Motion in a plane (समतल में गति)

परीक्षोपयोगी प्रश्नोत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1:

मीनार की छत से एक गेंद को किक किया जाता है तो गेंद पर लगने वाले क्षैतिज एवं ऊध्वाधर त्वरण का मान होगा

(i) 0 एवं 9.8 मी/से2

(ii) 9.8 मी/से एवं 9.8 मी/से-2

(iii) 9.8 मी/से-2 एवं 0

(iv) 9.8 मी/से-2 एवं 4.9 मी/से -2

उत्तर:

(i) 0 एवं 9.8 मी/से2

प्रश्न 2:

प्रक्षेप्य गति के दौरान निम्नलिखित में से कौन-सी राशि संरक्षित रहती है?

(i) यान्त्रिक ऊर्जा

(ii) स्थितिज ऊर्जा

(iii) संवेग

(iv) गतिज ऊर्जा

उत्तर:

(i) यान्त्रिक ऊर्जा

प्रश्न 3:

जब एक वस्तु दो विभिन्न प्रक्षेप्य कोणों पर प्रक्षेपित की जाती है तो उसकी क्षैतिज परास | समान है। यदि h_1 तथा h_2 उसकी संगत महत्तम ऊँचाइयाँ हैं, तो उसकी क्षैतिज परास R तथा h_1 व h_2 में सही सम्बन्ध होगा।

(i) $R = h_1 h_2$ (ii) $R = \sqrt{h_1 h_2}$

(iii) $R = 2\sqrt{h_1 h_2}$ (iv) $R = 4\sqrt{h_1 h_2}$

उत्तर:

(iv) $R = 4\sqrt{h_1 h_2}$

प्रश्न 4:

क्षैतिजत: कुछ ऊँचाई पर जाते हुए एक बम वर्षक विमान को पृथ्वी पर किसी लक्ष्य पर बम मारने के लिए बम तब गिराना चाहिए जब वह

(i) लक्ष्य के ठीक ऊपर है।

(ii) लक्ष्य से आगे निकल जाता है।

(iii) लक्ष्य के पीछे है।

(iv) उपर्युक्त तीनों सही हैं।

उत्तर:

(iii) लक्ष्य के पीछे है।

प्रश्न 5:

प्रक्षेप्य पथ के उच्चतम बिन्दु पर त्वरण का मान होता है।

(i) अधिक

(ii) न्यूनतम

(iii) शून्य

(iv) g के बराबर

उत्तर:

(iv) g के बराबर

प्रश्न 6:

प्रक्षेप्य गति में उच्चतम बिन्दु पर वेग है।

(i) $\frac{u\cos\theta}{2}$

(ii) $u \cos\theta$

(iii) $\frac{u\sin\theta}{2}$

(iv) इनमें से कोई नहीं

उत्तर:

(ii) u cosθ

प्रश्न 7:

एक प्रक्षेप्य गतिज ऊर्जा K से प्रक्षेपित किया जाता है। यदि यह अधिकतम परास तक जाए तो इसकी अधिकतम ऊँचाई पर गतिज ऊर्जा होगी

(i) 0.25K

(ii) 0.5K

(iii) 0.75K

(iv) 1.0K

उत्तर:

(ii) 0.5K

प्रश्न 8:

एक प्रक्षेप्य का प्रारम्भिक वेग $v = (3\hat{i} + 4\hat{j})$ मी/से है। महत्तम ऊँचाई पर इसका वेग होगा।

(i) 3 मी/से

(ii) 4 मी/से

(iii) 5 मी/से

(iv) शून्य

उत्तर:

(iii) 5 मी/से

प्रश्न 9:

जब किसी वस्तु को महत्तम परास (maximum range) वाले कोण से फेंका जाता है। तब उसकी गतिज ऊर्जा है। अपने पथ की महत्तम ऊँचाई वाले बिन्दु पर उसकी क्षैतिज गतिज ऊर्जा है।

(i) E

(ii) E/2

(iii) E/3

(iv) शून्य

उत्तर:

(ii) E/2

प्रश्न 10:

30° कोण पर झुके नत समतल के निचले सिरे पर एक कण प्रक्षेपित किया जाता है। क्षैतिज . से किस कोण 80 पर कण प्रक्षेपित किया जाये ताकि वह नत समतल पर अधिकतम परास में किया , प्राप्त कर सके?

(i) 45°

(ii) 53°

(iii) 75°

(iv) 60°

उत्तर:

(iii) 75°

प्रश्न 11:

क्रिकेट का कोई खिलाड़ी किसी गेंद को पृथ्वी पर अधिकतम 100 मीटर क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है। वह खिलाड़ी उसी गेंद को पृथ्वी से ऊपर जिस अधिकतम ऊँचाई तक फेंक सकता है, है।

(i) 100 मीटर

(ii) 50 मीटर

(iii) 25 मीटर

(iv) 15 मीटर

उत्तर:

(ii) 50 मीटर है

प्रश्न 12:

एक प्रक्षेप्य को क्षैतिज परास, उसकी अधिकतम प्राप्त ऊँचाई का चार गुना है। क्षैतिज से इसका प्रक्षेप्य कोण होगा

(i) 30°

(ii) 60°

(iii) 45°

(iv) 90°

उत्तर:

(iii) 45°

प्रश्न 13:

अधिकतम परास के लिए किसी कण का प्रक्षेपण कोण होना चाहिए

(i) क्षैतिज से 0° के कोण पर

(ii) क्षैतिज से 60° के कोण पर

(iii) क्षैतिज से 30°के कोण पर

(iv) क्षैतिज से 450 के कोण पर

उत्तर:

(iv) क्षैतिज से 450 के कोण पर

प्रश्न 14:

एक गेंद किसी मीनार की चोटी से 60° कोण पर (ऊध्वाधर से) प्रक्षेपित की जाती है।इसके वेग का ऊर्ध्व घटक

(i) लगातार बढ़ता जायेगा

(ii) लगातार घटता जायेगा

(iii) अपरिवर्तित रहेगा

(iv) पहले घटता है तथा फिर बढ़ता है।

उत्तर:

(iv) पहले घटता है तथा फिर बढ़ता है।

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1:

प्रक्षेप्य गति से क्या तात्पर्य है?

