अध्याय

14

सांख्यिकी

(Statistics)

14.1 प्रस्तावना

गणेश ने अपनी कक्षा के 26 छात्रों के गणित के संग्रहणात्मक इकाई - I के अंक, इस प्रकार पंजीकृत किये।

अर्जुन	76	नारायण	12
कामीनि	82	सुरेश	24
शफ़िक	64	दुर्गा	39
केशव	53	शिवा	41
लता	90	रहीम	69
राजेन्द्र	27	राधा	73
रामू	34	कार्तिक	94
सुधा	74	जोसफ	89
क्रिष्णा	76	इकरम	64
सोमु	65	लक्ष्मी	46
गौरी	47	सीता	19
उपेन्द्र	54	रेहाना	53
रामय्या	36	अनिता	69

(ऊपर दिए गए दत्त ठीक ढंग से संगठित है या नहीं?)

अध्यापिका ने कक्षा के गणित के अंकों के संग्रहणात्मक इकाई का विवरण देने के लिए कहा।

गणेश ने अपनी कक्षा के प्रदर्शन को समझने के लिए इस तालिका को बनाया।

अंक	छात्रों की संख्या
0 - 33	4
34 - 50	6
51 - 75	10
76 - 100	6

ऊपर की तालिका में दिए गए दत्त समूहबद्ध है या असमूहबद्ध है।

उसने अपनी अध्यापिका को वह तालिका बताई, अध्यापिका ने दत्तों के संगठन को समझने के लिए उसकी सराहना की। हम यह देखते हैं कि बहुत सारे विद्यार्थियों के अंक 51-75 के बीच है। क्या आप विचार करते है कि गणेश ने छोटी श्रेणी का उपयोग किया है?

पिछली कक्षा में आपने समूहबद्ध और असमूहबद्ध दत्तों में अंतर के बारे में सीखा। असमूहबद्ध दत्तों के मध्यमान को ज्ञात करना इसके बारे में भी आपने पढा। इसका स्मरण करते हुए अब मध्यमान, मध्यिका और बहुलक ज्ञात करना सीखेंगे।

14.2 असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान (Mean of ungrouped data) :-

हमें ज्ञात है कि निरीक्षणों का मध्यमान (औसत) सभी मूल्यों के योग को कुल निरीक्षणों के संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। मान लीजिए $x_1, x_2, \ldots, x_n$ निरीक्षण है $f_1, f_2, \ldots, f_n$. बारंबारिता है। इसका अर्थ है कि निरीक्षण x_1 आता है f_1 बार, x_2 आता है f_2 बार, और इसी प्रकार....

अब, निरीक्षणों के मूल्यों का योग $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$, और निरीक्षणों की संख्या $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

अतः, मध्यमान $\bar{x}$ दिए गए दत्तों की इस प्रकार दिया गया है।

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

स्मरण कीजिए कि संक्षिप्त में इसे ग्रीक अक्षर $\sum$ (इसे सिग्मा पढते हैं) के उपयोग से लिख सकते हैं जिसका अर्थ है योग, अर्थात $\bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

उदाहरण-1. किसी विद्यालय के दसवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्तांकों की बारंबारिता तालिका नीचे दी गई है तो विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
विद्यार्थियों की संख्या(f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

हल : दत्तों को दुबारा - लिखकर निरीक्षणों का योग ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (fi)	f_ix_i
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
कुल	$\sum f_i = 30$	$\sum f_ix_i = 1779$

अतः $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

अर्थात्, मध्यमान अंक = 59.3.

हमारे वास्तविक जीवन में, दत्त इतने बडे हैं कि उनका अर्थपूर्ण अभ्यास करना होगा।

अतः हमें असमूहबद्ध दत्तों को समूहबद्ध दत्तों में बदलने की आवश्यकता है और मध्यमान ज्ञात करने की विधि को ढूँढ निकालना है।

मान लीजिए उदाहरण 1 असमूहबद्ध दत्तों के समूहबद्ध दत्तों में 15 का वर्गांतर लेते हुए बाँटेंगे या यहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि यदि कोई बारंबारिता वर्गांतर के उच्च श्रेणी से मेल खाती हो तो उसे उसके अगले वर्गांतर की निम्न श्रेणी में रखना चाहिए। उदाः 4 चार विद्यार्थी जिन्होंने 40 अंक प्राप्त किए उन्हें 40-55 के श्रेणी में रखेंगे, लेकिन 25-40 में नहीं, इस बात को ध्यान में रखते हुए समूहबद्ध बारंबारिता तालिका बनाएँगे :-

वर्गांतर	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
छात्रों की संख्या	2	3	7	6	6	6

अब, प्रत्येक वर्गांतर के लिए हमें एक बिंदु की आवश्यकता होती है जो पूर्ण श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। यह मान लेते है कि प्रत्येक वर्गांतार की बारंबारिता मध्य बिंदु के आसपास रहती है। अतः प्रत्येक श्रेणी का मध्यबिंदु उस श्रेणी में आने वाली संख्या होती है जिसे class mark या श्रेणी अंक कहते हैं। स्मरण कीजिए कि हम श्रेणी अंक के लिए उच्च सीमा और निम्न सीमा की औसत लिखते हैं।

10-25 श्रेणी में, श्रेणी अंक $\frac{10+25}{2}$ =17.5. उसी प्रकार, शेष वर्गांतर का श्रेणी अंक ज्ञात करेंगे। उन्हें हम तालिका में लिखेंगे। इसे हम x_i लिखते हैं। अब हम पिछले उदाहरण की तरह मध्यमान की गणना करेंगे।

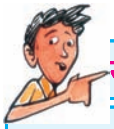
वर्गांतर	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	श्रेणी अंक मध्यमान (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
कुल	$\sum f_i$=30		$\sum f_i x_i$=1860.0

अंतिम स्तंभ में, मूल्यों के योग में $\sum f_i x_i$ देते है। अतः मध्यामान $\bar{x}$ दिए गए दत्तों का

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

इस मध्यमान को ज्ञात करने की नई पद्धति को प्रत्यक्ष विधि (direct method) कहते हैं।

हम ऊपर दर्शाए अनुसार, उन्हीं दत्तों का उपयोग कर रहे हैं और उसी सूत्र को नियुक्त कर रहे हैं, मध्यमान की गणना या हल करने के लिए लेकिन जो (result) उत्तर प्राप्त हो रहा है वह अलग है और 62 मध्यमान है। क्या आप सोच सकते कि ऐसा क्यों होता है?



सोचिए और चर्चा कीजिए।

1. समूहबद्ध और असमूहबद्ध दत्तों से मध्यमान की गणना कर सकते हैं। इनमें कौनसी विधि उपयुक्त होगी? और क्यों?
2. समूहबद्ध दत्तों को हल करने के लिए कौनसी विधि उपयुक्त होगी?

समूहबद्ध दत्तों की गणना करने के लिए सबसे उपयुक्त विधि कौनसी होगी।

जब संख्याएँ या अंकिय मूल्य x_1 और f_1 बड़े रहते है तो x_1 और f_1 के गुणनफल में समय की खपत ज्यादा होती है। अतः इस स्थिति में एक और विधि के बारे में विचार करेंगे जिसमें कम गुणनफल आसानी से ज्ञात किया जा सके।

हम f_i को कुछ भी नही कर सकते लेकिन हम प्रत्येक x_i को छोटी संख्या में बदल सकते हैं जिससे गुणनफल सरल हो। इसे हम किस प्रकार कर सकते हैं? एक निश्चित संख्या में से प्रत्येक मूल्य को घटाने पर छोटी संख्या प्राप्त होती है। अब इस विधि से उदाहरण 1 को हल करेंगे।

(पहले चरण में) हमें x_i' में से किसी एक मूल्य को कल्पित मध्यमान के रूप में चुनकर उसे a से सूचित करेंगे। गणना की सरलता के लिए 'a' का मूल्य $x_1, x_2, ..., x_n$. के मध्य होना चाहिए। अतः $a = 47.5$ या $a = 62.5$. मान लीजिए $a = 47.5$.

दूसरे चरण में (x_i के प्रत्येक मूल्य के साथ 'a' का अन्तर ज्ञात करेंगे। जिसे हम d_i से सूचित करेंगे।

अतः $\quad d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

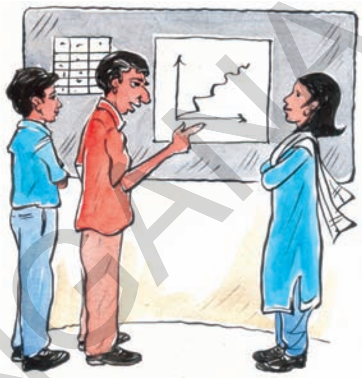
तीसरे चरण में d_i का गुणनफल संलग्न f_i से करेंगे और $f_i d_i$ के सभी मूल्यों का योग ज्ञात करेंगे। इसकी गणना नीचे तालिका में दी गई है।

वर्गांतर	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	कक्षा अंक (मध्य मूल्य)(x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5 (a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
कुल	$\sum f_i$=30			$\sum f_i d_i = 435$

अतः ऊपर की तालिका से विचलन का मध्यमान, $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

अब, $\bar{d}$ और $\bar{x}$. के बीच संबंध ज्ञात करेंगे।

जैसे हम d_i को प्राप्त करने के लिए x_i के प्रत्येक मूल्य में से 'a' को घटाते है, उसी प्रकार मध्यमान $\overline{x}$ को प्राप्त करने के लिए 'a' को $\overline{d}$ में जोडेंगे। इसे गणितीय पद्धति द्वारा इस प्रकार ज्ञात किया जाता है,



विचलन का मध्यमान, $\overline{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

अतः, $$\overline{d} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \overline{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$\overline{d} = \overline{x} - a$$

इसलिए $$\overline{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

तालिका से a, $\sum f_i d_i$ और $\sum f_i$ के मूल्यों को उपरोक्त में स्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा

$$\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

अर्थात, छात्रों द्वारा प्राप्तांक का मध्यमान $= 62$.

ऊपर दी गई विधि को 'कल्पित मध्यमान विधि'' कहते हैं।

क्रियाकलाप

उदाहरण 1 में दिये गये दत्तों के मध्यमान को विचलन पद्धति से x_i के क्रमागत मूल्यों अर्थात् 17.5, 32.5, ... आदि को कल्पित मध्यमान लेकर ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। आगे हम नीचे दिये गये अंशों पर चर्चा करेंगे।

1. क्या समानान्तर माध्य के मूल्य उपरोक्त सभी स्थितियों में समान होंगे?
2. यदि प्रत्यक्ष मध्यमान को कल्पित मध्य के रूप में लेने पर $\sum f_i d_i$ का मूल्य क्या होगा?
3. किसी भी मध्य-मूल्य (कक्षा अंक) को कल्पित मध्यमान लेने का कारण क्या हो सकता हैं?

