसीलिए, $x = 2m$ के रूप में, जहाँ m कोई प्राकृत संख्या है और $y = 2n$ के रूप में, जहाँ n कोई प्राकृत संख्या है, व्यक्त किया जा सकता है।

तब $xy = 4\,mn$ है और क्योंकि $4\,mn$, 2 से भाज्य है, इसलिए xy भी दो से भाज्य होगा।

अतः, xy सम है।

प्रमेय A1.3 : *किन्हीं भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।*

उपपत्ति : कोई भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्या $2n$, $2n + 2$ और $2n + 4$ के रूप की होगी, जहाँ n कोई प्राकृत संख्या है। हमें यह सिद्ध करना है कि इनका गुणनफल $2n(2n + 2)(2n + 4)$ 16 से भाज्य है।

अब, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$$

अब हमारे सामने दो स्थितियाँ हैं: या तो n सम है या विषम है। आइए हम प्रत्येक स्थिति की जाँच करें।

मान लीजिए n सम है। तब हम $n = 2m$ लिख सकते हैं, जहाँ m कोई प्राकृत संख्या है।

साथ ही, तब $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$

अतः, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 से भाज्य है।

अब, मान लीजिए n विषम है। तब $n + 1$ सम होगा और हम $n + 1 = 2r$ लिख सकते हैं, जहाँ r कोई प्राकृत संख्या है।

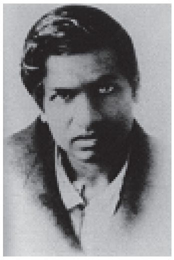
तब
$$\begin{aligned} 2n(2n + 2)(2n + 4) &= 8n(n + 1)(n + 2) \\ &= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1) \\ &= 16r(2r - 1)(2r + 1) \end{aligned}$$

अतः, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 से भाज्य है।

अत:, दोनों स्थितियों में, हमने यह दर्शा दिया है कि किन्ही भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।

गणितज्ञों ने किस प्रकार परिणामों की खोज की है और किस प्रकार औपचारिक दृढ़ उपपत्तियाँ लिखी गई हैं इनके अंतर पर कुछ टिप्पणी देते हुए, हम इस अध्याय को यहीं समाप्त करते हैं। जैसा कि ऊपर बताया गया है, प्रत्येक उपपत्ति का एक मुख्य अंतर्ज्ञानात्मक विचार (कभी-कभी एक से अधिक) होता है। गणितज्ञों की चिंतन-विधि और परिणामों का पता लगाने में अंतर्ज्ञान केंद्र बिंदु काम करता है। प्राय: प्रमेय की उपपत्ति गणितज्ञों के मस्तिष्क में अपने आप आने लगती है। सही हल या उपपत्ति प्राप्त करने से पहले विभिन्न चिंतन-विधियों और तर्क और उदाहरणों के साथ गणितज्ञ प्राय: प्रयोग करता रहता है। सर्जनात्मक प्रावस्था के दब जाने के बाद ही सभी तर्कों को एक साथ लेकर उचित उपपत्ति प्रस्तुत की जाती है।

यहाँ यह उल्लेख कर देना आवश्यक है कि अपने कथनों तक पहुँचने के लिए, भारत के महान गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन ने उच्च स्तर के अंतर्ज्ञान का प्रयोग किया था, जिनके संबंध में उनका यह दावा था कि वे सत्य हैं। इनमें से अनेक जो सत्य सिद्ध हो गए हैं वे सुपरिचित प्रमेय हो गए हैं। जो अभी तक सिद्ध नहीं हो पाए हैं उनमें से कुछ दावों (कंजेक्चर) को सिद्ध करने (या असत्य सिद्ध करने) में आज भी पूरे विश्व के गणितज्ञ लगे हुए हैं।



श्रीनिवास रामानुजन
(1887–1920)
आकृति A1.5

प्रश्नावली A1.4

1. निम्नलिखित कथनों को असत्य सिद्ध करने के लिए प्रत्युदाहरण ज्ञात कीजिए।

(i) यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(ii) वह चतुर्भुज, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं एक वर्ग होता है।

(iii) वह चतुर्भुज, जिसके सभी कोण बराबर हैं, एक वर्ग होता है।

(iv) यदि a और b पूर्णांक हैं, तो $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ है।

(v) $2n^2 + 11$ एक अभाज्य संख्या है, जहाँ n पूर्ण संख्या है।

(vi) सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए $n^2 - n + 41$ एक अभाज्य संख्या है।

2. आप अपने पसंद की उपपत्ति लीजिए और ऊपर चर्चित की गई विधियों, (अंर्तज्ञानात्मक प्रारम्भिक कदम क्या है, क्या दिया हुआ है, क्या निगमित किया गया है, किन प्रमेयों और अभिगृहीतों का प्रयोग किया गया है, आदि आदि) के अनुसार इसका चरणश: विश्लेषण कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि दो विषम संख्याओं का योग सम होता है।

4. सिद्ध कीजिए कि दो विषम संख्याओं का गुणनफल विषम होता है।

5. सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से भाज्य होता है।

6. सिद्ध कीजिए कि उस रेखा पर अपरिमित रूप से अनेक बिंदु होते हैं जिसका समीकरण $y = 2x$ है।

(*संकेत :* बिंदु $(n, 2n)$ लीजिए, जहाँ n कोई पूर्णांक है।)

7. आपके मित्र ने कभी आपको कहा होगा कि आप अपने मन में एक संख्या सोच लीजिए और उसके साथ विभिन्न क्रियाएँ कीजिए, और तब आपकी मूल संख्या जाने बिना ही उसने बता दिया होगा कि वह वास्तविक संख्या कौन-सी थी। आपके पास कौन-सी संख्या बची है। यहाँ दो उदाहरण दिए गए हैं। सिद्ध कीजिए कि ये दोनों उदाहरण सत्य क्यों हैं?

(i) एक संख्या लीजिए, उसका दो गुना कीजिए, उसमें नौ जोड़िए, अपनी मूल संख्या जोड़िए। इसे तीन से भाग दीजिए। अपनी मूल संख्या को इसमें से घटाइए। आपका परिणाम 7 है।

(ii) कोई भी तीन अंकों वाली एक संख्या लीजिए (उदाहरण के लिए 425 लीजिए) इन अंकों को उसी क्रम में दोबारा लिखकर एक छ अंक वाली संख्या बनाइए (425425)। आपकी नई संख्या 7,11 और 13 से भाज्य है।

A1.6 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. गणित में कोई कथन तब स्वीकार्य होता है जबकि यह कथन सदैव सत्य हो या असत्य हो।

2. यह दर्शाने के लिए कि गणितीय कथन असत्य है एक प्रत्युदाहरण ज्ञात कर लेना ही पर्याप्त होता है।

3. अभिगृहीत वे कथन हैं जिन्हें उपपत्ति बिना सत्य मान लिया गया है।

4. एक कंजेक्चर वह कथन है जिसे हम अपने गणितीय अंतर्ज्ञान के आधार पर सत्य मान लेते हैं, परन्तु जिन्हें हमें अभी सिद्ध करना है।