उत्तर:

जब किसी पिण्डे को एक प्रारम्भिक वेग से ऊध्वाधर दिशा से भिन्न किसी दिशा में फेंका जाता है। तो उस पर गुरुत्वीय त्वरण सदैव ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर लगता है तथा पिण्ड ऊध्वाधर तल में एक वक्र पथ पर गति करता है। इस गति को प्रक्षेप्य गति कहते हैं।

प्रश्न 2:

प्रक्षेप्य गति किस प्रकार की गति है-एकविमीय अथवा द्विविमीय?

उत्तर:

प्रक्षेप्य गति द्विविमीय गति है।

प्रश्न 3:

क्षैतिज से किसी कोण पर ऊर्ध्वाधर तल में प्रक्षेपित पिण्ड का पथ कैसा होता है?

उत्तर:

परवलयाकार।

प्रश्न 4:

प्रक्षेप्य-पथ किस प्रकार का होता है? क्या यह पथ ऋजुरेखीय हो सकता है?

उत्तर:

प्रक्षेप्य-पथ परवलयाकार होता है। प्रक्षेप्य-पथ ऋजुरेखीय नहीं हो सकता।

प्रश्न 5:

“पृथ्वी से छोड़े गये प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है। प्रक्षेप्य की चाल पथ के उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम होगी।” समझाइए कि यह कथन सत्य है या असत्य।

उत्तर:

यह कथन सत्य है, क्योंकि उच्चतम बिन्दु पर प्रक्षेपण वेग का ऊर्ध्व घटक शून्य हो जाता है तथा क्षैतिज घटक अपरिवर्तित रहता है।

प्रश्न 6:

प्रक्षेपण पथ के किस बिन्दु पर चाल निम्नतम होती है तथा किस बिन्दु पर अधिकतम?

उत्तर:

उच्चतम बिन्दु पर चाल निम्नतम तथा प्रक्षेपण बिन्दु पर चाल अधिकतम होती है।

प्रश्न 7:

प्रक्षेपण पथ के उच्चतम बिन्दु पर प्रक्षेप्य की गति की दिशा क्षैतिज क्यों हो जाती है?

उत्तर:

क्योंकि उच्चतम बिन्दु पर प्रक्षेप्य के वेग का ऊर्ध्व घटक शून्य हो जाता है। इसमें केवल क्षैतिज घटक ही रह जाने के कारण प्रक्षेप्य की गति की दिशा प्रक्षेपण पथ के उच्चतम बिन्दु पर क्षैतिज हो जाती है।

प्रश्न 8:

प्रक्षेप्य-पथ के उच्चतम बिन्दु पर वेग व त्वरण की दिशाओं के बीच कितना कोण होता है?

उत्तर:

90°

प्रश्न 9:

किसी प्रक्षेप्य द्वारा महत्तम ऊँचाई के लिए सूत्र लिखिए।

उत्तर:

$H_M = u_0^2 \sin^2 \theta_0 / 2g$, जहाँ u_0 = प्रक्षेपण वेग,

θ_0= प्रक्षेपण कोण तथा g = गुरुत्वीय त्वरण

प्रश्न 10:

प्रक्षेप्य के क्षैतिज परास का व्यंजक लिखिए।

उत्तर:

-प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

प्रश्न 11:

प्रक्षेप्य के उड्डयनकाल (T) की परिभाषा एवं सूत्र लिखिए।

उत्तर:

जितने समय में पिण्ड प्रक्षेपण बिन्दु से उच्चतम बिन्दु तक पहुँचकर अपने परवलय पथ द्वारा प्रक्षेपण-बिन्दु की सीध में नीचे आता है, उसे पिण्ड का उड्डयनकाल कहते हैं।

पिण्ड का उड्डयनकाल $(T) = \frac{2u \sin \theta}{g}$

प्रश्न 12:

वायु के प्रतिरोध का प्रक्षेप्य के उड्डयन काल तुथा परास पर क्या प्रभाव पड़ता है?

उत्तर:

वायु के प्रतिरोध से उड्डयन काल बढ़ जाता है तथा परास घट जाता हैं।

प्रश्न 13:

एक वस्तु को क्षैतिज से θ कोण पर $\vec{U}$ वेग से प्रक्षेपित किया जाता है। उन दो राशियों के नाम बताइए जो नियत रहती हैं।

उत्तर:

वेग का क्षैतिज घटक = u cos θ तथा ऊर्ध्व दिशा में त्वरण $\vec{g}$ के नीचे की ओर।

प्रश्न 14:

एक खिलाड़ी गेंद को क्षैतिज से किस झुकाव पर फेंके कि गेंद अधिकतम दूरी तक जाए?

उत्तर:

45°.

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1:

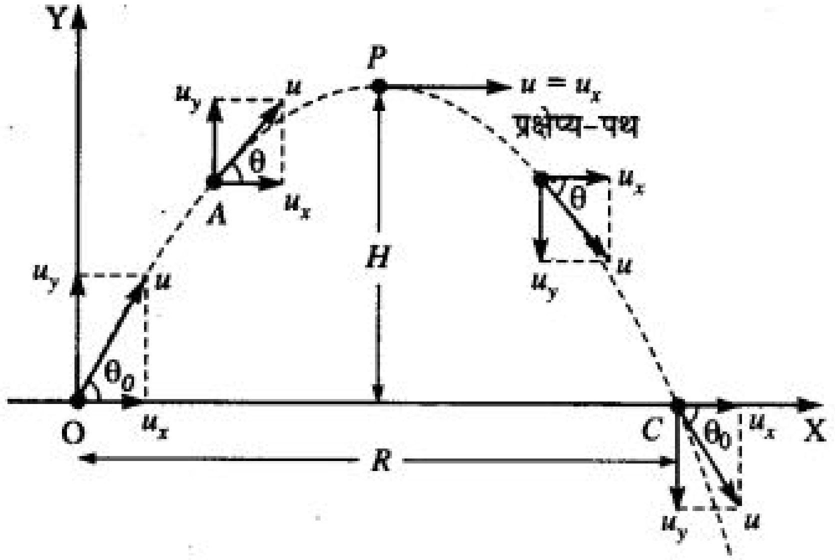
एक प्रक्षेप्य (गेंद) पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में क्षैतिज से θ कोण पर u वेग से फेंका जाता है। प्रक्षेप्य का उड्डयनकाल तथा क्षैतिज परास ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

प्रक्षेप्यका उडड्यनकाल:

पिण्ड को प्रक्षेपण बिन्दु O से अधिकतम ऊँचाई के बिन्दु तक जाकर पुनः क्षैतिज के अन्य बिन्दु C तक आने लगे समय को उड्डयन काल कहते हैं। इसे प्राय: T से व्यक्त करते हैं।