नीचे दी गई तालिका में ध्यान पूर्वक चौथे स्तंभ को देखिए। सभी मूल्य 15 के गुणक है अतः यदि हम चौथे स्तंभ के सभी मूल्यों को 15 से विभाजित करेंगे। तो हमें छोटी संख्या प्राप्त होती है जिसे हम f_i से गुणा करते हैं। (यहाँ प्रत्येक कक्ष का वर्गांतर 15 है।)

अतः, मान लीजिए $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ जहाँ a कल्पित मध्यमान है और h कक्षा की लम्बाई है।

अब, u_i की गणना इस विधि द्वारा की जा सकती है। (अर्थात $f_i u_i$ ज्ञात कर $\sum f_i u_i$ का मूल्य ज्ञात करेंगे।) $h = 15$, [प्रायः कक्षा की लम्बाई को h लेते हैं लेकिन यह अंतराल कक्षा का अंतराल होना आवश्यक नहीं है।]

मान लीजिए $\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

वर्गांतर	छात्रों की संख्या (f_i)	कक्षा अंक (x_i) (मध्य मूल्य)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
कुल	$\sum f_i = 30$				$\sum f_i u_i = 29$

यहाँ, फिर से, $\bar{u}$ और $\bar{x}$ के बीच के संबंध को ज्ञात करेंगे।

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

अतः $$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

अतः $$\bar{u} = \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

या $$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

इसलिए $$\bar{x} = a + h\left[\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right]$$

या
$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

दिए गए तालिका से $a, \sum f_i u_i\, h$ और $\sum f_i$ के मूल्यों को सूत्र में स्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

अतः विद्यार्थी द्वारा प्राप्त मध्यमान = 62.

ऊपर दी गई विधि को Step-deviation या क्रम विचलन विधि कहते हैं।

- यदि सभी d_i में समान गुणनखण्ड हो तो क्रम-विचलन पद्धति सुविधाजनक होती है।
- तीनो विधियों द्वारा प्राप्त मध्यमान समान होते हैं।
- कल्पित - मध्यमान विधि और क्रम विचलन विधि यह प्रत्यक्ष विधि का सरलीकृत नमूना है।
- सूत्र $\bar{x} = a + h\bar{u}$ में a और h ऊपर दिए गए अनुसार न हो तो भी इसका अस्तित्व रहता है।

  यदि वे कोई अशून्य संख्याएँ हो $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

  इस विधि से दूसरे उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-2. नीचे दी गई तालिका में भारत के विभिन्न प्रदेशों के ग्रामीण क्षेत्र के प्राथमिक विद्यालयों में महिला अध्यापिकाओं का प्रतिशत वितरण दिया गया है। तो महिला अध्यापिका के मध्यमान प्रतिशत को तीनों विधियों में ज्ञात कीजिए।

महिला अध्यापिका प्रतिशत	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
प्रदेशों की संख्या/U.T.	6	11	7	4	4	2	1

(Source : *Seventh All India School Education Survey conducted by NCERT)*

हल: सभी वर्गांतरों के कक्षा अंको (मध्य-मूल्यों) को ज्ञात कर तालिका में लिखिए।

यहाँ हम $a = 50, h = 10,$

तो $d_i = x_i - 50$ और $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$

अब d_i और u_i ज्ञात कर तालिका में लिखने पर,

महिला अध्यापिकाओं का प्रतिशत C.I	राज्यों/के.शा. प्रदेशों की संख्या f_i	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
कुल	35				1390	-360	-36

ऊपर की तालिका से हमें $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390, \sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$ प्राप्त होता है

प्रत्यक्ष विधि के उपयोग से, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

कल्पित मध्यमान विधि के उपयोग से, $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

क्रम विचलन विधि के उपयोग से $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

अर्थात प्राथमिक विद्यालय के ग्रामीण क्षेत्र की महिला अध्यापिकाओं का औसत मध्यमान 39.71 है।

सोचिए और चर्चा कीजिए :-

1. तीनों विधियों द्वारा प्राप्त परिणाम समान है।
2. यदि x_i और f_i पर्याप्त छोटी संख्याएँ हो, तो कौनसी विधि उचित होगी?
3. यदि x_i और f_i बडी संख्या हो, तो कौनसी विधि का उपयोग उचित होगा?

यदि वर्गांतर असमान हो तथा x_i का मूल्य बडा हो तब भी हम विचलन पद्धति का उपयोग d_i के किसी उचित भाजक के साथ कर सकते हैं।

उदाहरण -3. नीचे दिए बारंबारिता से गेंदबाज़ों द्वारा लिए गए विकेटों की संख्या दी गयी है। तो उचित विधि द्वारा विकेटों का मध्यमान ज्ञात कीजिए मध्यमान का अर्थ क्या है?

विकेटों की संख्या	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 – 450
गेंदबाज़ों की संख्या	7	5	16	12	2	3

हल : यहाँ कक्षा का वर्गांतर बढते जा रहा, और x_i का मूल्य बहुत बडा है, तो विचलन विधि को लागू करने पर, $a = 200$, $h = 20$, से हमें निम्न मूल्य प्राप्त होते हैं।

विकेट की संख्या	बल्लेबाज की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ($h = 20$)	$f_i u_i$
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
कुल	45				-106

$$\text{अत:}\ \bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$

अत: 45 बल्लेबाज़ों द्वारा लिये गये औसत विकेटों की संख्या 152.89 है।

कक्षा के लिए प्रयोगात्मक कार्य (Classroom Project)

1. आपके विद्यालय में हाल ही में लिये गये परीक्षा में आपकी कक्षा द्वारा प्राप्त किये गये अंको को समूहबद्ध बारंबारिता तालिका में लिखिए। दूसरे विषयों के अंको को भी लिखकर तुलना कीजिए। प्रत्येक का उचित विधि द्वारा मध्यमान ज्ञात कीजिए।
2. आपके शहर के 30 दिन का अत्यधिक तापमान के विवरण को पंजीकृत कर उसे समूहबद्ध तालिका में दर्शाइए। दिए गए दत्तों का मध्यमान उचित विधि से ज्ञात कीजिए।
3. अपनी कक्षा के सभी छात्राओं की ऊँचाई को माप कर दत्तों को इस संचित बारंबारिता समूह की तालिका में लिखिए। उचित पद्धति द्वारा दत्तों का मध्यमान ज्ञात कीजिये।

अभ्यास - 14.1

1. एक सर्वेक्षण के अनुसार, कुछ विद्यार्थियों के समूह द्वारा जिसमें उन्होंने निम्न जानकारी प्राप्त की जिसमें वृक्षों की संख्या जो 20 घरों में है तो प्रत्येक घर के वृक्षों का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

वृक्षों की संख्या	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

2. एक फैक्टरी में 50 मज़दूरों की दैनिक मज़दूरी की बारम्बारिता तालिका नीचे दी गई है मध्यमान ज्ञात कीजिए। आपकी सुविधा के अनुसार कोई भी विधि का उपयोग कीजिए।

दैनिक मज़दूरी रूपयों में	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
मज़दूरों की संख्या	12	14	8	6	10

3. किसी परिसर के कुछ बच्चों का जेब खर्च निम्न बारंबारिता तालिका में दिया गया है यदि मध्यमान ₹18 है तो f का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रतिदिन जेब खर्च (₹ में)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

4. किसी अस्पताल की तीस महिलाओं का परीक्षण किया गया और उनके हृदय की धडकन प्रति मिनट पंजीकृत की गयी हो, तो हृदय की धडकन का औसत (मध्यमान) ज्ञात कीजिए। उपयुक्त विधि का चयन कीजिए।

हृदय स्पंदन की संख्या/मिनट	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

5. एक खुदरे बाजार में, एक फल का विक्रेता, संतरों को बेचता है जो टोकरियों में रखे गए है। उन टोकरियों में संतरों की संख्या भिन्न-भिन्न है। दी गई तालिका में संतरों का वितरण इस प्रकार है।

संतरों की संख्या	10-14	15–19	20-24	25-29	30–34
टोकरियों की संख्या	15	110	135	115	25

तो प्रत्येक टोकरी में के संतरों का मध्यमान ज्ञात कीजिए। आप कौनसी विधि का चयन करेंगे?

6. किसी मुहल्ले के 25 घरों का दैनिक भोजन खर्च इस तालिका में दिया गया है।

दैनिक खर्चा रूपयों में	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
घरों की संख्या	4	5	12	2	2

तो उचित विधि द्वारा मध्यमान ज्ञात कीजिए।

7. किसी शहर के 30 मोहल्लों की वायु में SO_2 की मात्रा (ppm) का विवरण इस प्रकार है।

SO_2 ppm में	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
बारंबारिता	4	9	9	2	4	2

तो वायु में SO_2 की मात्रा का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

8. किसी कक्षा के 40 विद्यार्थियों के पूर्ण कार्य काल के उपस्थिति विवरण कक्षा अध्यापिका ने निम्न रूप से दिया। 56 दिनों के कार्यकाल में विद्यार्थियों का मध्यमान क्या होगा?

दिनों की संख्या	35-38	38-41	41-44	44-47	47-50	50-53	53-56
विद्यार्थियों की संख्या	1	3	4	4	7	10	11

9. निम्न तालिका में 35 शहरों का साक्षरता दर (प्रतिशत में) दिया गया है तो साक्षरता दर का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

साक्षरता % में	45–55	55-65	65-75	75-85	85-95
शहरों की संख्या	3	10	11	8	3

14.3 बहुलक (Mode) :

एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारंबारिता सबसे अधिक है उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहते है।

समूहबद्ध दत्तों के बहुलक की गणना से पहले हम असमूहबद्ध दत्तों के बहुलक ज्ञात करने की विधि का स्मरण करेंगे।

उदाहरण -4. 10 क्रिकेट मैचों में गेंदबाज़ के द्वारा विकेटों की ली गई संख्या 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3. है तो बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले निरीक्षणों को क्रम में व्यवस्थित कीजिए अर्थात: 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6 ज्यादा से ज्यादा मैचों में अर्थात (3बार) अतः दिये गये दत्तों का बहुलक लिये गये विकेटों की संख्या 2 है।

यह कीजिए।

1. निम्नलिखित दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।
   a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7.
   b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.
   c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.
2. क्या बहुलक दत्तों के मध्य स्थित रहता है?
3. क्या उदाहरण के निरीक्षण में एक और दत्त को जोड़ने पर बहुलक बदलता है? इसका विचार कीजिए।
4. यदि उदाहरण 4 के अधिकतम मूल्य को 8 में परिवर्तित करेंगे तो क्या वह बहुलक को प्रभावित करते हैं? विचार कीजिए।

बारंबारिता को देखते हुए समूहबद्ध बंटन तालिका में के बहुलक को निर्धारित करना संभव नहीं है यहाँ हम केवल और उच्चतम बारंबारिता के कक्ष का पता लगा सकते है इसे (Modal Class) बहुलक वर्गांतर कहते हैं।

बहुलक वर्गांतर में ही बहुलक का मूल्य रहता है, और उसे सूत्र द्वारा बताया जा सकता है।

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ, l = बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा

h = बहुलक श्रेणी की लंबाई

f_1 = बहुलक श्रेणी की बारंबारिता

f_0 = बहुलक श्रेणी के तुरंत ऊपर वाली बारंबारिता

f_2 = बहुलक श्रेणी के तुरंत नीचे वाली बारंबारिता है।

उदाहरण-5. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा एक मोहल्ले के 20 परिवारों का सर्वेक्षण किया गया तथा इस तालिका में परिवार के सदस्यों की संख्या दी गयी है।

परिवार का वर्गीकरण	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवार की संख्या	7	8	2	2	1

दिए गए दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ अधिकतम बारंबारिता 8 है, जिसकी वर्ग श्रेणी 3-5 है इसलिए बहुलक श्रेणी 3-5 होगी।

बहुलक श्रेणी = 3-5, बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा = 3, वर्गांतर $(h) = 2$

श्रेणी की बारंबारिता $(f_1) = 8$,

बहुलक श्रेणी के तुरन्त ऊपर वाली बारंबारिता $(f_0) = 7$,

बहुलक श्रेणी के तुरन्त नीचे वाली बारंबारिता $(f_2) = 2$.