5. उस गणितीय कथन को, जिसकी सत्यता स्थापित (या सिद्ध) कर दी गई है, प्रमेय कहा जाता है।

6. गणितीय कथनों को सिद्ध करने का एक मुख्य तार्किक साधन निगमनिक तर्कण है।

7. उपपत्ति गणितीय कथनों का एक उत्तरोत्तर अनुक्रम होती है। उपपत्ति का प्रत्येक कथन पहले से ज्ञात कथन से, या पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, या एक अभिगृहीत से, या परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित किया जाता है।

परिशिष्ट 2

गणितीय निदर्शन का परिचय

A2.1 भूमिका

आप प्रारंभिक कक्षाओं से ही, अपने वास्तविक जगत से जुड़ी समस्याएँ हल करते आए हैं। उदाहरण के लिए, आपने साधारण ब्याज के प्रश्न संबंधित सूत्र का प्रयोग करके हल किए हैं। यह सूत्र (या समीकरण) ब्याज और इससे संबंधित अन्य तीन राशियों अर्थात् मूलधन, ब्याज-दर और अवधि के बीच का एक संबंध है। यह सूत्र **गणितीय प्रतिरूप** या **निदर्श** (**mathematical model**) का एक उदाहरण है। **गणितीय निदर्श** (**प्रतिरूप**) एक गणितीय संबंध होता है जो वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति की व्याख्या करता है।

गणितीय निदर्शों का प्रयोग वास्तविक जीवन से जुड़ी अनेक स्थितियों का हल ज्ञात करने में किया जाता है, जैसे

- उपग्रह छोड़ना।
- मानसून के आने की प्रागुक्ति करना।
- वाहनों से होने वाले प्रदूषण को नियंत्रित करना।
- बड़े शहरों में ट्रैफिक जाम को कम करना।

इस अध्याय में, हम आपको गणितीय निदर्श बनाने के प्रक्रम से, जिसे **गणितीय प्रतिरूपण** या **गणितीय निदर्शन** (**mathematical modelling**) कहा जाता है, परिचित कराएँगे। गणितीय निदर्शन में हम वास्तविक जीवन से जुड़ी एक समस्या लेते हैं और इसे एक तुल्य गणितीय समस्या के रूप में लिखते हैं। फिर हम गणितीय समस्या का हल करते हैं और इसके हल का निर्वचन (की व्याख्या) वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के पदों में करते हैं। इसके बाद, हम देखते हैं कि यह हल वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के संदर्भ में, किस सीमा तक मान्य है। अतः, गणितीय निदर्शन में लागू होने वाले *चरण* होते हैं: *सूत्रण* (*formulation*), *हल* (*solution*), निर्वचन (*व्याख्या*) (*interpretation*) और *मान्यकरण* (*validation*)।

सबसे पहले हम उस प्रक्रम को लेंगे जिसका प्रयोग आप अनुच्छेद A2.2 में शब्द–समस्याओं को हल करने में करेंगे। यहाँ हम कुछ शब्द–समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो आपके द्वारा पिछली कक्षाओं में हल की गई समस्याओं के समान हैं। बाद में चलकर आप यह देखेंगे कि जिन चरणों का प्रयोग आपने शब्द–समस्याओं को हल करने में किया है, उनमें से कुछ चरणों का प्रयोग गणितीय निदर्शन में भी किया जाता है।

अगले अनुच्छेद अर्थात् A2.3 में हम कुछ सरल निदर्शों (models) पर चर्चा करेंगे।

अनुच्छेद A 2.4 में हम निदर्शन के समग्र प्रक्रम (overall process) उसके लाभ और उसकी कुछ सीमाओं पर चर्चा करेंगे।

A2.2 शब्द समस्याओं का पुनर्विलोकन

इस अनुच्छेद में, हम कुछ शब्द–समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो उन समस्याओं के समान हैं जिन्हें आप पिछली कक्षाओं में हल कर चुके हैं। आइए हम सबसे पहले अनुक्रमानुपाती विचरण से संबंधित एक समस्या लें।

उदाहरण 1 : मैंने अपनी कार से 432 km की दूरी तय की और इसमें 48 लीटर पेट्रोल लगा। मुझे अपनी कार से उस स्थान तक जाना है जो 180 km दूर है। इसके लिए मुझे कितने पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

हल : यहाँ हम इस समस्या को हल करने में प्रयुक्त चरणों का उल्लेख करेंगे।

चरण 1 : सूत्रण : हम जानते हैं कि हम जितनी अधिक दूरी तय करेंगे उतने ही अधिक पेट्रोल की आवश्यकता होती है, अर्थात् पेट्रोल की मात्रा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी।

432 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = 48 लीटर

180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = ?

गणितीय वर्णन : मान लीजिए

x = मेरे द्वारा तय की जाने वाली दूरी

y = मेरे लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा

y , x के अनुक्रमानुपाती है।

अतः, $y = kx$, जहाँ k एक अचर है।

मैं, 48 लीटर पेट्रोल में 432 km की दूरी तय कर सकता हूँ।

अतः, $y = 48, x = 432$

इसलिए, $$k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$$

क्योंकि $$y = kx \text{ है,}$$

इसलिए $$y = \frac{1}{9}x \quad (1)$$

समीकरण (या सूत्र) (1) आवश्यक पेट्रोल की मात्रा और तय की गई दूरी के बीच का संबंध बताती है।

चरण 2 : हल : हमें 180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा ज्ञात करनी है। अत: हमें y का मान ज्ञात करना है, जबकि $x = 180$ है। समीकरण (1) में $x = 180$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

चरण 3 : निर्वचन (व्याख्या) : क्योंकि $y = 20$ है, इसलिए 180 km की दूरी तय करने के लिए हमें 20 लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी।

क्या यह बात आपकी समझ में आई है या नहीं कि सभी स्थितियों में सूत्र (1) को लागू नहीं किया जा सकता? उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि 432 km वाला मार्ग पहाड़ों में होकर है और 180 km वाला मार्ग समतल मैदान में है। पहाड़ी मार्ग से तो कार में पेट्रोल की खपत कुछ तेज दर से होगी, परन्तु 180 km वाले मार्ग से कार में पेट्रोल की खपत इस दर से नहीं होगी, अपितु धीमी दर से होगी। अत: यह सूत्र तभी लागू होता है जबकि वे सभी स्थितियाँ जो उस दर को प्रभावित करती हैं जिससे दोनों यात्राओं में पेट्रोल की खपत दर समान हो। या, यदि स्थितियों में अंतर हो, तो कार के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा पर इस अंतर का प्रभाव बहुत कम होगा। केवल ऐसी स्थिति में ही पेट्रोल की खपत तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी। समस्या हल करते समय, हम इसे मान कर चलते हैं, अर्थात् इसे हम परिकल्पलित कर लेते हैं।

उदाहरण 2 : मान लीजिए सुधीर ने 8% की साधारण वार्षिक ब्याज दर से ₹ 15000 निवेश किए हैं। निवेश से उसे जो धनराशि मिलती है उससे वह एक वाशिंग मशीन, जिसकी कीमत ₹ 19000 है, खरीदना चाहता है। बताइए कि वह कितनी अवधि के लिए ₹ 15000 निवेश करे जिससे कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए उसे पर्याप्त धनराशि प्राप्त हो जाए?