माना पिण्ड अपने पथ के उच्चतम बिन्दु P तक पहुँचने में t समय लेता है। P पर पिण्ड का अन्तिम ऊर्ध्वाधर वेग शून्य है। अतः $v_y = 0$; गति के प्रथम समीकरण) v = u+ at में $v = v_y = 0$, $u = u_y$ = = u sin θ0 तथा 4 के स्थान पर (- g) रखकर 't' के मान की गणना कर सकते हैं।



चित्र 4.11

अत: $$0 = u \sin \theta_0 + (-g)t \quad \text{अथवा} \quad t = \frac{u \sin \theta_0}{g}$$

पिण्ड उच्चतम बिन्दु P परे, पहुँचकर अपने परवलयाकार गमन पथ द्वारा नीचे आने लगता है, जितने समय में पिण्ड बिन्दु ० से उच्चतम बिन्दु P तक जाता है उतने ही समय में वह बिन्दु P से C तक लौटता है जो कि बिन्दु 0 की ठीक सीध में है। अतः पिण्ड को उड्डयन काल

$$T = 2t = \frac{2u \sin \theta_0}{g} \qquad \ldots(1)$$

प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास:

प्रक्षेप्य अपने उड्डयन काल में जितनी क्षैतिज दूरी तय करता है उसे प्रक्षेप्य की परास कहते हैं। इसे प्राय: R से व्यक्त करते हैं।

चित्र 4.11 से क्षैतिज परास OC=(क्षैतिज वेग) x (उड्डयन काल)

चित्र 4.11 से क्षैतिज परास OC = (क्षैतिज वेग) × (उड्डयन काल)

$$\therefore \quad R = u_x \times T = (u\cos\theta_0) \times \left(\frac{2u\sin\theta_0}{g}\right) = \frac{u^2\,(2\sin\theta_0\cos\theta_0)}{g}$$

या $$R = \frac{u^2 \sin 2\theta_0}{g} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) से स्पष्ट है कि अधिकतम क्षैतिज परास के लिए, sin 2θ0 =1 अर्थात् $2\theta_0 = 90°$ अथवा θ_0 = 45°, अतः पिण्डे का अधिकतम परास प्राप्त करने के लिए पिण्ड को 45° पर प्रक्षेपित किया जाना चाहिए। इस दशा में

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

यही कारण है कि पृथ्वी पर लम्बी कूद (long jump) करने वाला खिलाड़ी पृथ्वी से 45° के कोण पर उछलता है।

सूत्र (2) में यदि θ_0 के स्थान पर $(90°-\theta_0)$ रखें, तब

सूत्र (2) में यदि θ_0 के स्थान पर $(90° - \theta_0)$ रखें, तब

$$R = \frac{u^2 \sin 2(90° - \theta_0)}{g} = \frac{u^2 \sin(180° - 2\theta_0)}{g}$$

$$= \frac{u^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

इससे स्पष्ट है कि पिण्ड को चाहे θ0 कोण पर प्रक्षेपित करें अथवा $(90° - \theta_0)$ कोण पर, दोनों दशाओं में क्षैतिज परास R वही रहती है।

प्रश्न 2:

एक पत्थर पृथ्वी तल से क्षैतिज से 30° कोण पर 49 मी/से के वेग से फेंका जाता है। इसका उड्डयन काल तथा क्षैतिज परास ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है, प्रक्षेप्य कोण θ_0= 30°

तथा प्रक्षेप्य वेग $u = 49$ मी/से

$\therefore$ उड्डयन काल $T = \frac{2u \sin\theta_0}{g} = \frac{2 \times 49 \times \sin 30^\circ}{9.8}$

$= \frac{2 \times 49 \times 1}{9.8 \times 2} = $ **5 सेकण्ड**

क्षैतिज परास $R = \frac{u^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(49)^2 \times \sin(2 \times 30^\circ)}{9.8}$

$= \frac{(49)^2 \times \sin 60^\circ}{9.8} = \frac{49 \times 49 \times \sqrt{3}/2}{9.8}$

$= \frac{245\sqrt{3}}{2} = $ **212.17 मी**

प्रश्न 3:

एक प्रक्षेप्य का प्रारम्भिक वेग $(3\hat{i} + 4\hat{j})$ मी/से है। इसकी महत्तम ऊँचाई तथा क्षैतिज परांस ज्ञात कीजिए। (g=10 मी/से²)

हल:

दिया है, प्रक्षेप्य का प्रारम्भिक वेग $u = (3\hat{i} + 4\hat{j})$ मी/से $= u_x\hat{i} + u_y\hat{j}$

$\because$ प्रारम्भिक वेग u का क्षैतिज घटक $u_x = u\cos\theta_0 = 3$

ऊर्ध्वाधर घटक $u_y = u\sin\theta_0 = 4$

महत्तम ऊँचाई $(h) = \frac{u^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{(4)^2}{2 \times 10} = \frac{16}{20} = $ **0.80 मीटर**

उड्डयन काल $(T) = \frac{2u\sin\theta_0}{g} = \frac{2 \times 4 \times \sin 90^\circ}{10} = 0.8$ से

क्षैतिज परास = क्षैतिज वेग × उड्डयन काल = 3 × 0.8 = **2.4 मीटर**

प्रश्न 4:

एक व्यक्ति 2 किग्रा एवं 3 किग्रा के दो गोले समान वेग से क्षैतिज से समान झुकाव कोण पर फेंकता है। बताइए कौन-सा गोला पृथ्वी पर पहले पहुँचेगा? यदि गोले भिन्न-भिन्न वेगों से फेंके जाएँ तब कौन-सा पहले पहुँचेगा?