अब, इन मूल्यों को सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

इसलिए दिए गए दत्तों का बहुलक $= 3.286$.

उदाहरण-6. गणित की परीक्षा में 30 छात्रों के अंक नीचे की तालिका में दिये गये है। दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए और बहुलक और मध्यमान की तुलना कीजिए तथा उनकी व्याख्या कीजिए।

वर्गांतर	छात्रों की संख्या (f_i)	श्रेणी अंक (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
कुल	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

हल: विद्यार्थियों की अधिकतम संख्या (अर्थात 7) जिन्हें सबसे अधिक अंक मिले उनका वर्गांतर 40-65 है अर्थात् बहुलक श्रेणी 40 - 55 होगी।

बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा $l = 40$,

वर्गांतर $(h) = 15$,

बहुलक श्रेणी की बारंबारिता Modal Class की $(f_1) = 7$,

बहुलक श्रेणी के तुरंत ऊपर वाली बारंबारिता $(f_0) = 3$,

बहुलक श्रेणी के तुरंत नीचे वाली बारंबारिता $(f_2) = 6$.

अब, सूत्र के उपयोग से

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times 7 - 6 - 3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

टिप्पणी : बहुलक अंक 52 है, अब उदाहरण 1 से, हमें ज्ञात है कि, मध्यमान अंक 62 है। अत्यधिक विदयार्थियों ने 52 अंक प्राप्त किए जब कि औसत विद्यार्थियों ने 62 अंक प्राप्त किये हैं।

सोचिए और चर्चा कीजिए।

1. परिस्थिति की मांग के अनुसार हम औसत अंक ज्ञात करने में रूचि रखते हैं या अधिक से अधिक विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों में रूचि रखते हैं।
   a. पहली स्थिति में हमें क्या ज्ञात हुआ।
   b. दूसरी स्थिति में हमें क्या ज्ञात हुआ।
2. क्या असमान श्रेणी के समूहबद्ध दत्तों का बहुलक ज्ञात किया जा सकता?

अभ्यास - 14.2

1. एक वर्ष में अस्पताल में भर्ती किए गए रोगियों की संख्या इस तालिका में दी गयी है।

आयु (वर्ष में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
मरिजो की संख्या	6	11	21	23	14	5

ऊपर दिए गए दत्तों से बहुलक एवं मध्यमान ज्ञात कीजिए। दो केन्द्रिय प्रवृति के मापों की तुलना एवं व्याख्या कीजिए।

2. निम्नलिखित तालिका से 225 बिजली के यंत्र के भागों के जीवन काल (घंटों में) की सूचना इस प्रकार दी गयी है।

जीवन काल (घंटों में)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
बारंबारिता	10	35	52	61	38	29

बिजली के भागों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित बारंबारिता बंटन तालिका में किसी गाँव के 200 परिवार का मासिक खर्च का विवरण दिया गया। मासिक खर्च का मध्यमान तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

खर्च (रूपयों में)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
परिवार की संख्या	24	40	33	28	30	22	16	7

4. भारत के राज्य स्तर पर उच्च माध्यमिक पाठशालाओं में शिक्षक एवं विद्यार्थी अनुपात इस बारंबारिता तालिका में दिया गया है।

विद्यार्थियों की संख्या	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
प्रांतो की संख्या	3	8	9	10	3	0	0	2

5. एक दिवसीय अंतराष्ट्रीय क्रिकेट मैच में संसार के कुछ प्रसिद्ध बल्लेबाज़ के रनों की संख्या का विवरण इस तालिका में दिया गया। दिये गये दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

रन	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
बल्लेबाज़	4	18	9	7	6	3	1	1

6. किसी एक निश्चित स्थान पर हर 3 मिनट में गुजरने वाली 100 कारों का विवरण इस तालिका में दिया गया है।

कारों की संख्या	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
बारंबारिता	7	14	13	12	20	11	15	8

तो दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

14.4 समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका (Median of grouped data)

मध्यिका केन्द्रिय प्रवृत्ति का वह माप है जो हमें निरीक्षणों का मध्यत्तम मूल्य देता है। असमूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने की विधि का स्मरण कीजिए, सबसे पहले हम निरीक्षणों को आरोही क्रम में लिखते हैं।

फिर यदि n विषम हो तो मध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ निरीक्षण और

यदि n सम हो तो, मध्यिका $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ निरीक्षणों का औसत रहता है।

यदि हमें किसी कक्षा के 100 छात्रों की एक परीक्षा में 50 में से प्राप्तांक क्रमशः निम्नलिखित हो तो मध्यिका ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	20	29	28	33	42	38	43	25
छात्रों की संख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

सबसे पहले अंकों को आरोही क्रम में लिखकर, बारंबारिता की तालिका को 14.9 के अनुसार बनाइए।

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या (बारंबारिता)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
कुल	100

यहाँ $n = 100$, जो सम है, $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ निरीक्षणों का औसत मध्यिका होगा। अर्थात् 50 वाँ और 51वाँ निरीक्षण होंगे। हमें मध्य मूल्य को ज्ञात करने के लिए हमें संचित बारंबारिता तालिका की रचना करनी होगी।

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	संचित बारंबारिता
20	6	6
25 तक	6 + 20 = 26	26
28 तक	26 + 24 = 50	50
29 तक	50 + 28 = 78	78
33 तक	78 + 15 = 93	93
38 तक	93 + 4 = 97	97
42 तक	97 + 2 = 99	99
43 तक	99 + 1 = 100	100

ऊपर की तालिका के अनुसार, हम यह देखते हैं कि

50 वाँ निरीक्षण 28 है, (क्यों?)

51 वाँ निरीक्षण 29

मध्यिका $= \frac{28+29}{2} = 28.5$

टिप्पणी : ऊपर दिए गए तालिका में, (1) पहला स्तंभ और (3) तीसरे स्तंभ को संचित बारंबारिता तालिका कहते हैं। मध्यिका अंक 28.5 यह सूचना देता है कि 50% विद्यार्थियों ने 28.5 से कम अंक प्राप्त किए और 50% विद्यार्थियों ने 28.5 से अधिक अंक प्राप्त किए।

53 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त अंको की समूहबद्ध बारंबारिता तालिका में देखिए।

अंक	छात्रों की संख्या
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

इस तालिका से निम्नलिखित प्रश्नों कें उत्तर दीजिए। कितने विद्यार्थियों ने 10 से कम अंक प्राप्त किए? उत्तर स्पष्ट है 5

कितने विद्यार्थियों ने 20 से कम अंक प्राप्त किए है? 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी 0-10 तथा 10-20 की श्रेणी में आते है छात्र अंक लिए इसका अर्थात कुल विद्यार्थियों की संख्या जिन्होंने 20 से कम अंक प्राप्त किया है 5 + 3, अर्थात 8 है हम कह सकते कि 10-20 श्रेणी की संचित बारंबारिता 8 है (जैसा कि तालिका में 14.11 में बताए अनुसार)

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5
20 से कम	5 + 3 = 8
30 से कम	8 + 4 = 12
40 से कम	12 + 3 = 15
50 से कम	15 + 3 = 18
60 से कम	18 + 4 = 22
70 से कम	22 + 7 = 29
80 से कम	29 + 9 = 38
90 से कम	38 + 7 = 45
100 से कम	45 + 8 = 53

उसी प्रकार हम, दूसरी श्रेणियों की भी संचित बारंबारिता की गणना कर सकते, है अर्थात 30 से कम, 40 से कम .... 100 से कम विद्यार्थियों की संख्या इस प्रकार की बारंबारिता को आरोही संचित बारंबारिता बंटन कहते हैयहाँ 10, 20, 30, ... 100 यह क्रमशः उस बारंबारिता की उच्च सीमा होती है।

हम उसी प्रकार 0 से अधिक या 0 के समान की तालिका भी बना सकते हैं। ऊपर की तालिका से अधिक का अर्थ है कि पहली श्रेणी की बारंबारिता, 20 से अधिक या कम (यह संख्या समान है, सभी बारंबारिता का योग, पहले और दूसरे वर्गांतर के) और उसी प्रकार, हम यह देखते हैं कि 53 विद्यार्थी जिन्होंने, 0 से ज्यादा या कम अंक प्राप्त किए। 5 विद्यार्थियों ने 0-10 वर्गांतर में अंक प्राप्त किए।

प्राप्त अंक या प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या संचित बारंबारिता
0 से अधिक या समान है	53
10 " " "	53 - 5 = 48
20 " " "	48 - 3 = 45
30 " " "	45 - 4 = 41
40 " " "	41 - 3 = 38
50 " " "	38 - 3 = 35
60 " " "	35 - 4 = 31
70 " " "	31 - 7 = 24
80 " " "	24 - 9 = 15
90 " " "	15 - 7 = 8

इसका अर्थ है कि 53-5 = 48 विद्यार्थियों को 10 से अधिक या समान अंक प्राप्त हुए है। इसी प्रकार हमें उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात होगी, जिन्होंने 20 अंक प्राप्त किए हैं। 48-3 = 45, 30 से अधिक 45-4 = 41, और उसी प्रकार तालिका में दर्शाए अनुसार, ऊपर दी गई तालिका संचित बारंबारिता तालिका यहाँ 0, 10, 20, ..., 90 यह वर्गांतर की निम्न सीमा दर्शाई जाती है।

अब, समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने के लिए, हम इन में से कोई भी संचित बारंबारिता तालिका का उपयोग कर सकते है। अब समूह बद्ध दत्तों में, हम मध्य के निरीक्षण को नहीं ज्ञात कर सकते। संचित बारंबारिता तालिका में, मध्य का निरीक्षण, वर्गांतर में ही इसका मूल्य रहता है, श्रेणी के भीतर जो पूरे वर्गांतर को विभाजित करता है, दो भागों में विभाजित किया जाता है, तो यह कौन सी श्रेणी होगी?