हल : चरण 1 : समस्या का सूत्रण : यहाँ हमें मूलधन और ब्याज-दर ज्ञात है। ब्याज वह धनराशि है जो कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए आवश्यक ₹ 15000 से अतिरिक्त धनराशि है। हमें वर्षों की संख्या ज्ञात करनी है।

गणितीय वर्णन : साधारण ब्याज का सूत्र $I = \frac{Pnr}{100}$ है,

जहाँ P = मूलधन

n = वर्षों की संख्या

r % = ब्याज-दर

I = अर्जित ब्याज

यहाँ मूलधन = ₹15000

सुधीर द्वारा वाशिंग मशीन खरीदने के लिए आवश्यक धन = ₹19000

अतः, अर्जित किया जाने वाला ब्याज = ₹19000 – 15000

= ₹4000

वर्षों की वह संख्या जिसमें ₹15000 की राशि जमा की गई है = n

8% की दर पर n वर्षों में ₹15000 पर ब्याज = I

तब,
$$I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

अतः,
$$I = 1200\,n \qquad (1)$$

उपरोक्त से वर्षों की संख्या और ब्याज के बीच का संबंध प्राप्त हो जाता है, जबकि 8% की वार्षिक दर पर ₹15000 निवेश किए गए हों।

हमें वह अवधि ज्ञात करना है जिसमें अर्जित ब्याज ₹4000 है। समीकरण (1) में I = 4000 रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$4000 = 1200\,n \qquad (2)$$

चरण 2 : समस्या का हल : समीकरण (2) का हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि $n = 3\frac{1}{3}$ और एक वर्ष का तिहाई 4 महीने होते हैं, इसलिए 3 वर्ष और 4 महीने बाद सुधीर वाशिंग मशीन खरीद सकता है।

क्या आप उन परिकल्पनाओं का अनुमान लगा सकते हैं, जिन्हें आपको ऊपर के उदाहरण में करना है? हम यहाँ यह मान लेते हैं कि उस अवधि में भी ब्याज-दर वही बनी रहेगी जिसमें हम ब्याज परिकलित करते हैं, अन्यथा सूत्र $I = \frac{Pnr}{100}$ लागू नहीं होगा। हमने यह भी मान लिया है कि उस समय तक वाशिंग मशीन की कीमत में कोई वृद्धि नहीं होती, जब तक कि सुधीर आवश्यक धनराशि एकत्रित नहीं कर लेता।

उदाहरण 3 : एक मोटर-बोट एक नदी में ऊर्ध्वप्रवाह (upstream) जाकर, नदी के किनारे बसे दो नगरों के बीच की दूरी छः घंटे में तय करती है। यही दूरी वह अनुप्रवाह (downstream) पाँच घंटे में तय करती है। यदि धारा की चाल 2 km/h हो, तो शांत जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : चरण 1 : सूत्रण : हमें नदी की धारा की चाल और दो स्थानों के बीच की दूरी तय करने का समय ज्ञात है। हमें शांत जल में बोट की चाल ज्ञात करनी है।

गणितीय वर्णन : मान लीजिए बोट की चाल x km/h है, लिया गया समय t घंटा है और तय की दूरी y km/h है। तब,

$$y = tx \tag{1}$$

है। मान लीजिए दो स्थानों के बीच की दूरी d km है।

ऊर्ध्वप्रवाह जाने में बोट की वास्तविक चाल = बोट की चाल – धारा की चाल,

क्योंकि बोट नदी के प्रवाह के विरुद्ध जा रही है।

अतः ऊर्ध्वप्रवाह में, बोट की चाल = $(x - 2)$ km/h

यदि यह ऊर्ध्वप्रवाह दो नगरों के बीच की दूरी तय करने में 6 घंटे लेती हो, तो समीकरण (1) से हमें यह प्राप्त होता है:

$$d = 6(x - 2) \tag{2}$$

अनुप्रवाह जाते समय बोट की चाल में नदी की चाल जोड़नी होती है।

अतः अनुप्रवाह में, बोट की चाल = $(x + 2)$ km/h

अनुप्रवाह इसी दूरी को तय करने में बोट 5 घंटा लेती है।

अतः,
$$d = 5(x + 2) \tag{3}$$

(2) और (3) से, हमें यह प्राप्त होता है:

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \tag{4}$$

चरण 2 : हल ज्ञात करना

समीकरण (4) को x में हल करने पर, हमें $x = 22$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : निर्वचन

क्योंकि $x = 22$ है, इसलिए शांत जल में मोटर-बोट की चाल 22 km/h होगी।

ऊपर के उदाहरण में, हम जानते हैं कि हर जगह नदी की चाल समान नहीं होती। किनारे के निकट यह धीरे प्रवाहित होती है और बीच धारा में तेज प्रवाहित होती है। बोट किनारे से चलना प्रारंभ करती है और नदी की बीच धारा की ओर जाती है। जब यह गंतव्य स्थान के निकट आ जाती है, तो इसकी चाल किनारे के निकट आते हुए कम होती जाती है। अतः बीच धारा में बोट की चाल और किनारे पर बोट की चाल में थोड़ा अंतर होता है। क्योंकि यह किनारे के निकट बहुत कम समय तक रहती

है, इसलिए नदी की चाल का यह अंतर केवल थोड़ी अवधि के लिए ही प्रभावित करता है। अत: नदी की चाल में हम इस अंतर की उपेक्षा कर सकते हैं। बोट की चाल में हुए थोड़े परिवर्तन की भी हम उपेक्षा कर सकते हैं। साथ ही, नदी की चाल के अतिरिक्त पानी (जल) और बोट की सतह के बीच का घर्षण भी बोट की वास्तविक चाल को प्रभावित करेगा। यहाँ भी हम यह मान लेते हैं कि यह प्रभाव बहुत कम है।

अत: यहाँ हम यह मान लेते हैं कि:

1. नदी की चाल और बोट की चाल पूरे समय अचर बनी रहती है।
2. बोट और पानी के बीच का घर्षण और वायु के कारण हो रहा घर्षण उपेक्षणीय है।

ऊपर की गई परिकल्पनाओं के आधार पर, हमने शांत जल में बोट की चाल ज्ञात की है।

जैसा कि ऊपर दी गई शब्द-समस्याओं में हमने देखा है कि एक शब्द-समस्या का हल करने में तीन चरण लागू होते हैं। ये चरण निम्नलिखित हैं :