उत्तर:

प्रक्षेप्य का उड्डयन काल

$$T=\frac{2u_0 \sin\theta_0}{g},$$

सूत्र से स्पष्ट है कि उड्डयन काल प्रक्षेपित पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता। अतः दोनों गोले पृथ्वी पर एक साथ पहुंचेंगे। उड्डयन काल प्रक्षेपण वेग u0 पर निर्भर करता है तथा T α uo। अत: जिस गोले का प्रक्षेपण वेग कम है, वह पहले पृथ्वी पर पहुँचेगा।

प्रश्न 5:

पृथ्वी के गुरुत्व के अन्तर्गत गति करते हुए किसी प्रक्षेप की महत्तऊँचाई यदि h हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसका प्रक्षेपण वेग

होगा, जबकि θ प्रक्षेपण कोण है।

उत्तर:

गति के तृतीय समीकरण से, प्रक्षेप्य की ऊर्ध्वाधर गति के लिए।

$$v_y^2 = u_y^2 - 2a_y \cdot y$$

महत्तम ऊँचाई पर ऊर्ध्वाधर वेग (v_y) का मान शून्य हो जाता है।

$$\therefore \quad (0)^2 = u_y^2 - 2a_y \cdot y$$

यहाँ, ऊर्ध्वाधर घटक $u_y = u \sin\theta$, $y = h$ तथा $a_y = g$ रखने पर

$$2gh = (u \sin\theta)^2 = u^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad u^2 = \frac{2gh}{\sin^2\theta} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\theta}$$

प्रश्न 6:

एक पुल से एक पत्थर क्षैतिज से नीचे की ओर 30° के कोण पर 25 मी/से के वेग से फेंका जाता है। यदि पत्थर 2.5 सेकण्ड में जल से टकराता है तो जल के पृष्ठ से पुल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। पत्थर का क्षैतिज परास भी ज्ञात कीजिए। (g = 98 मी/से²)

हल:

∵ प्रक्षेपण बिन्दु पर प्रक्षेपण के क्षण नीचे की ओर पत्थर का वेग

$$= u\sin\theta_0 = 25 \times \sin 30^\circ = 25 \times \frac{1}{2} = 12.5 \text{ मी/से}$$

माना जल के पृष्ठ से पुल की ऊँचाई h मी है, तब

$$h = ut + \frac{1}{2}gt^2 \text{ से,}$$

$$h = 12.5 \times 2.5 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.5)^2$$

$$= 31.25 + 30.62 = \mathbf{61.87 \text{ मीटर}}$$

$$\text{पत्थर का क्षैतिज परास } R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(25)^2 \times \sin 60^\circ}{9.8}$$

$$= \frac{625 \times \sqrt{3}}{2 \times 9.8} = \frac{625 \times 1.73}{2 \times 9.8} = \mathbf{55.16 \text{ मीटर}}$$

प्रश्न 7:

एक पत्थर 10 मी/से के वेग से क्षैतिज के साथ 30° के कोण पर एक मीनार की चोटी से ऊपर की ओर फेंका जाता है। 5-सेकण्ड के उपरान्त वह जमीन से टकराता है। जमीन से मीनार की ऊँचाई और पत्थर के क्षैतिज परास की गणना कीजिए। ($g = 10$ मी/से^{2})

हल:

प्रक्षेपण बिन्दु पर प्रक्षेपण के समय पत्थर का वेग = $u \sin\theta$

$$= 10\sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ मी/से}$$

माना जमीन से मीनार की ऊँचाई = h मी

गति की समी० $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ से,

$$h = 5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 10 \times 25 = 25 + 125 = \mathbf{150 \text{ मीटर}}$$

$$\text{पत्थर का क्षैतिज परास } R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(10)^2 \sin 60^\circ}{10}$$

$$= \frac{100 \times \sqrt{3}}{2 \times 10} = 5\sqrt{3} = 5 \times 1.732$$

$$= 8.660 = \mathbf{8.66 \text{ मीटर}}$$

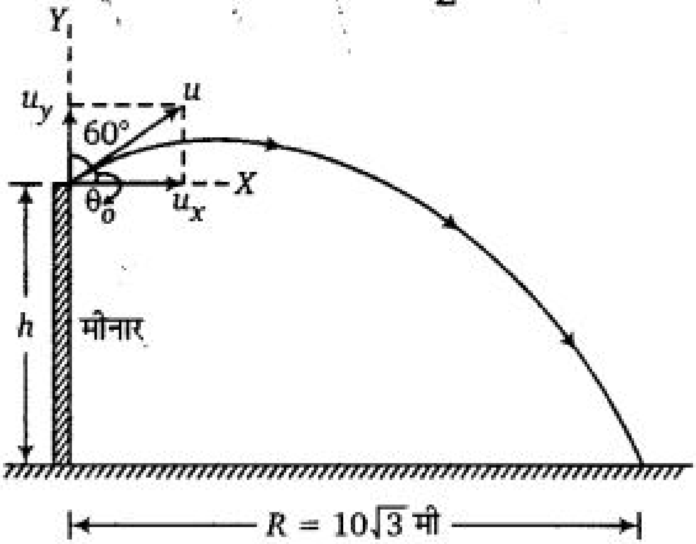
प्रश्न 8:

एक मीनार की चोटी से एक गेंद क्षैतिज से ऊपर 10 मीटर/सेकण्ड के प्रारम्भिक वेग से ऊध्र्वाधर से 60° का कोण बनाते हुए फेंकी जाती है। वह मीनार के आधार से 10√3 मीटर की दूरी पर पृथ्वी पर टकराती है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (मान लीजिए g = 10 मीटर/सेकण्ड²)।

हल:

गेंद को प्रक्षेप्य कोण θ_0 = 90° − 60° = 30° तथा प्रक्षेप्य वेग u= 10 मीटर/सेकण्ड। प्रक्षेप्य वेग को क्षैतिज तथा ऊर्ध्व घटकों में वियोजित करने पर,

क्षैतिज घटक $u_x = u\cos\theta_0 = 10\cos 30° = \frac{10\times\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ मी/से



चित्र 4.12

तथा ऊर्ध्व घटक (ऊपर को) $u_y = y\sin\theta_0 = 10\sin 30° = 10\times\frac{1}{2} = 5.0$ मीटर/सेकण्ड

यदि गेंद फेंके जाने के t समय पश्चात् पृथ्वी से टकराती है, तब क्षैतिज परास

$R =$ क्षैतिज वेग × समय $= u_x \times t = (5\sqrt{3}$ मीटर/सेकण्ड$) \times t$

$\therefore\ t = \frac{R}{5\sqrt{3}\text{ मीटर/सेकण्ड}} = \frac{10\sqrt{3}\text{ मीटर}}{5\sqrt{3}\text{ मीटर/सेकण्ड}} = 2.0$ सेकण्ड