इस श्रेणी को ज्ञात करने के लिए, हमें सभी श्रेणियों के और $\frac{n}{2}$ की संचित बारंबारिता को ज्ञात करना होगा। हमें यह ज्ञात होता है कि उस श्रेणी की संचित बारंबारिता जो $\frac{n}{2}$ से ज्यादा है वह मध्यिका की श्रेणी होगी।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)	संचित बारंबारिता (*cf*)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

इस बंटन में, $n = 53$ अतः $\frac{n}{2} = 26.5$ अब 60-70 यह श्रेणी है जिसकी संचित बारंबारिता 29 है जो $\frac{n}{2}$ से अधिक है (और लगभग) अर्थात 26.5.

इसलिए, 60-70 यह मध्यिका श्रेणी है।

मध्यिका की श्रेणी ज्ञात करने के बाद, हम निम्न सूत्र का उपयोग कर मध्यिका ज्ञात करेंगे।

$$\text{मध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

जहाँ l = मध्यिका श्रेणी की निम्न सीमा

n = निरीक्षणों की संख्या

cf = मध्यिका कक्ष से ऊपर वाली संचित बारंबारिता

f = मध्यिका कक्ष की बारंबारिता

h = वर्गांतर (मध्यिका कक्ष)

$\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60,\ cf = 22, f = 7, h = 10$ मूल्य सूत्र में स्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\text{मध्यिका} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{6}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

अतः आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से कम अंक प्राप्त किए और शेष आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से अधिक अंक प्राप्त किए।

उदाहरण-7. एक सर्वेक्षण के अनुसार दसवीं कक्षा के 51 लडकियों की ऊँचाई (से.मी. में) ज्ञात की गई (conducted) और प्राप्त दत्तों को तालिका में दर्शाया गया तो मध्यिका ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (से.मी. में)	(छात्रों की संख्या)
140 से कम	4
145 से कम	11
150 से कम	29
155 से कम	40
160 से कम	46
165 से कम	51

हल: मध्यिका की ऊँचाई को (हल) ज्ञात करने के लिए, हमें वर्गांतर ज्ञात करना होगा और उनकी संलग्न बारंबारिता यह बंटन 140, 145, 150, . . ., 165 यह संलग्न श्रेणी की उच्च सीमा होगी अतः श्रेणी 140, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165 से कम होगी।

वर्गांतर	बारंबारिता	संचित बारंबरिता
140 से कम	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

दिए गए बंटन से, हम यह ज्ञात कर सकते है कि 4 लडकियों की ऊँचाई 140 से कम है अर्थात् वर्गांतर 140 से कम की बारंबारिता अब 11 लड़कियों की ऊँचाई 145 से कम है और 4 लड़कियों की ऊँचाई 145 से कम है अर्थात् लडकियों की ऊँचाई 140-145 श्रेणी में $11 - 4 = 7$ है, उसी प्रकार इस तालिका की बारंबारिता ज्ञात कर सकते।

निरीक्षणों की संख्या, $n = 51$

$\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ वाँ निरीक्षण, जो 145 - 150 की श्रेणी में होगा।

$\therefore$ 145 - 150 यह मध्यिका की श्रेणी है।

तो, l (निम्न सीमा) $= 145$,

cf (संचित बारंबारिता की पहली श्रेणी 145 - 150) से ऊपर वाली संचित बारंबारिता $= 11$,

f (मध्यिका कक्ष की बारंबारिता 145 - 150) $= 18$,

h (वर्गांतर) $= 5$.

सूत्र का उपयोग करते हुए मध्यिका $= l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5 \qquad = 145 + \frac{72.5}{18} \quad = 149.03$$

अतः लडकियों की मध्यिका ऊँचाई 149.03 से.मी. है इसका अर्थ है कि 50% से ऊपर लडकियों की ऊँचाई उससे कम है और शेष 50% की ऊँचाई उससे अधिक है।

उदाहरण-8. दिए गए दत्तों की मध्यिका 525 है तो x और y का मूल्य ज्ञात कीजिए जिसमें कुल बारंबारिता 100 है, CI का अर्थ है वर्गांतर और Fr का अर्थ है बारंबारिता।

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

हल :

वर्गांतर	बारंबारिता	संचित बारंबारिता
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7+x$
300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y$

दिया गया है कि $n = 100$

अतः, $76 + x + y = 100$, अर्थात $x + y = 24$ .... (1)

मध्यिका 525 है, जो 500 – 600 श्रेणी में है,

अतः, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

सूत्र उपयोग से,

$$\text{मध्यिका} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

अर्थात $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

अर्थात $25 = 70 - 5x$

अर्थात $5x = 70 - 25 = 45$

अतः $x = 9$

इसलिए समीकरण (1) से, हमें $9 + y = 24$ प्राप्त होता है

अर्थात् $y = 15$

सूचनाः

समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका जिनके वार्गांतर असमान है उनकी भी मध्यिका ज्ञात की जा सकती है।

14.5 केन्द्रिय प्रवृत्ति का कौनसा मूल्य (Which Value of Central Tendency)

दिये गये विवरण के अनुसार कौनसी विधि उपयुक्त होगी

केन्द्रिय प्रवृत्ति के माप में मध्यमान का उपयोग ज्यादा होता है। क्योंकि सभी निरीक्षणों की गणना इसमें रहती है। अर्थात सभी दत्तों में सबसे अधिक और सबसे कम निरीक्षण और दो या दो से अधिक वर्गांतर की तुलना करने में, उदाहरण के लिए औसत (मध्यमान) के परिणामों की तुलना करना विभिन्न विद्यालय के किसी परीक्षा के परिणामों से हम यह ज्ञात कर सकते है कि कौनसे विद्यालय का प्रदर्शन अच्छा रहा है।

दत्तों के अंतिम सिरें के (extreme) मूल्य मध्यमान पर प्रभाव डालते हैं। श्रेणियों का मध्यमान जिनकी बारंबारिता अधिकतर समान होती है वे दत्तों का प्रतिनिधित्व करता है। मान लीजिए यदि एक श्रेणी में बारंबारिता 2 है तथा अन्य पाँच श्रेणियों की बारंबारिता 20, 25, 20, 21, 18 है तो इस स्थिति में मध्यमान दत्तों का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।

प्रश्नों में व्यक्तिगत निरीक्षणों का महत्व नहीं रहता। विशेषकर अंतिम सिरे के मूल्यों से यदि हम चाहते कि (typical) विचित्र निरीक्षण (ज्ञात करना चाहते है तो मध्यिका अधिक उचित होगी। उदाहरण के लिए यदि हम मज़दूरों के औसत उत्पादन दर ज्ञात करना चाहते है तो) इन स्थितियों में मूल्य मध्यमान से, मध्यिका का उपयोग अधिक उपयुक्त होता है।

ऐसी स्थितियाँ जहाँ हमें अधिक प्रायिक या अधिक प्रसिद्ध वस्तु को स्थापित करना हो तो बहुलक का चयन अधिक उचित होगा। उदाहरणार्थः T.V. के सबसे प्रसिद्ध प्रोग्राम को जानने के लिए, अत्यधिक मांग वाली उपभोक्ता वस्तु को जानने के लिए, अत्यधिक लोगों द्वारा वाहन के रंग का उपयोग आदि।

अभ्यास - 14.3

1. निम्नलिखित बारंबारिता बंटन में एक क्षेत्र के मासिक 68 उपभोक्ताओं द्वारा उपयोग में लाई गई विद्युत युनिट दी गई है। तो दत्तों की मध्यिका, मध्यामान और बहुलक ज्ञात कर उनकी तुलना कीजिए।

मासिक विद्युत उपयोग	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
ग्राहकों की संख्या	4	5	13	20	14	8	4

2. यदि नीचे दिए गए 60 निरीक्षणों की मध्यिका, 28.5, हो तो x और y का मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्गांतर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारिता	5	x	20	15	y	5

3. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के वितरण के बारे में निम्न जानकारी प्राप्त करता है उनकी आयु की मध्यिका ज्ञात कीजिए। (जिसकी आयु 18 वर्ष से अधिक है लेकिन 60 वर्ष से कम है। उन्ही को पॉलसी दी जायेगी।)

आयु (वर्ष में) कम	20 से कम	25 से कम	30 से कम	35 से कम	40 से कम	45 से कम	50 से कम	55 से कम	60 से कम
पॉलसी धारकों की संख्या	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4. 40 पत्तों की लम्बाई निकटतम मिली मीटर में नापकर निम्न तालिका में दत्त दिए गए है।

लम्बाई (मि.मि. मे)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
पत्तों की संख्या	3	5	9	12	5	4	2

तो पत्तों के लंबाई की मध्यिका ज्ञात कीजिए। (सूचना : निरंतर (लगातार) श्रेणियों में दत्तों को बदलना चाहिए। मध्यिका ज्ञात करने के लिए लगातार श्रेणी वाला सूत्र लगाना चाहिए। 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5.)

5. निम्नलिखित बंटन तालिका में 400 नियान गोले (neon lamps) का जीवन काल दिया गया है।

जीवन काल	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
गोलों की संख्या	14	56	60	86	74	62	48

गोलों के जीवन काल की मध्यिका को ज्ञात कीजिए।

6. एक टेलिफोन डायरी से 100 नामों को बीच-बीच में से चुना गया है और इस बारंबारिता तालिका में दिया गया है।

अक्षरों की संख्या	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
नामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

नामों के अक्षरों की मध्यिका ज्ञात कीजिए। अक्षरों का मध्यमान क्या होगा? एवं बहुलक भी ज्ञात कीजिए।

7. किसी कक्षा के 30 छात्रों के भार की बारंबारिता तालिका नीचे दी गयी है, तो छात्रों की मध्यिका भार को ज्ञात कीजिए।

भार (किलो में)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

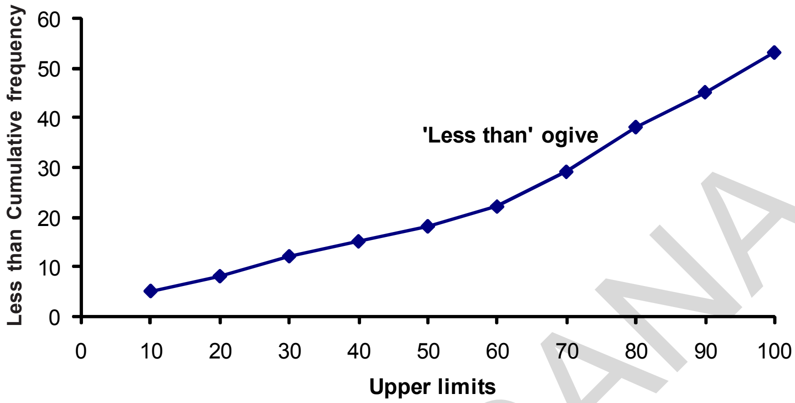
14.6 संचित बारंबारिता बंटन का आलेख द्वारा प्रदर्शनः (Graphical representation of Cumulative Frequency Distribution)