1. **सूत्रण :** हम समस्या का विश्लेषण करते हैं और देखते हैं कि समस्या के हल में कौन-कौन से कारकों का अधिक प्रभाव है। ये **सुसंगत कारक (relevant factors)** कहलाते हैं। हमारे पहले उदाहरण में, सुसंगत कारक तय की गई दूरी और खपत किया गया पेट्रोल है। हमने मार्ग की अवस्था, चलाने की चाल जैसे अन्य कारकों की उपेक्षा कर ली है। अन्यथा समस्या इतनी कठिन हो जाएगी कि इसे हल करना अधिक कठिन हो जाएगा। जिन कारकों की हम उपेक्षा कर देते हैं, उन्हें **असंगत कारक (irrelevant factors)** कहा जाता है।

   तब हम एक या अधिक गणितीय समीकरणों के रूप में समस्या की गणितीयत: व्याख्या करते हैं।

2. **हल :** कुछ उपयुक्त विधियों की सहायता से चरण 1 में प्राप्त गणितीय समीकरणों को हल करके, हम समस्या का हल ज्ञात करते हैं।

3. **निर्वचन :** हम देखते हैं कि चरण 2 में प्राप्त हल का अर्थ मूल शब्द-समस्या के संदर्भ में क्या है।

यहाँ आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं। इन प्रश्नों के लिए ऊपर बताए गए तीन चरणों को लागू करके शब्द-समस्याओं को हल करने में जिन चरणों का प्रयोग किया जाता है, उन्हें आपने समझा है या नहीं। इसकी जाँच आप कर सकते हैं।

प्रश्नावली A 2.1

नीचे दी गई प्रत्येक समस्या में स्पष्ट रूप से बताइए कि ऊपर दिए गए चरणों 1, 2 और 3 को लागू करने में सुसंगत और असंगत कौन-कौन से कारक हैं।

1. मान लीजिए एक कंपनी को कुछ समय के लिए एक कंप्यूटर की आवश्यकता है। कंपनी या तो ₹ 2000 प्रति माह की दर से कंप्यूटर किराए पर ले सकती है या ₹ 25000 में एक

कंप्यूटर खरीद सकती है। यदि कंपनी को लंबी अवधि तक कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो कंपनी को इतना किराया देना पड़ेगा कि इससे सस्ता तो यह होगा कि वह कंप्यूटर खरीद ले। इसके विपरीत, यदि कंपनी को थोड़े समय, अर्थात् केवल एक महीने के लिए ही कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो ऐसी स्थिति में किराए पर कंप्यूटर लेना अधिक सस्ता पड़ेगा। उन महीनों की संख्या बताइए जिसके बाद कंप्यूटर को खरीदना अधिक सस्ता पड़ेगा।

2. मान लीजिए एक कार स्थान A से चलना प्रारंभ करती है और वह एक अन्य स्थान B की ओर 40 km/h की चाल से जाती है। उसी समय एक अन्य कार स्थान B से चलना प्रारंभ करती है और वह A की ओर 30 km/h की चाल से जाती है। यदि A और B के बीच की दूरी 100 km है, तो बताइए कि कितने समय बाद एक कार दूसरी कार से मिलेगी।

3. पृथ्वी से चंद्रमा लगभग 384000 km की दूरी पर है और पृथ्वी के प्रति परिक्रमा करने का पथ लगभग वृत्तीय है। यह मानकर कि चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा 24 घंटे में पूरा करता है, बताइए कि किस चाल से चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा करेगा। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

4. एक परिवार उन महीनों में, जिनमें वह वाटर हीटर का प्रयोग नहीं करता, बिजली के लिए औसतन ₹ 1000 भुगतान करता है। जिन महीनों में वह वाटर हीटर का प्रयोग करता है, उन महीनों में बिजली का औसत बिल ₹ 1240 आता है। वाटर हीटर का प्रयोग करने की लागत ₹ 8 प्रति घंटा है। एक दिन में वाटर हीटर का प्रयोग जितने औसत घंटों के लिए किया जाता है उसे ज्ञात कीजिए।

A2.3 कुछ गणितीय निदर्श

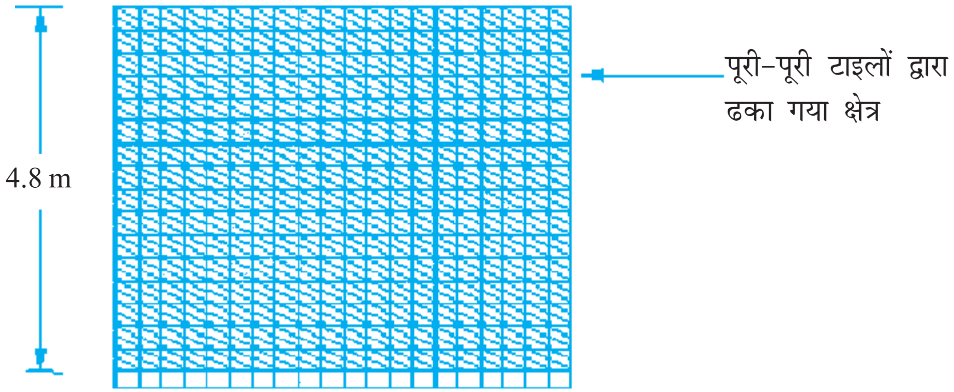
अभी तक अपनी चर्चा में हमने कोई नई बात नहीं कही है। इस अनुच्छेद में, हम पहले बताए गए चरणों में एक और चरण बढ़ा देंगे। इस चरण को **मान्यकरण (validation)** कहा जाता है। मान्यकरण का अर्थ क्या है? आइए हम देखें कि इसका अर्थ क्या है। वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति में, हम उस निदर्श को स्वीकार नहीं कर सकते जिससे प्राप्त उत्तर वास्तविकता से मेल नहीं खाता हो। वास्तविकता के विरुद्ध उत्तर की जाँच करने और यदि आवश्यक हो तो, गणितीय वर्णन में आपरिवर्तन करने के इस प्रक्रम को *मान्यकरण* कहा जाता है।

यह निदर्शन का एक अति महत्वपूर्ण चरण है। इस अनुच्छेद में, हम आपको इस चरण से परिचित कराएँगे।

इस संदर्भ में आइए पहले हम एक उदाहरण लें, जहाँ हमें मान्यकरण के बाद अपने निदर्श का आपरिवर्तन (modification) करने की आवश्यकता नहीं होती।

उदाहरण 4 : मान लीजिए आपके पास 6 मीटर लंबा और 5 मीटर चौड़ा एक कमरा है। आप इस कमरे के फर्श पर 30 cm की भुजा वाली वर्गाकार मोजाइक टाइलों को लगवाना चाहते हैं। इसके लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी? एक गणितीय निदर्श बनाकर इसे हल कीजिए।