माना मीनार की ऊँचाई h है। तब सूत्र $h = u'_y t + \frac{1}{2}gt^2$ से

जहाँ u'_y गेंद के वेग का ऊर्ध्व घटक (नीचे को) है।

प्रश्नानुसार, $u'_y = -u_y = -5.0$ मीटर/सेकण्ड तथा $t = 2.0$ सेकण्ड

$\therefore\ h = (-5.0)\times 2.0 + \frac{1}{2}\times 10\times(2.0)^2 = -10 + 20 =$ **10 मीटर**

प्रश्न 9:

एक मीनार की चोटी से एक गेंद को 15 मीटर/सेकण्डनियत क्षैतिज वेग से प्रक्षेपित किया जाता है। 4 सेकण्ड पश्चात गेंद का विस्थापन ज्ञात कीजिए तथा सदिश आरेख भी खींचिए। (g = 10 मीटर/सेकण्ड²)

हल:

दिया है, u_x = 15 मीटर/सेकण्ड, t = 4 सेकण्ड

4 सेकण्ड पश्चात् क्षैतिज विस्थापन

$$s_x = u_x \times t = 15 \times 4 = 60 \text{ मीटर}$$

4 सेकण्ड पश्चात् ऊर्ध्वत: विस्थापन

$$s_y = u_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

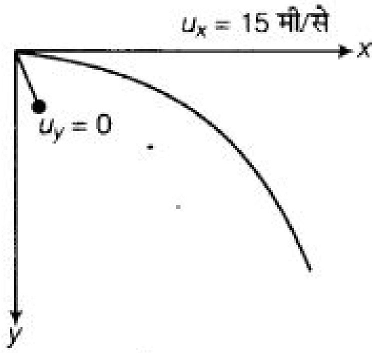
$$= 0 \times 4 + \frac{1}{2} \times 10 \times 16 = 80 \text{ मीटर}$$

$$\therefore \text{ कुल विस्थापन} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{60^2 + 80^2}$$

$$= \sqrt{10,000} = \mathbf{100 \text{ मीटर}}$$

विस्थापन सदिश का क्षैतिज से बना कोण

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{s_y}{s_x}\right) = \frac{80}{60} = \left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$



चित्र 4.13

प्रश्न 10:

प्रक्षेप्य,पथ के परवलयाकार होने के प्रतिबन्ध बताइए।

उत्तर:

प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होने के प्रतिबन्ध-प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार तभी हो सकता है, जबकि उक्त प्रतिबन्ध सन्तुष्ट हो। इसके लिए निम्नलिखित प्रतिबन्ध आवश्यक हैं

1. प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त ऊँचाई बहुत अधिक नहीं होनी चाहिए अन्यथा ४ को परिमाण बदल जाएगा।

2. प्रक्षेप्य का परास बहुत अधिक नहीं होना चाहिए अन्यथा ४ की दिशा परिवर्तित हो जाएगी।

3. प्रक्षेप्य का प्रारम्भिक वेग कम होना चाहिए जिससे कि वायु का प्रतिरोध नगण्य रहे। उपर्युक्त प्रतिबन्धों के सन्तुष्ट होने पर ही प्रक्षेप्य पथ एक परवलय रहेगा अन्यथा बदल जाएगा।

विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1:

प्रक्षेप्य गति से क्या तात्पर्य है? दर्शाइए कि प्रक्षेप्य गति में पथ के उच्चतम बिन्दु पर पिण्ड के वेग तथा त्वरण एक-दूसरे के लम्बवत होते हैं।

उत्तर:

प्रक्षेप्य गति- "जब किसी पिण्ड को पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में, किसी प्रारम्भिक वेग से ऊध्वाधर दिशा से भिन्न दिशा में फेंका जाता है तो पिण्ड गुरुत्वीय त्वरण के अन्तर्गत ऊर्ध्वाधर तल में एक वक्र पथ पर गति करता है। पिण्ड़ की इस गति को प्रक्षेप्य गति (Projectile motion) कहते हैं तथा पिण्ड द्वारा तय किए गए पथ को प्रक्षेप्य पथ (trajectory) तथा फेंके गए पिण्ड को प्रक्षेप्य (Projectile) कहते हैं।"

उदाहरण:

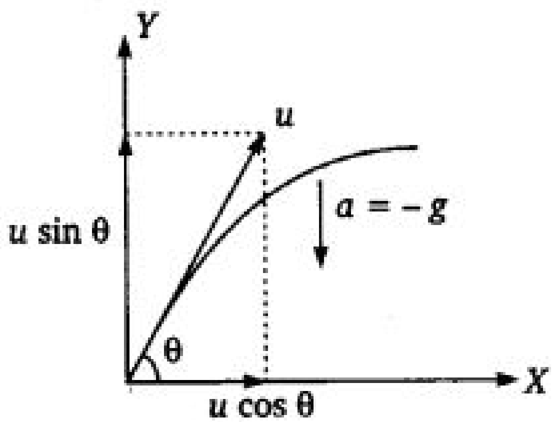
छत से फेंकी गई गेंद की गति, हवाई जहाज से गिराए गए बम की गति, तोप से छूटे गोले की गति, भाला फेंक (javelin throw) में भाले की गति, बल्ले से मारने पर गेंद की गति तथा एकसमान ' विद्युत क्षेत्र में उसके लम्बवत् प्रवेश करने वाले किसी आवेशित कण की गति आदि प्रक्षेप्य गति के ही उदाहरण हैं।

प्रक्षेप्य का कोणीय प्रक्षेपण:

माना किसी प्रक्षेप्य को प्रारम्भिक वेग u से क्षैतिज से θ कोण पर प्रक्षेपित किया गया है।

प्रक्षेप्य के प्रारम्भिक वेग का घटक (u_x) = u cos θ

तथा ऊर्ध्वाधर घटक (u_y) = u sin θ



चित्र 4.14

यदि वायु के प्रतिरोध को नगण्य मान लिया जाए, तो पिण्ड पर क्षैतिज दिशा में कोई बल नहीं लगेगा। अतः, क्षैतिज दिशा में पिण्ड का त्वरण भी शून्य होगा और इसलिए क्षैतिज दिशा में पिण्ड का वेग अपरिवर्तित रहेगा। इसके विपरीत पिण्ड पर गुरुत्वीय त्वरण ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर क्रिया करेगा।