हमें ज्ञात है कि आलेखीय प्रदर्शन से दत्तों को आसानी से समझा जा सकता है। नवीं कक्षा में, दत्तों का बार ग्राफ, सोपान आलेख, और बारंबारिता बहुभुज के बारे में पढा था। अब संचित बारंबारिता का आलेख द्वारा निरूपण देखेंगे।

उदाहरण के लिए, दिए गए उदाहरण में संचित बारंबारिता बंटन तालिका को देखेंगे।

आलेख चित्रित करते समय यह ध्यान देना आवश्यक है कि, वर्गांतर लगातार हों, क्योंकि संचित बारंबारिता का संबंध सीमाओं के साथ रहता है। जब कि सीमाओं से नहीं।

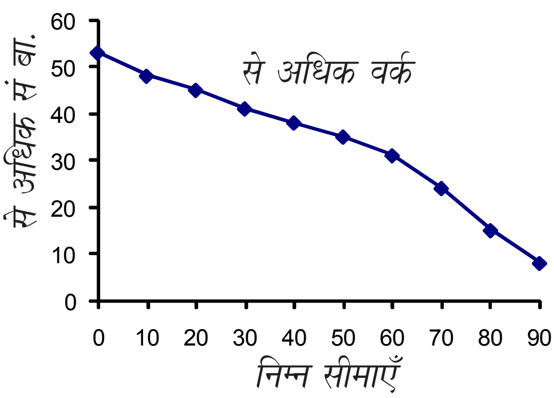
स्मरण कीजिए कि मूल्य 10, 20, 30, ..., 100 यह श्रेणी की उच्च सीमाएँ है आलेख में दत्तों को प्रस्तुत करने के लिए वर्गांतर के उच्च सीमाओं को क्षैतिज X - अक्ष पर दर्शाते हैं और संलग्न संचित बारंबारिता को ऊर्ध्वाधर Y-अक्ष पर सूचित करते हैं, सुविधा अनुसार इकाई को चुन कर। अब संबंधित क्रमित युग्मों की जोडियों को (उच्च सीमाएँ, संलग्न संचित बारंबारिताओं को) अर्थात् (10, 5), (20, 8), (30,, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) आलेख में चित्रित कर उन्हे मिलाया गया है वक्र रेखा को संचित बारंबारिता वक्र या ओजीव वक्र(से कम विधि) कहते हैं।



यह पद **'ogive'** को **'ojeev'** द्वारा पढते हैं। और यह शब्द **ogee** से प्राप्त हुआ है जिसमें अवतल वक्र **(concave)** का प्रवाह उत्तल वक्र **(convex)** में होता है जिससे **S** आकार का वक्र प्राप्त होता है। आर्किटेक्चर में **ogee** आकार **14** वीं, **15** वीं, शताब्दी में गोथिक प्रकार का था।

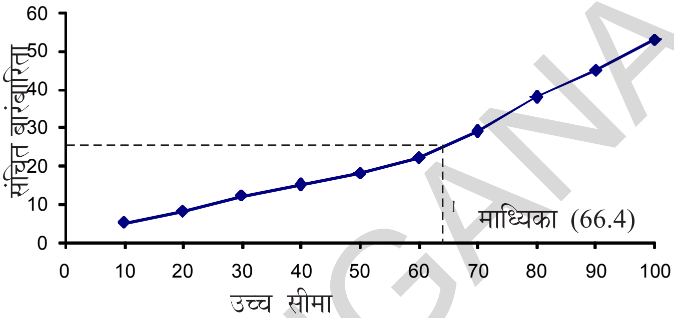
अब दोबारा, संचित बारंबारिता वर्गांतर को, ogive आलेख खींचेंगे (अवरोही संचित बारंबारिता से)

अब, 0, 10, 20, ..., 90 यह निम्न सीमाएँ है दिए गए 0-10, 10-20, ..., 90-100. आलेख में X- अक्ष पर निम्न सीमाओं को और Y-अक्ष पर संलग्न संचित बारंबारिता डालते हैं, अब बिंदुओं को (निम्न सीमाओं को, संलग्न संचित' बारंबारिताओं को) अर्थात (0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8), को आलेख में निरूपित कर उन्हें मिलाइए, हमें संचित बारंबारिता वक्र प्राप्त होगा।



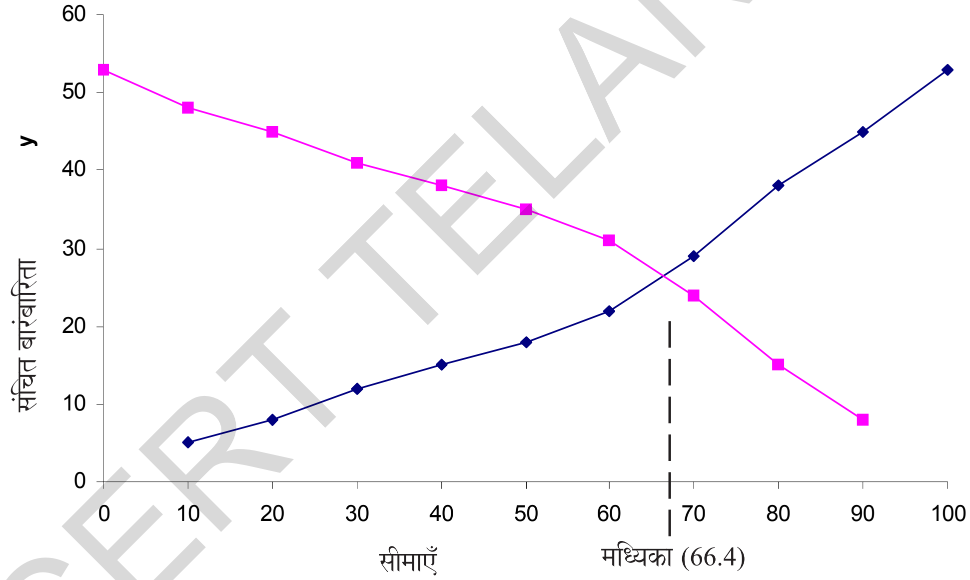
14.6.1 दिए गए वक्र से मध्यिका प्राप्त करना (Obtaining Median From give Curve):-

दो दिए गए संचित बारंबारिता वक्र से मध्यिका प्राप्त करना, संभव है। अब देखेंगे, $\frac{n}{2}=\frac{53}{2}=26.5$ सूचित करने की y- अक्ष पर, इस बिंदु से एक रेखा x- अक्ष के समानान्तर खींचिए जो वक्र को एक बिंदु पर काटता है, इस बिंदु से, एक लंबा x- अक्ष पर एक लंब खींचिए। यह लंब x- अक्ष को जिस बिंदु पर काटता है वही मध्यिका होगी।



दूसरी विधि से मध्यका की प्राप्ति :

(Draw both ogives) दो वक्र रेखाएँ खींचिए (निम्न से उच्च) दो वक्र एक दूसरे को एक बिंदु पर काटते हैं। इस बिंदु से x- अक्ष पर एक लम्ब खींचने पर, वह जिस बिंदु पर काटता है वही मध्यिका होगी।

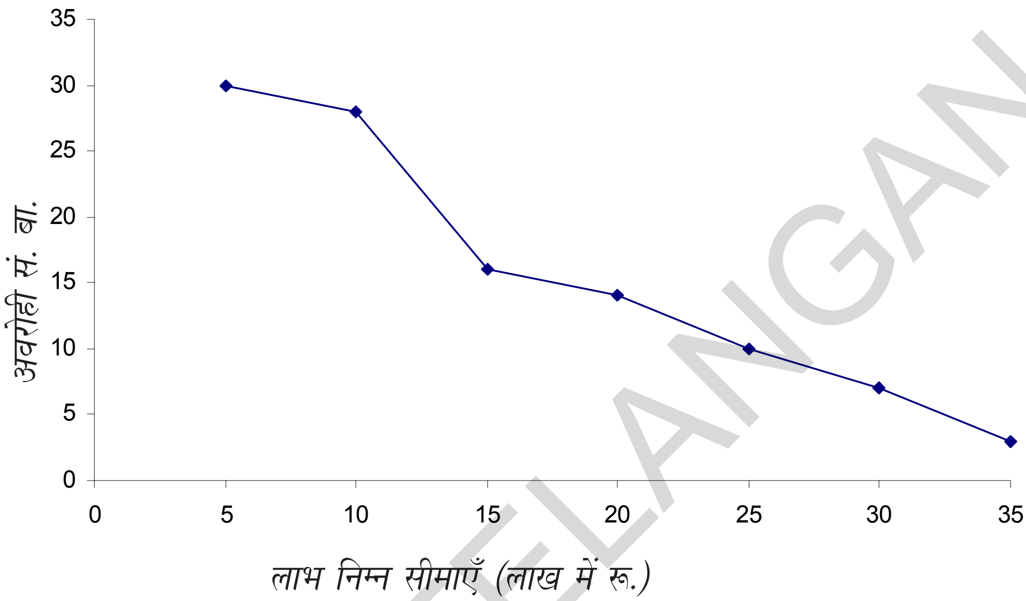


उदाहरण-9. निम्न बंटन में आपके परिसर के 30 दुकानों का वार्षिक लाभ इस प्रकार है।

लाभ (लाखों में)	दुकानों की संख्या (बारंबारिता)
5 के समान या उससे अधिक	30
10 के समान या उससे अधिक	28
15 के समान या उससे अधिक	16
20 के समान या उससे अधिक	14
25 के समान या उससे अधिक	10
30 के समान या उससे अधिक	7
35 के समान या उससे अधिक	3

ऊपर दिए गए दत्तों से दोनों प्रकार के वक्र खींचिए और मध्यिका लाभ प्राप्त कीजिए।

हलः सबसे पहले निर्देशांक अक्ष खींचेगे, लाभ की निम्न सीमाओं को क्षैतिज अक्ष और संचित बारंबारिता को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर डालकर बिंदुओं को आलेख पर निरूपित कीजिए। (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) और (35, 3). इन बिन्दुओं को मिलाएंगे, जिससे चित्र में दर्शाए अनुसार वक्र प्राप्त होगा।