हल : सूत्रण : इस समस्या को हल करने के लिए, हमें कमरे का क्षेत्रफल और एक टाइल का क्षेत्रफल लेना होता है। टाइल की एक भुजा की लंबाई 0.3 मीटर है। क्योंकि कमरे की लंबाई 6 मीटर है, इसलिए कमरे की लंबाई के अनुदिश एक पंक्ति में $\frac{6}{0.3} = 20$ टाइलें लगाई जा सकती हैं (देखिए आकृति A2.1)।



आकृति A 2.1

क्योंकि कमरे की चौड़ाई 5 मीटर है, और $\frac{5}{0.3} = 16.67$ है, अत:, एक स्तंभ में हम 16 टाइलें लगा सकते हैं। क्योंकि $16 \times 0.3 = 4.8$ है, इसलिए चौड़ाई के अनुदिश $5 - 4.8 = 0.2$ मीटर स्थान पर टाइलें नहीं लगी होंगी। इस भाग में (खाली स्थान में) साइज के अनुसार टाइलों को काटकर लगाना होगा। टाइल से बिना ढके फर्श की चौड़ाई 0.2 मीटर है, जो टाइल की लंबाई 0.3 m के आधे से अधिक है। अत:, हम एक टाइल को दो बराबर-बराबर आधे भागों में नहीं बाँट सकते और शेष भाग को ढकने के लिए दोनों आधे भागों का प्रयोग नहीं कर सकते।

गणितीय वर्णन:

आवश्यक टाइलों की कुल संख्या = (लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या × चौड़ाई में टाइलों की संख्या) + बिना ढके हुए क्षेत्र पर टाइलों की संख्या (1)

हल : जैसा कि हम ऊपर कह चुके हैं कि लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 20 है और चौड़ाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 16 है। अंतिम पंक्ति के लिए, हमें 20 और टाइलों की आवश्यकता होगी। इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$$

निर्वचन : फर्श पर लगाने के लिए 340 टाइलों की आवश्यकता होगी।

मान्यकरण : व्यावहारिक जीवन में आपका मिस्त्री आपसे कुछ और टाइल मांग सकता है, क्योंकि साइज के अनुसार काटते समय टाइलें टूट-फूट गई थीं। आपका मिस्त्री इस काम में कितना कुशल है उस पर ही टाइलों की संख्या निर्भर करेगी। परन्तु, इसके लिए समीकरण (1) का आपरिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं है। इससे हमें एक स्थूल अनुमान (rough estimate) मिल जाता है कि कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी। अत:, यहाँ हम रुक सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति लें।

उदाहरण 5 : वर्ष 2000 में संयुक्त राष्ट्र के 191 सदस्य देशों ने एक घोषणा पर हस्ताक्षर किए। अपनी घोषणा में ये सभी देश, वर्ष 2015 तक कुछ विकास लक्ष्य प्राप्त करने पर सहमत थे। इन लक्ष्यों को *मिलेनियम विकास लक्ष्य* कहा जाता है। इनमें से एक लक्ष्य लिंग समानता को बढ़ाना है। यह लक्ष्य प्राप्त कर लिया गया है कि नहीं, इसका एक सूचक प्राथमिक, माध्यमिक और तृतीयक (tertiary) शिक्षा में लड़कियों और लड़कों का अनुपात है। भारत में, जो कि घोषणा पर हस्ताक्षर करने वाला एक सदस्य देश है, इस अनुपात में वृद्धि हुई है। उन लड़कियों के प्रतिशत आंकड़े, जिन्होंने विद्यालय में प्रवेश लिया है, सारणी A 2.1 में दिए गए हैं।

सारणी A 2.1

वर्ष	नामांकन (% में)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

स्रोत : *शैक्षिक आंकड़े, वेब पेज, शिक्षा विभाग भारत सरकार*

* *बताता है कि आंकड़े अनंतिम है।*

इन आंकड़ों का प्रयोग करके, गणितीय रूप में वह दर बताइए जिस अनुपात पर प्राथमिक विद्यालयों में भर्ती की गई लड़कियों की संख्या बढ़ रही है। उस वर्ष का भी अनुमान लगाइए जबकि भर्ती की गई लड़कियों की संख्या 50% तक पहुँच जाएगी।

हल : आइए पहले हम इस समस्या को एक गणितीय समस्या में बदल दें।

चरण 1 : सूत्रण : *सारणी* A2.1 में वर्ष 1991–92, 1992–93 आदि के नामांकन दिए गए हैं। क्योंकि विद्यार्थी शैक्षिक वर्ष के प्रारंभ में प्रवेश लेते हैं, इसलिए हम वर्षों को 1991, 1992 आदि ले सकते हैं। आइए हम यह मान लें कि प्राथमिक विद्यालयों में प्रवेश लेने वाली लड़कियों के प्रतिशत में उसी दर से वृद्धि होती रहती है जैसा कि सारणी A2.1 में दिया गया है। अतः विशिष्ट वर्ष का महत्व नहीं है, अपितु वर्षों की संख्या का महत्व है (इसी प्रकार की स्थिति तब थी जबकि 8% की दर से तीन वर्षों के लिए ₹ 15000 का साधारण ब्याज ज्ञात किया था। यहाँ इस बात का कोई महत्व नहीं है कि तीन वर्ष की अवधि 1999 से 2003 है या 2001 से 2004 है (महत्वपूर्ण है वर्षों में ब्याज दर का होना)। यहाँ भी, हम यह देखेंगे कि 1991 के बाद नामांकन में किस प्रकार वृद्धि हुई है। ऐसा हम 1992 के बाद बीत गए वर्षों की संख्या और संगत नामांकन की तुलना द्वारा करेंगे। आइए हम 1991 को 0 वाँ वर्ष मान लें और 1992 के लिए 1 लिखें, क्योंकि 1991 के बाद 1992 तक 1 वर्ष निकल गया है। इसी प्रकार, 1993 के लिए 2, 1994 के लिए 3 आदि लिखेंगे। अतः, अब सारणी A2.1, सारणी A 2.2 के समान दिखाई पड़ेगी।

सारणी A2.2

वर्ष	नामांकन (% में)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

नामांकन में हुई वृद्धि नीचे सारणी में दी गई है:

सारणी A2.3

वर्ष	नामांकन (% में)	वृद्धि
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 से 1992 तक की एक वर्ष की अवधि में नामांकन 41.9% से बढ़कर 42.6% तक हो गया। अर्थात् नामांकन में 0.7% की वृद्धि हुई है। दूसरे वर्ष के अंत में, इसमें 0.1% की वृद्धि हुई है अर्थात् यह 42.6% से बढ़कर 42.7% हो गया है। ऊपर की सारणी से, हम वर्षों की संख्या और प्रतिशत में कोई निश्चित संबंध प्राप्त नहीं कर सकते। परन्तु वृद्धि अपरिवर्ती बनी रहती है। केवल पहले वर्ष में और दसवें वर्ष में अधिक वृद्धि हुई है। इन मानों का माध्य यह है:

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

आइए हम यह मान लें कि नामांकन में अपरिवर्ती रूप से (steadily) 0.22 प्रतिशत की दर से वृद्धि हो रही है।

गणितीय वर्णन : हमने यह मान लिया है कि नामांकन में 0.22% प्रति वर्ष की दर से अपरिवर्ती रूप से वृद्धि हो रही है।

अत:, पहले वर्ष में नामांकन प्रतिशत (EP) $= 41.9 + 0.22$

दूसरे वर्ष में, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

तीसरे वर्ष में, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

अत:, nवें वर्ष में नामांकन प्रतिशत $= 41.9 + 0.22n$, जहाँ $n \geq 1$ है। (1)

अब, हमें वर्षों की वह संख्या भी ज्ञात करनी है जिसमें नामांकन 50% पहुँच जाएगा। अत: हमें निम्नलिखित समीकरण से n का मान ज्ञात करना है:

$$50 = 41.9 + 0.22n \quad (2)$$

चरण 2 : हल : n के लिए (2) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि वर्षों की संख्या एक पूर्णांकीय मान है, इसलिए हम अगला उच्च पूर्णांक 37 लेंगे। अत:, 1991 + 37 = 2028 में नामांकन प्रतिशत 50% हो जाएगा।

शब्द-समस्या को तो प्राय: हम यहीं तक हल करते हैं। लेकिन, चूँकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति पर अध्ययन कर रहे हैं, इसलिए हमें यह देखना होगा कि किस सीमा तक यह मान वास्तविक स्थिति से मेल खाता है।

चरण 4 : मान्यकरण : आइए हम यह देखें कि सूत्र (2) वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। आइए हम सूत्र (2) का प्रयोग करके ज्ञात वर्षों के मान ज्ञात करें और अंतर ज्ञात करके, ज्ञात मानों के साथ इनकी तुलना करें। सारणी A2.4 में ये मान दिए गए हैं।

सारणी A2.4

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) द्वारा दिए गए मान (% में)	अंतर (% में)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

जैसा कि आप देख सकते हैं कि सूत्र (2) द्वारा दिए गए कुछ मान वास्तविक मान से लगभग 0.3% से 0.5% तक कम हैं। इससे लगभग 3 से 5 वर्षों का अंतर आ सकता है, क्योंकि वास्तव में प्रति वर्ष वृद्धि 1% से 2% तक है। इतना अंतर स्वीकार्य हो सकता है और हम यहीं रुक सकते हैं। इस स्थिति में, हमारा गणितीय निदर्श (2) है।

मान लीजिए कि यह त्रुटि काफी बड़ी है और हमें इस निदर्श में सुधार लाना है। तब हमें चरण 1 पर पुनः लौटकर जाना होगा, पुनः सूत्रण करना होगा और समीकरण (1) को बदलना होगा। आइए हम इसे करें।

चरण 1 : पुनःसूत्रण : हम यहाँ भी यह मान लेंगे कि नामाकंन प्रतिशत के मानों में अपरिवर्ती रूप से 0.22% की वृद्धि हो रही है। परन्तु यहाँ अब हम त्रुटि को कम करने के लिए एक संशुद्धि गुणक (correction factor) का प्रयोग करेंगे। इसके लिए हम सभी त्रुटियों का माध्य ज्ञात करते हैं। माध्य यह है:

$$\frac{0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

हम त्रुटियों का माध्य लेते हैं और इस मान से अपने त्रुटि को संशुद्ध करते हैं।

संशोधित गणितीय वर्णन : आइए अब हम (1) में दिए गए नामांकन प्रतिशत के लिए अपने सूत्र में त्रुटियों का माध्य जोड़ दें। अतः, हमारा संशोधित सूत्र यह हो जाएगा:

nवें वर्ष में प्रतिशत नामांकन $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$, जहाँ $n \geq 1$ (3)

हम अपने समीकरण (2) में भी उपयुक्तरूप से आपरिवर्तन करेंगे। n में हमारा नया समीकरण यह होगा:

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad (4)$$

चरण 2 : परिवर्तित हल : n के लिए समीकरण (4) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि $n = 36$ है, इसलिए वर्ष $1991 + 36 = 2027$ में प्राथमिक विद्यालयों में लड़कियों का नामांकन 50% तक पहुँच जाएगा।

चरण 4 : मान्यकरण : आइए हम पुनः सूत्र (4) की सहायता से प्राप्त मानों की तुलना वास्तविक मानों से करें। सारणी A 2.5 में मानों की यह तुलना दी गई है।

सारणी A2.5

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) द्वारा दिए गए मान	मानों के बीच का अंतर	(4) द्वारा दिए गए मान	मानों के बीच का अंतर
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

जैसा कि आप देख सकते हैं कि (2) से प्राप्त मानों की तुलना में (4) से प्राप्त अनेक मान वास्तविक मान के अधिक निकट हैं। इस स्थिति में त्रुटियों का माध्य 0 है।

हम अपने प्रक्रम को यहीं रोक देंगे। अत:, समीकरण (4) हमारा गणितीय वर्णन है जो कि वर्षो और कुल नामांकन में लड़कियों के प्रतिशत नामांकन के बीच का गणितीय संबंध स्थापित करता है। हमने एक गणितीय निदर्श का निर्माण किया है, जो वृद्धि की व्याख्या करता है।

वह प्रक्रम, जिसका हमने ऊपर की स्थिति में अनुसरण किया है, उसे गणितीय निदर्शन (mathematical modelling) कहा जाता है।

हमने उपलब्ध गणितीय साधनों से एक गणितीय निदर्श का निर्माण करने का प्रयास किया है। उपलब्ध आंकड़ों से प्रागुक्तियाँ करने के उत्तम गणितीय साधन भी उपलब्ध हैं। परन्तु वे इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं। इस निदर्श को बनाने का हमारा उद्देश्य आपको निदर्शन प्रक्रम से परिचित कराना है, न कि इस चरण पर परिशुद्ध प्रागुक्तियाँ (accurate predictions) करना।

आप अभी तक की गई चर्चा को कितना समझ पाए हैं इसके लिए हम चाहेंगे कि आप वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ स्थितियों का निदर्शन करें। यहाँ आपके लिए एक प्रश्नावली दी जा रही है।

प्रश्नावली A2.2

1. ओलंपिक खेलों में जबसे 400 मीटर की दौड़ शुरू हुई है तब से स्वर्ण पदक पाने वालों का समय नीचे की सारणी में दिया गया है। वर्षों और समयों से संबंधित एक गणितीय निदर्श बनाइए। इसका प्रयोग अगले ओलंपिक में लगने वाले समय का आकलन करने में कीजिए:

सारणी A 2.6

वर्ष	समय (सेकंडों में)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 निदर्शन प्रक्रम, इसके लाभ और इसकी सीमाएँ