क्षैतिज दिशा में, $a_x = 0$ तथा ऊर्ध्वाधर दिशा में, $a_y = -g$

t समय बाद क्षैतिज गति के लिए समीकरण $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ का प्रयोग करने पर तय की गई दूरी,

$$x = u_x \times t = (u \cos \theta) \times t \qquad (\because a_x = 0)$$

इसी प्रकार, **ऊर्ध्वाधर गति के लिए,** $y = u_g t + \frac{1}{2} a_y t^2$

$$y = (u \sin \theta)t + \frac{1}{2} gt^2$$

t समय बाद पिण्ड के वेग का क्षैतिज घटक

$$v_x = u_x = u \cos \theta \qquad (\because a_x = 0)$$

तथा ऊर्ध्वाधर घटक $v_y = u \sin \theta - gt$

इस प्रकार, प्रक्षेप्य गति में वेग का क्षैतिज घटक ($u_x = u \cos \theta$) सम्पूर्ण गति में अपरिवर्तित रहता है, जबकि वेग को ऊर्ध्वाधर घटक ($u_y = u \sin \theta$) निरन्तर परिवर्तित होता रहता है तथा पथ के उच्चतम बिन्दु पर इसका मान शून्य हो जाता है। अत: उच्चतम बिन्दु पर वेग का मान न्यूनतम $u\cos\theta$ हो जाता है, जिसकी दिशा, क्षैतिज होती है तथा त्वरण g की दिशा ऊध्र्वाधर दिशा में नीचे की ओर होती है। इस प्रकार पथ के उच्चतम बिन्दु पर वेग तथा त्वरण के बीच का कोण 90° होता है।

प्रश्न 2:

यदि कोई प्रक्षेप्य गुरुत्वीय क्षेत्र में क्षैतिज से θ कोण पर u वेग से प्रक्षेपित किया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप्य-पथ एक परवलय होगा।

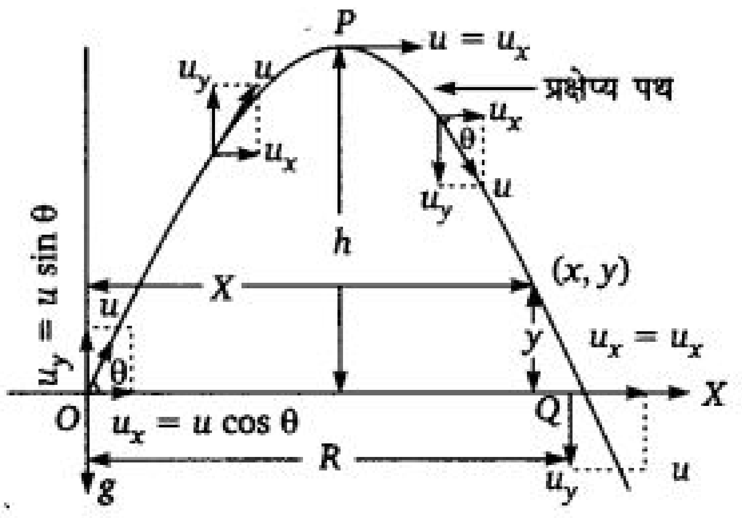
या

सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप्य-पथ परवलयाकार होता है।

उत्तर:

प्रक्षेप्य का पथ:

माना पृथ्वी तल के किसी बिन्दू O से एक पिण्ड को क्षैतिज से θ कोण पर प्रक्षेप्य वेग u से ऊध्र्वाधर तल में प्रक्षेपित किया जाता है (चित्र 4.15)। माना बिन्दु O मूलबिन्दु है तथा प्रक्षेप्य के ऊर्ध्वाधर समतल में बिन्दु0 से गुजरने वाली क्षैतिज तथा ऊध्र्वाधर रेखाएँ क्रमश: X तथा Y-अक्ष हैं।



चित्र 4.15

प्रारम्भिक प्रक्षेप्य वेग u को क्षैतिज (Ox के अनुदिश) तथा ऊध्र्वाधर (OY के अनुदिश) घटकों में वियोजित करने पर,

क्षैतिज घटक $u_x = u \cos \theta$

तथा , ऊध्र्वाधर, घटक $u_y = u \sin\theta$

प्रक्षेपित पिण्ड गुरुत्वीय त्वरण g के अन्तर्गत गति करता है। चूंकि g का मान स्थिर है तथा यह सदैव ऊध्र्वाधर दिशा में नीचे की ओर कार्य करता है; अतः पिण्ड के क्षैतिज वेग ॥ पर गुरुत्वीय त्वरण ‘g’ का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। माना पिण्ड पर वायु का अवरोध नगण्य है तो पिण्ड का क्षैतिज वेग $u_x (= u \cos \theta)$ पूरी गति के दौरान

अपरिवर्तित रहेगा, परन्तु पिण्ड के वेग का ऊर्ध्व घटक $u_y(= u \sin \theta)$ का मान गुरुत्वीय त्वरण g के कारण लगातार बदलता रहेगा। इस प्रकार, क्षैतिज दिशा में, प्रारम्भिक वेग $u_x = u \cos$ तथा त्वरण $a_x = 0$

तथा ऊर्ध्वाधर दिशा में, प्रारम्भिक वेग $u_y = u \sin \theta$ तथा त्वरण $a_y = -g$

माना t समय में पिण्ड बिन्दु (x, y) पर पहुँच जाता है, तब

t समय में पिण्ड का क्षैतिज विस्थापन = x

तथा ऊध्र्वाधर विस्थापन = y

समीकरण (1) से, $t = \frac{x}{u \cos \theta}$ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$y = u \sin \theta \times \left(\frac{x}{u \cos \theta}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{u \cos \theta}\right)^2$$

अथवा

$$y = x(\tan \theta) - \frac{g}{2u^2 \cos^2 \theta} x^2$$

$\therefore$ **क्षैतिज दिशा में समीकरण** $x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$ **से,**

$$x = u \cos \theta \times t + \frac{1}{2} \times 0 \times t^2 = u \cos \theta \cdot t$$

अत:

$$t = \frac{x}{u \cos \theta} \quad \ldots(1)$$

ऊर्ध्वाधर दिशा में समीकरण $y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$ **से,**

$$y = (u \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots(2)$$

यह समीकरण $y = bx - cx^2$ के स्वरूप को है जो एक परवलय को प्रदर्शित करता है; अतः पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में प्रक्षेपित पिण्ड का प्रक्षेप्य-पथ परवलयाकार होता है। इस कथन को सर्वप्रथम गैलीलियो ने सिद्ध किया था।

प्रश्न 3:

सिद्ध कीजिए कि एक ही वेगu से क्षैतिज से θ तथा (90° -θ) कोणों पर किसी प्रक्षेप्य को फेंकने पर प्रक्षेप्य समान परास प्राप्त करता है। यदि इन दो दिशाओं में प्रक्षेप्य के उड्डयन काल क्रमशः TतथाT' हों तथा प्राप्त महत्तम ऊँचाइयाँ क्रमशः h वh' हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$R = \frac{1}{2} g T' T'' \quad \text{तथा} \quad R = 4\sqrt{hh'}$$

उत्तर:

एक ही पास के लिए दो प्रक्षेपण कोण–माना कि प्रक्षेप्य θ व (90° − θ) कोणों पर फेंके जाने पर क्रमशः R व R’ परास प्राप्त करता है तब

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \quad \text{तथा} \quad R' = \frac{u^2 \sin 2(90^\circ - \theta)}{g}$$

$$= \frac{u^2 \sin(180^\circ - 2\theta)}{g} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = R$$

इससे स्पष्ट है कि गेंद को चाहे से कोण पर प्रक्षेपित करें अथवा (90° − θ) कोण पर, दोनों दशाओं में क्षैतिज परास R का मान वही रहता है।

उदाहरण:

एक खिलाड़ी फुटबॉल को चाहे क्षैतिज से 30° के कोण पर ‘किक’ करे अथवा 90° − 30° = 60° के कोण पर फुटबॉल पृथ्वी पर दोनों स्थितियों में एक ही स्थान पर गिरेगी।

प्रश्नानुसार, θ प्रक्षेप्य कोण पर उड्डयन काल $T = \frac{2u \sin\theta}{g}$

तथा $(90^\circ - \theta)$ प्रक्षेप्य कोण पर उड्डयन काल

$$T' = \frac{2u \sin(90^\circ - \theta)}{g} = \frac{2u \cos\theta}{g}$$

$$\therefore \quad T \times T' = \frac{2u \sin\theta}{g} \times \frac{2u \cos\theta}{g} = \frac{2}{g}\left(\frac{u^2 \sin 2\theta}{g}\right) = \frac{2}{g} \cdot R$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R = \frac{1}{2} g\, TT'}$$

पुनः θ प्रक्षेप्य कोण पर महत्तम ऊँचाई $h = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$

तथा $(90^\circ - \theta)$ प्रक्षेप्य कोण पर महत्तम ऊँचाई

$$h' = \frac{u^2 \sin^2(90^\circ - \theta)}{2g} = \frac{u^2 \cos^2\theta}{2g}$$

$$\therefore \quad h \times h' = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} \times \frac{u^2 \cos^2 \theta}{2g} = \frac{1}{16} \times \frac{4u^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{g^2}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{2u^2 \sin \theta \cos \theta}{g}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{u^2 \sin 2\theta}{g}\right)^2$$

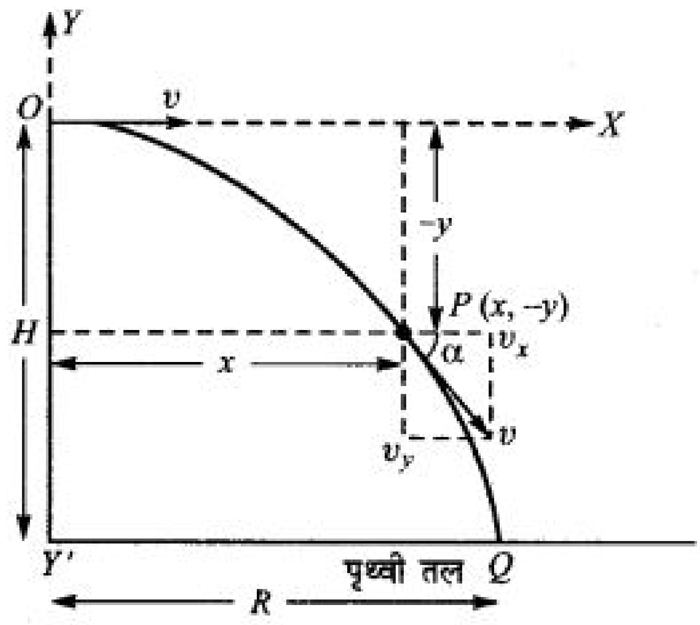
$$\Rightarrow \quad hh' = \frac{1}{16} R^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R = 4\sqrt{hh'}}$$

प्रश्न 4:

“किसी ऊँचाई से पृथ्वी के समान्तर प्रक्षेपित पिण्ड का पथ भी परवलयाकार होता है।” सिद्ध कीजिए। पिण्ड के उड्डयन काल तथा क्षैतिज परास का व्यजंक स्थापित कीजिए।

उत्तर:

किसी ऊँचाई से पृथ्वी के समान्तर प्रक्षेपित । पिण्ड का पथ- चित्र 4.16 में पृथ्वी तल से H ऊँचाई पर स्थित कोई बिन्दु O है, जहाँ से कोई पिण्ड (प्रक्षेप्य) क्षैतिज दिशा OX में अर्थात् पृथ्वी के समान्तर प्रारम्भिक वेग 06 से प्रक्षेपित किया गया है। YOY’ बिन्दु O से गुजरती पृथ्वी के लम्बवत् रेखा है। अतः O को मूलबिन्दु मानते हुए प्रारम्भ में अर्थात् किसी क्षण t पर $X_0 = 0$ तथा $y_0 = 0$. क्षैतिज दिशा में पिण्ड पर कोई त्वरण कार्य नहीं करता है अर्थात् $a_X = 0$, इसलिए इस दिशा में प्रक्षेप्य का वेग v0 नियत रहता है। ऊध्र्वाधरत: नीचे की ओर पिण्ड का त्वरण $a_Y = - g$.



चित्र 4.16

माना प्रक्षेपित किए जाने के समय पश्चात् अर्थात् क्षण ।

पर पिण्ड प्रक्षेप्य पथ के बिन्दु P पर है जिसके निर्देशांक (x, -y) हैं अर्थात् पिण्ड ने नियत v0 वेग से T समय में क्षैतिज दूरी X तय की है तथा गुरुत्व के अन्तर्गत $a_Y = - g$ त्वरण से स्वतन्त्रतापूर्वक नीचे की ओर t समय में -y

दूरी तय की है। चूंकि $(v_0)_y = 0$ पर पिण्ड का सम्पूर्ण वेग क्षैतिज दिशा में था; इसलिए इस क्षण ऊध्वधरतः नीचे की ओर प्रारम्भिक वेग $(v_0)_y = 0$ तथा $(v_0)_x = v_0$.