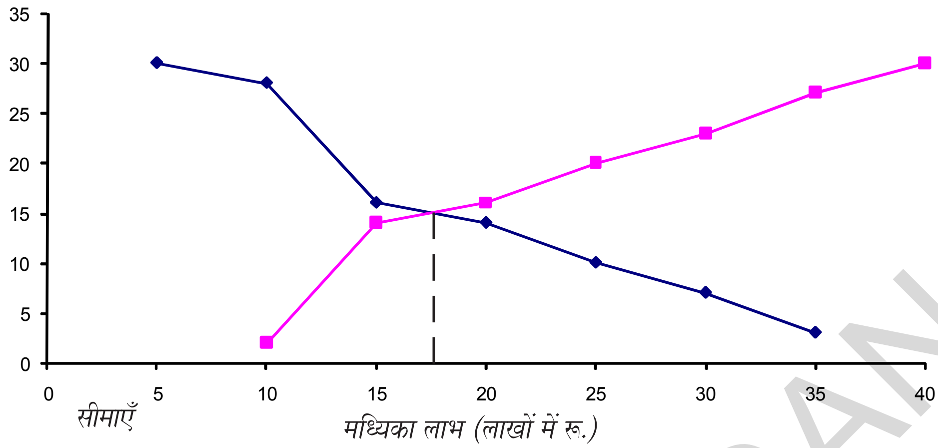


अब, ऊपर की तालिका से वर्गांतर, उनकी बारंबारिता और संचित बारंबारिता प्राप्त करेंगे।

वर्गांतर	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
दुकानो की संख्या	2	12	2	4	3	4	3
संचित बारंबारिता	2	14	16	20	23	27	30

इन मूल्यों के उपयोग से इन बिंदुओं को (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) पिछले अक्षों पर निरूपित कर आरोही ओजीव चित्र में दर्शाए अनुसार प्राप्त करेंगे। कटान बिंदु x - निर्देशांक लगभग 17.5 है, जो मध्यिका है। इसे हम सूत्र से भी हल कर जाँच कर सकते हैं। अतः लाभ मध्यिका (₹ लाखों में.) ₹ 17.5 है।

((abcissa) को नौवीं कक्षा में भुज लिया गया)



अभ्यास - 14.4

1. निम्नलिखित तालिका में 50 मज़दूरों की दैनिक मज़दूरी (रूपयों में) दी गई है।

दैनिक मज़दूरी (रु.में)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
मज़दूरों की संख्या	12	14	8	6	10

ऊपर दी गई तालिका को संचित बारंबारिता तालिका में रूप को बदलकर (Convert) ओजीव (ogive) खींचिए।

2. किसी कक्षा के 35 विद्यार्थियों के स्वास्थ्य परीक्षण में, उनका भार इस प्रकार पंजीकृत किया गया।

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
38 से कम	0
40 से कम	3
42 से कम	5
44 से कम	9
46 से कम	14
48 से कम	28
50 से कम	32
52 से कम	35

दिए गए दत्तों का आरोही (Less than ogive) आलेख खींचिए। तथा आलेख द्वारा भार की मध्यिका ज्ञात कीजिए और सूत्र द्वारा जाँच कीजिए।

3. निम्न तालिका में किसी गाँव के 100 किसानों की गेहूँ की पैदावर प्रति हेक्टर में इस प्रकार है।

पैदावर (Qui/Hec) (क्विंटल/हंक्टर)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
किसानों की संख्या	2	8	12	24	38	16

दी गई तालिका को आरोही बारंबारिता तालिका में बदल कर आलेख खींचिए।

प्रस्तावित परियोजना

मध्यमान, मध्यिका, बहुलक ज्ञात करना

- दैनिक जीवन की घटनाओं में उपयोग ।
- प्राप्त स्रोतों से जानकारी एकत्रित करना । एकत्रित जानकारी के आधार पर मध्यमान, मध्यिका, बहुलक के आरेख तैयार करना ।

हमने क्या चर्चा की :

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित अंशो के बारे में पढा।

1. समूहबद्ध बारंबारिता बंटन ज्ञात करने की विधि :

   (i) प्रत्यक्ष विधि : $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

   (ii) कल्पित मध्यमान विधि : $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

   (iii) क्रम विचलन पद्धति (विधि) : $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

2. समूहबद्ध दत्तों का बहुलक ज्ञात करने की विधि का सूत्रः

   $$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

   जहाँ पर चिन्हों का अपना अर्थ होता है।

3. समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने का सूत्र

   $$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$ जहाँ पर चिन्हों का अपना अर्थ है।

4. मध्यिका (ज्ञात) करने के लिए वर्गांतर लगातार (continious) रहना चाहिए।
5. संचित बारंबारिता बंटन को आरोही एवं अवरोही संचित बारंबारिता वक्र के रूप में दर्शाना।
6. जब ओजीव (Ogive) वक्र को आलेख पर डालते हैं तब सीमाओं को x-अक्ष पर तथा संचित बारंबारिता को y-अक्ष पर लिया जाता है।।
7. दोनों अक्षों पर इकाई समान नहीं रहती है।
8. समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका आलेख द्वारा प्राप्त होती है, जो दो ओजीव (Ogive) वक्रों के कटान बिंदु का x- निर्देशांक होता है।

अध्याय

15

गणितीय नमूने बनाना
(Mathematical Modelling)

परिशिष्ट (APPENDIX)

A.I.1

25 फरवरी 2013 को इसरो (ISRO) लांचर ने पी.एस.एल.वी C20 के कक्ष में (SARAL) उपग्रह डाला। उपग्रह का भार 407 कि.ग्राम है। यह 781 किलो मीटर की ऊँचाई पर है और इसका कक्ष 98.5° डिग्री के कोण पर झुका हुआ है।

उपरोक्त जानकारी पढते समय हम यह सोच रहे होंगे कि :

(i) वैज्ञानिक ने 781 मी. की ऊँचाई कैसे ज्ञात की? वे अंतरिक्ष में जाने का उपाय कैसे किये?

(ii) कैसे वे कक्ष के कोण को मापे बिना 98.5° का निष्कर्ष निकाला?

(iii) हमें आश्चर्य होगा कि कैसे गणितज्ञ और वैज्ञानिक इन परिणामों का अनुमान लगाते है।

नीचे कुछ उदाहरण दिये गये है जो हमारे दैनिक जीवन से संबंधित हैं। आइये हम इन उदाहणों पर ध्यान दें।

(i) सूर्य की सतह पर तापमान 6,000°C है।

(ii) मानव हृदय शरीर में 5 से 6 लीटर रक्त प्रति मिनट पंप करता है।

(iii) हमें ज्ञात है कि सूर्य और पृथ्वी के मध्य दूरी 149000 कि. मी. है।

उपरोक्त उदाहरण से हम जानते हैं कि हममें से न कोई सूर्य के पास गया है और न ही किसी ने हृदय को बाहर निकाल कर उस का कार्य देखा है। ये सभी गणनाएँ गणितीय मॉडलिंग के माध्यम से किये गये हैं।

गणितीय मॉडलिंग सिर्फ वैज्ञानिक ही नहीं, हम भी इसका प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिये हम यह जानना चाहते हैं कि (i) हम 10% साधारण ब्याज पर ₹100 की राशी उधार लेने पर एक वर्ष के पश्चात कितना मिश्र धन देना होगा? या फिर (ii) हम यदि एक कमरे को रँगवाना चाहते हैं तो कितना रंग लगेगा? इन सभी समस्याओं को गणितीय मॉडलिंग द्वारा हल किया जाता है।

सोचिए - चर्चा कीजिए।

अपने मित्रों से वास्तविक जीवन के कुछ उदाहरण के विषय में चर्चा कीजिये जहाँ हम सीधा मापन न कर गणितीय मॉडलिंग का उपयोग करते हैं।

A.I.2 गणितीय नमूने :

क्या आपको त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र पता है?

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

इसी तरह साधारण ब्याज की गणना में $I = \frac{PTR}{100}$ सूत्र का उपयोग किया जाता है। यह सूत्र ब्याज (I); मूलधन (P); समय (T); और दर (R). के बीच समीकरणीय संबंध है। ये सूत्र गणितीय मॉडलिंग के उदाहरण हैं।

गणितीय मॉडलिंग के कुछ और उदाहरण निम्न हैं।

(i) वेग (S) $= \dfrac{\text{दूरी (d)}}{\text{समय (T)}}$

(ii) चक्रवृद्धि ब्याज (A) $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

जहाँ P = मूलधन

r = ब्याज की दर

n = गणना की संख्या

अतः गणितीय मॉडल कुछ भी नहीं, लेकिन वह कुछ वास्तविक जीवन की परिस्थितियों का गणितीय वर्णन है।

यह कीजिए।

पिछली कक्षाओं में सीखे हुये कुछ गणितीय मॉडल लिखिए।

A.I.3 गणितीय नमूने बनाना (Mathematical Modelling)

हम अपने दैनिक जीवन में अनेक समस्याओं का सामना करते है। हम उन्हें गणितीय समस्या के रूप में लिखकर उसके हल की खोज करने का प्रयास करते हैं। इसके पश्चात हम समाधान की व्याख्या और समाधान की मान्यता कहाँ तक सत्य है इसकी जाँच करते हैं।

गणितीय नमूने के निर्माण से समस्या के समाधान को खोजने की इस प्रक्रिया को गणितीय मॉडलिंग कहते हैं।

अब हम कुछ और गणितीय मॉडलिंग से संबंधित उदाहरणों का निरीक्षण करेंगे।

उदाहरण 1 : वाणी ₹19,000 की टी.वी. खरीदना चाहती है। लेकिन उसके पास केवल ₹15,000. है। इसलिए वह प्रति वर्ष 8% साधारण ब्याज की दर से पूँजी जमा करना चाहती है। तो कितने वर्षों के बाद वह, टी.वी. खरीदेगी?