आइए अब हम गणितीय निदर्शन के उन पहलुओं पर विचार करते हुए, जिन्हें हमने प्रस्तुत उदाहरणों में दिखाया है, अपनी चर्चा यहीं समाप्त करें। पिछले अनुच्छेदों की पृष्ठभूमि से, अब हम इस स्थिति में आ गए हैं कि हम निदर्शन में प्रयुक्त होने वाले चरणों का एक संक्षिप्त परिदृश्य दे सकें।

चरण 1 : सूत्रण : अनुच्छेद A 2.2 के उदाहरण 1 के सूत्रण चरण और A 2.3 में चर्चित निदर्श के सूत्रण चरण के बीच के अंतर की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा। उदाहरण 1 में सभी सूचनाएँ तुरंत उपयोगी रूप में हैं। परन्तु A 2.3 में दिए गए निदर्श में ऐसा नहीं है। साथ ही, एक गणितीय वर्णन प्राप्त करने में कुछ समय भी लगा था। हमने अपने पहले सूत्र की जाँच की है, जिसमें पाया कि यह उतना उत्तम नहीं है, जितना कि दूसरा था। व्यापक रूप में, यह प्राय: सत्य होता है। अर्थात् उस स्थिति में जबकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों का निदर्शन करने का प्रयास कर रहे होते हैं, इसमें प्राय: पहले निदर्श को संशोधित करने की आवश्यकता होती है। जब हम वास्तविक जीवन से जुड़ी

समस्या हल कर रहे होते हैं, तो सूत्रण करने में काफी समय लग सकता है। उदाहरण के लिए, न्यूटन के तीन गति-नियम, जो कि गति के गणितीय वर्णन हैं, के कथन सरलता से दिए जा सकते हैं। परन्तु इन नियमों तक पहुँचने के लिए उसे काफी मात्रा में आंकड़ों का अध्ययन करना पड़ा था और उन कार्यों की ओर ध्यान देना पड़ा था जो कि उसके पूर्व के वैज्ञानिकों ने किए थे।

सूत्रण में निम्नलिखित तीन चरण लागू करने होते हैं:

(i) समस्या का कथन : प्रायः समस्या का कथन स्थूल रूप से दिया जाता है। उदाहरण के लिए, हमारा स्थूल लक्ष्य तो यह सुनिश्चित करना है कि लड़कों और लड़कियों के नामांकन बराबर हैं। इसका अर्थ यह हो सकता है कि विद्यालय जाने वाले आयु के लड़कों की कुल संख्या का 50% और विद्यालय जाने वाली आयु की लड़कियों की कुल संख्या का 50% नामांकित होनी चाहिए। एक अन्य विधि यह है कि यह सुनिश्चित किया जाय कि विद्यालय जाने वाले बच्चों में से 50% लड़कियाँ हैं। हमने अपनी समस्या में दूसरे दृष्टिकोण को अपनाया है।

(ii) सुसंगत कारकों को पहचानना : पहले यह निर्णय लीजिए कि हमारी समस्या में कौन-कौन सी राशियाँ और संबंध महत्वपूर्ण हैं और कौन-कौन महत्वपूर्ण नहीं हैं, जिनकी उपेक्षा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, प्राथमिक विद्यालयों में नामांकन संबंधी हमारी समस्या में पिछले वर्ष में नामांकित लड़कियों का प्रतिशत इस वर्ष नामांकित लड़कियों की संख्या को प्रभावित कर सकता है। ऐसा इसलिए है कि विद्यालय में जैसे-जैसे और लड़कियाँ नामांकित होती जाती हैं वैसे-वैसे उनके माता-पिता अनुभव करने लगेंगे कि वे अपनी लड़कियों को भी विद्यालय में भर्ती कराएं। परन्तु, हमने इस कारक की उपेक्षा कर दी है, क्योंकि एक निश्चित प्रतिशत से अधिक नामांकन हो जाने के बाद ही यह महत्वपूर्ण हो सकता है। साथ ही, इस कारक को बढ़ा देने के बाद निदर्श और अधिक जटिल हो सकता है।

(iii) गणितीय वर्णन : आइए अब हम यह मान लें कि हमें यह स्पष्ट हो गया है कि समस्या क्या है और इसका कौन-सा पहलू अन्य पहलुओं से अधिक सुसंगत है। तब हमें एक समीकरण, एक आलेख या अन्य उपयुक्त गणितीय वर्णन के रूप में निहित पहलुओं के बीच का संबंध ज्ञात करना होता है। यदि यह एक समीकरण है, तो हमारे गणितीय समीकरण में प्रत्येक महत्वपूर्ण पहलू को एक चर से निरूपित करना चाहिए।

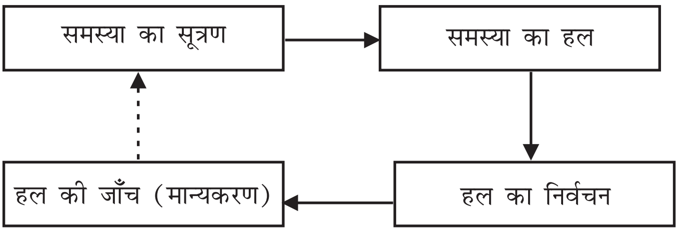
चरण 2 : हल ज्ञात करना : गणितीय सूत्रण से हल प्राप्त नहीं होता। हमें समस्या के इस गणितीय तुल्य को हल करना होता है। यही वह स्थल है जहाँ हमारा गणितीय ज्ञान उपयोगी सिद्ध होता है।

चरण 3 : हल का निर्वचन : गणितीय हल निदर्श के चरों के कुछ मान होते हैं। हमें वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या को पुनः लेना होगा और यह देखना होगा कि समस्या में इन मानों का क्या अर्थ है।

चरण 4 : हल का मान्यकरण : जैसा कि हमने A 2.3 में यह देखा कि हल ज्ञात करने के बाद, हमें यह देखना होगा कि हल वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। यदि यह मेल खाता है, तो गणितीय निदर्श स्वीकार्य होता है। यदि गणितीय हल मेल नहीं खाता, तो हमें सूत्रण चरण पर पुनः आ जाएँ और हम अपने निदर्श में सुधार लाने का प्रयास करें।

प्रक्रम के इस चरण में शब्द-समस्याओं को हल करने और गणितीय निदर्शन के बीच एक बड़ा अंतर होता है। निदर्शन में यह एक अति महत्वपूर्ण चरण है जो कि शब्द-समस्याओं में नहीं होता है। हाँ, यह संभव है कि वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों में हमें अपने उत्तर का मान्यकरण करने की आवश्यकता नहीं होती क्योंकि समस्या सरल है और हमें सीधे सही हल प्राप्त हो जाता है। अनुच्छेद A2.3 में लिए गए निदर्श में ऐसा ही था।

हमने उस क्रम का संक्षिप्त विवरण दिया है जिसमें नीचे दी गई आकृति A2.2 में गणितीय निदर्शन के चरण लागू किए गए हैं। मान्यकरण चरण से सूत्रण चरण की ओर जाने को **बिंदुकित तीर** से दिखाया गया है। ऐसा इसलिए किया गया है कि हो सकता है इस चरण को पुनः लागू करना आवश्यक न भी हो।