अत: क्षैतिज दिशा में गति की समीकरण,

$$x = x_0 + (v_0)_x \times t + \frac{1}{2} a_x t^2 \text{ से,}$$

$$x = 0 + v_0 \times t + \frac{1}{2} \times 0 \times t^2$$

या $$x = v_0 \times t \quad \text{अर्थात्} \quad t = x/v_0 \qquad ...(1)$$

ऊर्ध्वाधर दिशा में गति की समीकरण, $y = y_0 + (v_0)_y \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2$ से,

$$-y = 0 + 0 \times t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \quad \text{अथवा} \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) से t का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

अथवा $$\boldsymbol{y = \left(\frac{g}{2 v_0^2}\right) \cdot x^2} \qquad ...(3)$$

इस समीकरण में $(g/2v_0^2)$= नियतांक अर्थात् समीकरण (3) $y = kx^2$ (जहाँ $k = g/2v_0^2$) एक परवलय की प्रदर्शित करती है। अतः सिद्ध होता है कि पृथ्वी से किसी ऊँचाई से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित पिण्ड का पथ भी परवलयाकार होता है।

उड्डयन काल तथा क्षैतिज परास:

पिण्ड द्वारा O से Q तक पहुँचने में लिया गया समय उड्डयन काल T; होगा तथा इस समय में पिण्ड द्वारा तय की गयी क्षैतिज दूरी OQ= R क्षैतिज परास होगी। इस समय में पिण्ड स्वतन्त्रतापूर्वक [अर्थात् $(v_0)_Y = 0$] ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर $y = -H$ दूरी पर गिरता है।

अतः ऊर्ध्वाधर गति की समीकरण, $y = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$ में,

$$y_0 = 0, (v_0)_y = 0, t = T_f$$

तथा $y = -H$ एवं $a_y = -g$ रखने पर,

$$\therefore \quad -H = 0 + 0 \times T_f + \frac{1}{2}(-g).T_f^2$$

अथवा $H = \frac{1}{2} g T_f^2$

$\therefore$ उड्डयन काल, $$\boldsymbol{T_f = \sqrt{\frac{2H}{g}}} \quad ...(4)$$

क्षैतिज दिशा में गति की समीकरण $x = x_0 + (v_0)_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$ में,

$x = R, x_0 = 0, (v_0)_x = v_0, t = T_f$ तथा $a_x = 0$ रखने पर,

$$R = 0 + v_0 \times T_f + \frac{1}{2} \times 0 \times T_f^2$$

अथवा $R = v_0 \times T_f$

समीकरण (4) से T_f का मान रखने पर, $R = v_0 \times \sqrt{\frac{2H}{g}}$

अर्थात् क्षैतिज परास $\boldsymbol{R = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}}$

प्रश्न 5:

एक पत्थर मीनार की चोटी से क्षैतिज से 30° का कोण बनाता हुआ 16 मी/से के वेग से ऊपर की ओर फेंका जाता है। उड़ान के 4 सेकण्ड पश्चात् यह पृथ्वी तल पर टकराता है। पृथ्वी से मीनार की ऊँचाई तथा पत्थर का क्षैतिज परास ज्ञात कीजिए। (g = 9.8 मी/से²)।

हल:

दिया है, प्रारम्भिक वेग $(u) = 16$ मी/से;
प्रक्षेपण कोण $(\theta) = 30°$, गुरुत्वीय त्वरण $(g) = 9.8$ मी/से^{2};
उड़ान का समय $(t) = 4$ सेकण्ड
पत्थर का ऊर्ध्वाधर वेग $(v_y) = 16 \sin 30°$

$$= 16 \times \frac{1}{2} = 8 \text{ मी}$$

पत्थर का प्रारम्भिक क्षैतिज वेग $(u_x) = 16 \cos 30°$

$$= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 8\sqrt{3} \text{ मी/से}$$

गति को ऊर्ध्वाधर दिशा में लेने पर, मीनार की ऊँचाई,

$$h = u_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

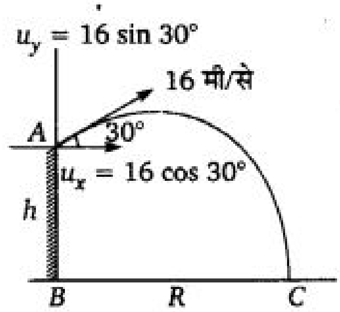
$$= (-8) \times 4 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (4)^2$$

$$= -32 + 78.4 = \mathbf{46.4 \text{ मी}}$$

गति को क्षैतिज दिशा में लेने पर, पत्थर का क्षैतिज परास,

$$R = u_x \times t$$

$$= 8\sqrt{3} \times 4 = 32 \times 1.732 = \mathbf{55.4 \text{ मी}}$$



चित्र 4.17

प्रश्न 6:

10 मी ऊँची मीनार की चोटी से एक गेंद क्षैतिज से 30° के कोण पर ऊपर की ओर किस | वेग से फेंकी जाए कि गेंद मीनार के आधार से 17.3 मी की दूरी पर जाकर पृथ्वी तल से टकराए? (g= 10 मी/से²)

हल:

दिया है, h = 10 मी, 8 = 30°, R = 17.3 मी

दिया है, $h = 10$ मी, $\theta = 30°$, $R = 17.3$ मी

हम जानते हैं, वेग का क्षैतिज घटक $(u_x) = u \cos\theta = u \cos 30° = u \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ मी/से

वेग का ऊर्ध्वाधर घटक $(u_y) = u \sin\theta = u \sin 30° = \frac{u}{2}$ मी/से

क्षैतिज परास $(R) = u_x \times t$

$\Rightarrow \quad t = \frac{R}{u_x} = \frac{17.3 \times 2}{u\sqrt{3}} = \frac{20}{u}$ सेकण्ड

ऊर्ध्वाधर दिशा में गति के लिए,

$$y = h = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$-10 = \frac{u}{2} \times t - \frac{1}{2} \times 10t^2$$

$$\Rightarrow \quad -10 = \frac{u}{2} \times \frac{20}{u} - \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{20}{u}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad -10 = 10 - \frac{2000}{u^2}$$

$$\Rightarrow \quad u^2 = \frac{2000}{20}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt{100}$$

$\Rightarrow$ **$u = 10$ मी/से**