चरण **1 :** (समस्या को समझना) : इस स्थिति में, हम असली समस्या को परिभाषित करेंगे। यदि हमें मूलधन, ब्याज की दर दी गई है और वर्ष ज्ञात करना है कि कब वह रकम ₹19,000 हो जायेगी।

चरण **2 :** (गणितीय वर्णन और निर्माण) हम गणितीय संदर्भ में इस समस्या के विभिन्न पहलूओं का वर्णन करेंगे। हम पहले चर राशी को परिभाषित करेंगे और फिर असमानताएँ लिख कर गणितीय संदर्भ में इस समस्या को हल करने के लिये आवश्यक डाटा इकट्ठा करेंगे।

यहाँ हम साधारण ब्याज के लिये सूत्र का उपयोग करेंगे जो है :

$I = \frac{PTR}{100}$ (नमूना)

जहाँ P = मूलधन, T = वर्षों की संख्या, R = ब्याज की दर, I = ब्याज

हमे समय (T) ज्ञात करना है $T = \frac{100I}{RP}$

चरण **3:** (गणितीय समस्या को सुलझाना) इस चरण में, हम चरण 2 में विकसित किये गये सूत्र के उपयोग से समस्या का समाधान निकालेंगे।

हम जानते हैं कि वाणी के पास पहले से ही ₹15,000 है, (P) ।

उसे (19000-15000 = ₹4000) की अतिरिक्त आवश्यकता है। जो वह ब्याज (I) की रकम से जमा करना चाहती है।

$$\mathrm{P} = ₹15{,}000, \text{ दर} = 8\%, \text{ तब } \mathrm{I} = 4000; \ \mathrm{T} = \frac{100 \times 4\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{150\cancel{0}\cancel{0} \times 8} = \frac{40\cancel{0}}{12\cancel{0}}$$

$$\mathrm{T} = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ वर्ष}$$

या चरण : 4 (समाधान की व्याख्या) : पिछले चरण में प्राप्त समाधान की यहाँ पर व्याख्या की गई है।

यहाँ $\mathrm{T} = 3\frac{1}{3}$ वर्ष, का अर्थ है 3 वर्ष और 4 महीने। अतः वाणी 3 वर्ष और 4 महीने के पश्चात टी.वी. खरीद पायेगी।

चरण 5 : मॉडल की मान्यता : हम हमेशा एक मॉडल को स्वीकार नहीं कर सकते हैं क्यों कि वह वास्तविकता से मेल नहीं रखता है। यदि आवश्यक हो तो हम गणितीय मॉडल की जाँच और संशोधित कार्य को मान्यता देंगे।

दिये गये उदाहरण में हम मानते हैं के ब्याज का दर नहीं बदलेगा। यदि ऐसा होगा तो हमारा मॉडल $\frac{PTR}{100}$ काम नहीं करेगा। हम मानते है कि टी.वी. का दाम ₹19,000. है।

अब हम दूसरा उदाहरण लेंगे।

उदाहरण-**2.** लोकेश्वरम उच्च विद्यालय में 10 वीं कक्षा के 50 छात्र और उनके गणित के शिक्षक के साथ लोकेश्वरम से हैद्राबाद के दौरे पर जाना चाहते हैं। प्रत्येक वाहन में चालक (driver) के अतिरिक्त छ व्यक्ति बैठ सकते है। बताइए उनको कितने वाहनों की आवश्यकता होगी?

चरण **1 :** 51 व्यक्तियों को ले जाने के लिये आवश्यक वाहनों की संख्या का पता लगाना चाहते हैं। हमें पता है कि प्रत्येक वाहन में ड्राइवर के अतिरिक्त 6 व्यक्ति बैठ सकते हैं।

चरण **2 :** वाहनों की संख्या = व्यक्तियों की संख्या / एक वाहन की क्षमता

चरण **3 :** वाहनों की संख्या = 51/6 = 8.5

चरण **4 :** व्याख्या

हमें पता है कि 8.5 वाहन नहीं हो सकते हैं। इसलिये हमें 9 वाहन की आवश्यकता है।

इसलिये आवश्यक वाहनों की संख्या = 9.

चरण **5 :** मॉडलिंग करते समय हमने दुबले और मोटे छात्र को समान स्थान दिया है।

यह कीजिए।

1. अपने पाठ्य पुस्तक से कोई एक व्यावहारिक समस्या लेकर एक गणितीय मॉडल बनाकर हल कीजिए।
2. नीचे दिये गये समस्या के लिये एक गणितीय मॉडल बनाकर हल कीजिए।

एक कार एक स्थान A से 30 कि.मी. / प्र. घंटे के वेग से B स्थान की ओर जाती है। उसी समय एक दूसरी कार B स्थान से A की ओर 40 कि.मी./ प्र. घंटे के वेग से आती है। यदि A और B के बीच की दूरी 100 कि.मी. है तो कितने समय में वे दोनों कार एक दूसरे से मिलेंगे।

अब तक हम सरल शब्दों की समस्याओं के लिये गणितीय मॉडल बनाये है। आइये अब हम वास्तविक जीवन का एक उदाहरण लेकर उसका गणितीय मॉडल बनायेंगे।

उदाहरण-3. वर्ष 2000 में संयुक्त राष्ट्र के 191 सदस्य देशों ने लिंग समानता को बढ़ाने के लिये एक घोषणा पत्र पर हस्ताक्षर किए। इस लक्ष्य को प्राप्त करने के लिये यह निर्णय लिया गया कि एक सूचक चाहिए जो प्राथमिक, माध्यमिक शिक्षा में छात्र और छात्राओं का अनुपात है। भारत ने भी घोषणा पत्र पर हस्ताक्षर किए। भारत में प्राथमिक विद्यालयों में पढ़ने वाली छात्राओं की संख्या (डाटा) तालिका A.I.1. में नीचे दी गई है।

तालिका **A.I.1**

वर्ष	**नामांकन (Enrolment) (% में)**
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

इस दत्त का उपयोग करते हुए, गणितीय मॉडलिंग की सहायता से लडकियों के प्रवेश में हुई वृद्धि के प्रतिशत का वर्णन कीजिए। इसके अतिरिक्त यह भी अनुमान लगाइए कि कितने वर्षों में लड़कियों का नामांकन 50% होगा।

हल:

चरण 1 : निरूपण (Formation) सूत्र बद्ध करना : पहले हम दी गयी समस्या को गणितीय समस्या में बदलेंगे।

तालिका A.I.1 में वर्ष 1991 – 92, 1992- 93, आदि के नामांकन दिये गये है। एक शैक्षणिक (academic) वर्ष के आरंभ में प्रवेश पाने के पश्चात हम 1991, 1992 के रूप में वर्षों को ले सकते है। हम यह कल्पना करेंगे कि प्राथमिक विद्यालयों में प्रवेश लेने वाली लडकियों का प्रतिशत तालिका A.I.1. में दर के रूप में एक ही दर से बढते हुये लिखेंगे। यहाँ पर वर्षों की संख्या महत्वपूर्ण नहीं। ऐसी ही और एक स्थिति में तीन वर्ष के लिए ₹ 15000 पर 8% दर का साधारण ब्याज लगाते समय 1999 – 2002 या 2001 – 2004 कहना आवश्यक नहीं है। केवल यह मानना है कि ब्याज का दर कितने वर्ष का है।

यहाँ भी हम देखेंगे कि नामांकन 1991 के बाद पारित कर दिया है कि वर्ष की संख्या और नामांकन की तुलना द्वारा 1991 के बाद बढता है। हम 1991 को शून्य वर्ष लेंगे। और वर्ष 1991 को 1, 1992 को 2 लेंगे और लिखेंगे। अतः तालिका A.I.1 अब तालिका A.I.2 के रूप में दिखेगी।

तालिका **A.I.2**

वर्ष	नामांकन **(% में)**
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

तालिका A.I.3. में नामांकन का बढता % दिया गया है।

तालिका **A.I.3**

वर्ष	नामांकन % में	बढत (वृद्धि) **(Increase)**
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 – 1992 प्रथम वर्ष की अवधि के अंत में नामांकन 41.9% से 42.6% करने के लिये 0.7% की वृद्धि हुई है। दूसरे वर्ष के अंत में, यह 42.6% से 42.7% करने के लिये 0.1% की वृद्धि हुई है। उपरोक्त तालिका से, हम वर्ष और प्रतिशत की संख्या के बीच एक निश्चित संबंध नहीं देखते हैं। लेकिन वृद्धि स्थिर है। प्रथम वर्ष में और 10 वें वर्ष में एक बहुत बडा अन्तराल है। इन मूल्यों का अर्थ है : -

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}=0.22 \quad .... (1)$$

हम मानते हैं कि नामांकन में 0.22 % की वृद्धि है।

चरण **2 :** गणितीय वर्णन

हमने माना है कि नामांकन प्रति वर्ष 0.22% की दर से बढता है।

तो पहले वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22$

दूसरे वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

तीसरे वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

अतः 'n' वर्ष में नामांकन % $= 41.9 + 0.22n$, for $n \geq 1$. .... (2)

अब हम नामांकन 50% तक पहुँचने के लिए वर्षों की संख्या को ज्ञात करना है। तो इस समीकरण से हम 'n' का मूल्य प्राप्त करेंगे।

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

चरण **3 : हल :** 'n' के लिए (2) को हल करने पर, प्राप्त है,

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

चरण **4 :** व्याख्या (Interpretation) वर्ष की संख्या एक अभिन्न मूल्य (Integral value) है। हम अगला उच्च पूर्णांक 37 लेंगे। तब नामांकन प्रतिशत 50 होने के लिये

$$1991 + 37 = 2028.$$

चरण **5 :** विधि मान्यकरण **(Validation) :** हमें एक वास्तविक जीवन की स्थिति के साथ काम करते समय यह मानना चाहिए कि वह वास्तविक स्थिति से मेल खाता है या नहीं।

हम यह जाँच करेंगे कि सूत्र (2) वास्तविकता के साथ समझौता करता है या नहीं। सूत्र (2) का उपयोग करते हुए हम पहले से ही जानते हैं कि वर्ष के लिए ''मान'' पता है और अंतर खोजने के द्वारा यह जानते हैं कि तालिका A.I.4 में दिये गये तालिका के मूल्यों के साथ तुलना करेंगे।

तालिका **A.I.4**

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) में दिये गये मूल्य (% में)	अंतर (% में)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

आप देखेंगे कि सूत्र (2) द्वारा दिये गये कुछ मूल्य वास्तविक मूल्य से 0.3% या 0.5% कम है। प्रतिवर्ष वृद्धि 1% से 2% है। इस तरह 3 से 5 वर्ष के लिए एक अंतर उत्पन्न होता है। यदि हम समझते हैं कि यह अंतर पर्याप्त है तो सूत्र (2) हमारा गणितीय मॉडल होगा।

यदि हम मानते हैं कि इसमें बहुत बडी त्रुटि है तो हम इस मॉडल को सुधार करने के लिये चरण (2) के पास वापस जायेंगे और समीकरण बदलेंगे। आइये, हम अब ऐसा करें।

चरण **1 :** सूत्र को दोहराना (Reformulation) हमने माना है कि 0.22% से वृद्धि हुई है। लेकिन हम अब त्रुटि को कम करने के लिए एक सुधार कारक (correction factor) लागू करेंगे। इसके लिये हम सभी त्रुटियों का मध्यमान (mean) लेंगे। जो इस प्रकार होगा।

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

हम त्रुटियों के मध्यमान से इस मूल्य की त्रुटियों को ठीक करेंगे। संशोधित गणितीय विवरण (Revised Mathematical Description) : (2) में दी गई नामांकन प्रतिशत के लिये हमारे सूत्र में त्रुटियों का मध्यमान जोड दें तो सुधारा गया सूत्र होगा।

n वर्ष में नामांकन प्रतिशत $= 41.9 + 0.22n + 0.18$

$= 42.08 + 0.22n$, ($n \geq 1$ के लिये ... (3)

समीकरण (2) को सुधारेंगे, और n का नया समीकरण होगा :

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad \text{... (4)}$$

परिवर्तित हल : **(Altered Solution) :** समीकरण (4) हल करने पर, प्राप्त है,

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

व्याख्या (**Interpretation**) **:** क्योंकि n = 36, है, प्राथमिक विद्यालयों में लडकियों का नामांकन, वर्ष 1991 + 36 = 2027 में 50% तक पहुँच जायेगा।