आकृति A2.2

अब, क्योंकि आपने गणितीय निदर्शन से संबंधित चरणों का अध्ययन कर लिया है, इसलिए आइए हम इसके कुछ पहलुओं पर चर्चा कर लें।

गणितीय निदर्शन का उद्देश्य वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के बारे में, उसे गणितीय समस्या में रूपांतरित करके कुछ उपयोगी सूचनाएँ प्राप्त करना है। यह विशेष रूप से तब उपयोगी होता है जबकि सीधे प्रेक्षण करके या प्रयोग करने जैसे अन्य साधनों से सूचना प्राप्त करना या तो संभव न हो या बहुत खर्चीला हो।

आपको यह जानकर भी आश्चर्य हो सकता है कि हमें गणितीय निदर्शन का प्रयोग क्यों करना चाहिए? आइए हम निदर्शन के लाभ पर कुछ चर्चा करें। मान लीजिए हम ताजमहल पर मथुरा रिफाइनरी के विसर्जन के संक्षारक प्रभाव पर अध्ययन करना चाहते हैं। हम ताजमहल पर सीधे प्रयोग नहीं करना चाहेंगे, क्योंकि ऐसा करना सुरक्षित नहीं होगा। वास्तव में, हम इस संबंध में ताजमहल का एक छोटा मॉडल ले सकते हैं। परन्तु इसके लिए हमें विशिष्ट सुविधाओं की आवश्यकता हो सकती है, जोकि काफी खर्चीली हो सकती है। यही वह स्थल है जहाँ गणितीय निदर्शन काफी उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

मान लीजिए हम यह ज्ञात करना चाहते हैं कि 5 साल बाद कितने प्राथमिक विद्यालयों की आवश्यकता होगी। तब हम एक गणितीय निदर्श का प्रयोग करके, यह समस्या हल कर सकते हैं। इसी प्रकार, केवल निदर्शन करके वैज्ञानिकों ने अनेक परिघटनाओं की व्याख्या की है।

अनुच्छेद A2.4 में आपने यह देखा है कि उत्तम विधियों को लागू करके दूसरे उदाहरण में हम उत्तर में सुधार लाने का प्रयास कर सकते थे। लेकिन हम वहीं रुक गए, क्योंकि हमारे पास कोई गणितीय साधन उपलब्ध नहीं है। ऐसी स्थिति वास्तविक जीवन में भी हो सकती है। प्रायः हमें सन्निकट उत्तरों से ही संतुष्ट हो जाना पड़ता है, क्योंकि गणितीय साधन उपलब्ध नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए, मौसम के निदर्शन में प्रयुक्त निदर्श समीकरण इतने जटिल होते हैं कि यथा स्थिति हल ज्ञात करने के गणितीय साधन उपलब्ध नहीं हैं।

आप आश्चर्य कर सकते हैं कि किस सीमा तक हमें अपने निदर्श में सुधार लाना चाहिए। इसमें सुधार लाने के लिए, प्रायः हमें अन्य कारकों को भी ध्यान में रखने की आवश्यकता होती है। जब हम ऐसा करते हैं, तब हम अपने गणितीय समीकरणों में और चर बढ़ा देते हैं। तब हमें एक अति जटिल निदर्श प्राप्त हो सकता है, जिसका प्रयोग करना कठिन होगा। निदर्श इतना सरल होना चाहिए कि उसका प्रयोग किया जा सके। एक उत्तम निदर्श दो कारकों को संतुलित करता है:

1. परिशुद्धता (accuracy), अर्थात् यह वास्तविकता से कितना निकट है।
2. प्रयोग की सरलता

उदाहरण के लिए, न्यूटन के गति के नियम काफी सरल, परन्तु इतने शक्तिशाली हैं कि इससे अनेक भौतिक स्थितियों का निदर्शन किया जा सकता है।

अतः, क्या गणितीय निदर्शन सभी समस्याओं का उत्तर है, बिल्कुल नहीं! इसकी अपनी सीमाएँ हैं।

अतः यह बात हमें अपने मस्तिष्क में रखना चाहिए कि *निदर्श* वास्तविक जीवन से जुड़ी *समस्या का केवल एक सरलीकरण* है और ये दोनों समान नहीं होते। यह बहुत कुछ उस अंतर के समान है जो किसी देश के भौतिक लक्षणों को दर्शाने वाले मानचित्र और स्वयं उस देश में होता है। इस मानचित्र से हम समुद्र तल से एक स्थान की ऊँचाई तो ज्ञात कर सकते हैं परन्तु हम यहाँ के लोगों के अभिलक्षणों के बारे में कुछ ज्ञात नहीं कर सकते। अतः हमें निदर्श का प्रयोग केवल उद्देश्य को ध्यान में रखकर करना चाहिए और यह भी ध्यान रखना होता है कि इसका निर्माण करते समय हमने किन-किन कारकों की उपेक्षा कर दी है। हमें निदर्श का प्रयोग केवल लागू होने वाली सीमाओं के अंदर ही करनी चाहिए। आगे की कक्षाओं में हम इस पहलू पर कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे।

प्रश्नावली A 2.3

1. आपकी पाठ्य पुस्तक में दी गई शब्द-समस्याओं को हल करने में और गणितीय निदर्शन के प्रक्रम में क्या अंतर है?

2. मान लीजिए आप चौराहे पर खड़े वाहनों के प्रतीक्षा-काल को कम-से-कम करना चाहते हैं। निम्नलिखित कारकों में कौन-से कारक महत्वपूर्ण हैं और कौन-से कारक महत्वपूर्ण नहीं हैं?

(i) पेट्रोल की कीमत।

(ii) वह दर जिससे चार अलग-अलग सड़कों से आने वाले वाहन चौराहे पर पहुँचते हैं।

(iii) साइकिल और रिक्शा आदि जैसी धीमी गति से चलने वाले वाहनों और कार तथा मोटर साइकिल जैसी तेज गति से चलने वाले वाहनों का अनुपात।

A 2.5 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. शब्द-समस्याओं को हल करने में प्रयुक्त चरणों का पुनर्विलोकन करना।

2. कुछ गणितीय निदर्शों का निर्माण करना।

3. गणितीय निदर्शन में प्रयुक्त नीचे बॉक्स में दिए गए चरणों पर चर्चा:

1. **सूत्रण :**
   (i) समस्या का कथन लिखना
   (ii) सुसंगत कारकों को पहचानना
   (iii) गणितीय वर्णन
2. **हल ज्ञात करना**
3. **वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के संदर्भ में हल का निर्वचन**
4. **यह देखना कि किस सीमा तक निदर्श अध्ययन की जा रही समस्या का एक उत्तम निरूपण है।**

4. गणितीय निदर्शन का उद्देश्य, लाभ और सीमाएँ।