मान्यता : (Validation) : एक बार फिर हम वास्तविक मूल्यों के साथ प्राप्त मूल्यों की तुलना करेंगे। तालिका A.I.5 तुलना दर्शाता है।

तालिका **A.I.5**

वर्ष	नामांकन (% में)	**(2)** से दिये गये मूल्य	मूल्यों में अंतर	**(4)** में दिये गये मूल्य	मूल्यों का अंतर
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

आप देखते है कि (4) के मूल्य (2) के मूल्य से अधिक निकट है। त्रुटियों का मध्यमान यहाँ पर शून्य है।

A.I.4 गणितीय मॉडलिंग के लाभ :-

1. गणितीय मॉडलिंग के उद्देश्य गणितीय समस्या में परिवर्तित करके विश्व को एक वास्तविक समस्या के बारे में कुछ उपयोगी जानकारी मिल रही है। यह इस तरह के प्रत्यक्ष अवलोकन के रूप में अन्य पद्धतियों से या प्रयोगों के आयोजन से जानकारी प्राप्त करने के लिये संभव है। जब यह विशेष रूप से उपयोग किया जाता है तो अधिक मूल्यवान नहीं है।

   उदाहरण के लिये हम ताजमहल पर मथुरा रिफाइनरी के निर्वहन के संक्षारक प्रभाव का अध्ययन करना चाहते हैं। हम सीधा ताजमहल पर प्रयोग नहीं करना चाहते हैं क्योंकि ऐसा करने से मूल्यवान स्मारक को हानि पहुँचेगी। यहाँ पर गणितीय मॉडलिंग बहुत काम आयेगा।

2. भविष्य की घटनाओं की भविष्यवाणी निर्णय लेने की प्रक्रिया में प्रवेश किये जाने के पश्चात, पूर्वानुमान, संगठनों को कई प्रकार से अधिक महत्वपूर्ण बना दिया है।

उदाहरण के लिए

(i) विपणन (Marketing) विभाग में बिक्री रणनीतियों की योजना बनाने में, आवश्यकता का अनुमान लगाने में विश्वसनीय सहायता प्राप्त होती है।

(ii) एक स्कूल बोर्ड जब नये स्कूल आरंभ करने का फैसला करती है तो विभिन्न ज़िलों में स्कूल जाने वाले बच्चों की संख्या में वृद्धि को ध्यान रखते हुये, भविष्यवाणी करने में सक्षमता की आवश्यकता को देखती है।

3. अकसर हमें अनुमान लगाने की आवश्यकता होती है, जैसे जंगल में पेड़, झील में मछलियाँ, मतदाताओं की संख्या आदि। कुछ और उदाहरण है जहाँ गणितीय मॉडलिंग का उपयोग होता है।

   (i) कुछ वर्षों के लिये भविष्य में जनसंख्या का आकलन (Estimation)

   (ii) मानसून के आने की भविष्यवाणी

   (iii) आने वाले वर्षों में साक्षरता दर का आकलन

   (iv) एक पेड़ में पत्तों की संख्या का आकलन

   (v) महासागरों की गहराई ज्ञात करना।

A.I.5 गणितीय मॉडलिंग की सीमाएँ :

क्या गणितीय मॉडलिंग हमारी सभी समस्याओं का समाधान है?

निश्चित रूप से नहीं है। यहाँ अपनी सीमाएँ है। इस प्रकार यह एक मॉडल से एक वास्तविक-विश्व की समस्या का एक सरलीकरण है जो मस्तिष्क में याद रखना चाहिए। ये दोनों समान नहीं है। एक मानचित्र देश की भौतिक सुविधाएँ देता है और देश के विभिन्न स्थानों का अंतर बताता है। हम इससे समुद्र स्तर से ऊपर एक जगह की ऊँचाई प्राप्त कर सकते हैं, लेकिन इससे हम लोगों की विशेषताएँ ज्ञात नहीं कर सकते हैं। इसका अर्थ यह है कि हम केवल अपेक्षा करते समय सभी कारकों को मान्यता देते हैं। इस उद्देश्य के लिए एक मॉडल का उपयोग करना चाहिए। हम इसे केवल वहाँ उपयोग में लाना चाहिए जहाँ इसकी उपयोगिता होती हैं।

A.I.6 किस हद तक हमें हमारे मॉडल में सुधार का प्रयत्न करना चाहिए?

एक मॉडल में सुधार करने के लिये अतिरिक्त कारकों की आवश्यकता होती है। हम अपने गणितीय समीकरणों में अधिक चर जोडने पर समीकरण जटिल बन जाता है और मॉडल का उपयोग करना कठिन हो जाता है। एक मॉडल वह है जो उपयोग करने के लिये सरल हो। बेहतर मॉडल वह है जो वास्तविकता के निकट हो।

प्रसाय कीजिए।

एक समस्या जो पीछे 13 वीं सदी में लियोनाडो कीबोनिका ने खडी की यदि सिर्फ दो खरगोश से आरंभ करें और पूरा वर्ष उन्हें प्रजनन के लिये छोड दें तो वर्ष के अंत में कितने होंगे? खरगोश की एक जोडी प्रत्येक महीने वंश की एक जोडी को जन्म देती है प्रत्येक जोडी 2 महीने की उम्र में खरगोश के जोडे की संख्या शून्य और 1 महिने के लिये छोड़कर, दो पूर्ववर्ती महीनों में खरगोश के योग द्वारा दिया जाता है। नीचे दिये गये तालिका में खरगोश की आबादी की बढत का पता चलता है।

माह	खरगोश की जोड़ियाँ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

एक साल के पश्चात हमें 233 खरगोश प्राप्त होते हैं। सिर्फ 16 महीने के बाद लगभग 1600 जोडे होंगे। इस स्थिति में समस्या और गणितीय मॉडलिंग के विभिन्न चरणों को विश्लेषित करना पड़ता है।

हम इस अध्याय के अंत में कुछ रोचक उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-4. (पासे की एक जोडी को घुमाना) **(Rolling of a pair of dice) :** दीक्षिता और आशीष पासे के साथ खेल रहे हैं। अशीश ने कहा कि यदि वह पासे पर दिखे संख्याओं का योग सही बताएगी तो उसे एक पुरस्कार दिया जायेगा। यह दीक्षित को बहुत अच्छा लगा और वह उस योग के बारे में सोचने लगी जिससे सबसे अधिक योग प्राप्त हो।

हल :

चरण 1 (समस्या को समझना) **(Understanding the problem) :** आप को कुछ संख्याओं का पता लगाना है जिसकी अधिक संभावना हो।

चरण 2 (गणितीय वर्णन) **(Mathematical description) :** गणितीय संदर्भ में, समस्या को ऐसा देख सकते हैं कि संख्या के विभिन्न संभव रकम की संभावनाओं को खोजने के लिये प्रायिकता ज्ञात कीजिये। हम बहुत ही सरलता से संख्या के निम्न 36 जोडियों में से एक का यादृच्छिक विकल्प के रूप में पासों का एक रोल का प्रतिनिधित्व करने से मॉडल की स्थिति बना सकते हैं।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

प्रत्येक जोडी में पहली संख्या देखी गई संख्या का प्रतिनिधित्व करता है। और दूसरी संख्या दूसरी बार डालने पर दिखाई देने वाली संख्या होगी।

चरण 3 (गणितीय समस्या को सुलझाने) **(Solving the mathematical problem) :** ऊपर प्रत्येक जोडी में संख्या संक्षेप में है। संभव रकम 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 है लगता है कि सभी 36 जोडे समान रूप में होने की संभावना है। ऐसी संभावना को खोजना है।

यह हम निम्न तालिका में करेंगे :

योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता (Probability)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

सात की राशी होने का मौका रकम के रूप में दूसरे नंबर मिलने की संभावना से भी बडी है, जो $\frac{1}{6}$ भाग है।

चरण **4** (समाधान की व्याख्या) **:** सबसे अधिक संभावना 7 के योग होने का है। इसलिये आपको बार-बार संख्या 7 लगाना होता है।

चरण **5** (मॉडल मान्यकरण) **:** एक पासे को अत्यधिक बार उछालिए और एक संबंधित बारंबारिता तालिका बनाइए। इस संबंधित बांरबारिता को प्रायिकता (Probability) की अवृत्तियों के साथ तुलना कीजिए। यदि यह निकट नहीं है तो पासे की प्रायिकता दुविधा में हैं। (biased) हमें पूर्व ज्ञान है कि दिशा में संख्या का मूल्यांकन करने के लिये दत्त प्राप्त कर सकते है।

अगली बार प्रयत्न करने के लिये इस अभ्यास को जानने से पहले, हमें कुछ पृष्ठभूमि की जानकारी की आवश्यकता है।

आवश्यकता होने पर अपने पास रकम नहीं होना यह सामान्य स्थिति है। यह दैनिक जीवन में अनिवार्य है कि आराम की वस्तुएँ खरीदने के लिये पर्याप्त पैसे नहीं है। स्कूटर, फ्रिज, टीवी, कार जैसे वस्तुओं को सक्षम करने के लिये एक किस्त योजना के रूप में जाना जाता है और यह योजना व्यापारियों के द्वारा आरम्भ की गयी है।

कभी-कभी एक व्यापारी ग्राहकों को इन वस्तुओं को खरीदने के लिये विपणन रणनीति के रूप में एक किस्त योजना का परिचय देता है। किस्त की योजना के तहत ग्राहक इसे खरीदते समय पूरी राशी का भुगतान करने की आवश्यकता नहीं है। वह, मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक या वार्षिक हो सकती है। वस्तु खरीदने के बाद उसकी भुगतान किस्तों में करने की अनुमति दी जाती है। किस्त खरीददार विक्रेता को ''डिफर्ड भुगतान'' की एक तारीख देता है जिसके लिये कुछ ब्याज लगाया जाता है क्योंकि किस्तों में अधिक रक़म का भुगतान करना होता है।

इस अवधारणा से संबंधित कुछ शब्द अकसर उपयोग किये जाते हैं। आप उन्हें जानते होंगे। उदाहरण के लिये एक वस्तु की कुछ कीमत ग्राहक खरीदते समय उसकी राशी का भुगतान करना पड़ता है।

अब, गणितीय मॉडलिंग का उपयोग करके नीचे दी गई समस्या को हल करने का प्रयास करेंगे।

प्रयास कीजिए।

रवि एक साइकल खरीदना चाहता है। वह बाज़ार जाकर पता लगाता है कि उसके पसंद की साइकल ₹2,400 में है। दुकानदार उसकी मदद करता है। वह रवि से कहता है कि वह ₹1400 (डौन पेमेंट) अग्रिम भुगतान करें और शेष राशी हर महीना ₹550 की किस्तों में अदा करें। रवि या तो दुकानदार की बात मान सकता है या कोई बैंक से 12% प्रति वर्ष साधारण ब्याज से ऋण ले सकता है। इन दो अवसरों में से रवि के लिये कौनसा सबसे अच्छा है? रवि की सहायता कीजिए।