Name : ....

Roll No. : ....

नवीन पाठ्यक्रम / New Syllabus

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 11
[Total No. of Printed Pages : 11

O-212204 / 804–A

विषय : गणित
Subject : Mathematics

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

सामान्य निर्देश : (*i*) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(*ii*) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

General Instructions : (*i*) All questions are compulsory.
(*ii*) Use of calculator is not permitted.

निर्देश : (अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अतिलघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction : (A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carries 1 mark.

प्रश्न-1 सिद्ध कीजिए कि सदिशों $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ तथा $-\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ परस्पर लंबवत् हैं।

Show that the vectors $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ and $-\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ are perpendicular to each other.

प्रश्न-2 यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 7\\ 0 & 5 & 8\end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए कि $(A')'=A$.

If matrix $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 7\\ 0 & 5 & 8\end{bmatrix}$, then show that $(A')'=A$.

प्रश्न-3 $\int \sin^{-1}(\cos x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \sin^{-1}(\cos x)\,dx$.

प्रश्न-4 अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

Find the order and degree of differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

निर्देश : (ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (B) Question Nos. **5** to **12** are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

प्रश्न-5 सिद्ध कीजिए

$$\tan^{-1}7-\tan^{-1}5=\tan^{-1}\frac{1}{18}$$ [2]

Prove that

$$\tan^{-1}7-\tan^{-1}5=\tan^{-1}\frac{1}{18}$$

प्रश्न-6 यदि $y=e^{x^3}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $y=e^{x^3}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

प्रश्न-7 यदि $\begin{vmatrix}3x & 7\\ -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $\begin{vmatrix}3x & 7\\ -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}$, then find the value of x.

प्रश्न-8 यदि $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$ तथा $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ हों, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$ and $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, then evaluate $P\left(\frac{A}{B}\right)$.

प्रश्न-9 यदि एक रेखा के दिक् अनुपात (2, –1, –2) हैं, तो इसकी दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

If a line has direction ratio (2, –1, –2), then determine its direction cosines.

प्रश्न-10 मान ज्ञात कीजिए

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$$

Find the value of

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$$

प्रश्न-11 $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के संतत की जाँच कीजिए।

Check the continuity of the function $f(x) = 2x^2 - 1$ at $x = 3$.

प्रश्न-12 अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

निर्देश : (स) प्रश्न क्रमांक **13** से **23** तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक **15, 18** एवं **21** में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर **4** अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (C) Question Nos. **13** to **23** are long answer type questions. Question Nos. **15, 18** and **22** have internal choice. Each question carries 4 marks.

प्रश्न-13 सिद्ध कीजिए

$$\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix} = 9y^2(x+y)$$ [4]

Prove that

$$\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix} = 9y^2(x+y)$$

प्रश्न-14 यदि $x = a\,(\cos t + t \sin t)$ और $y = a\,(\sin t - t \cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। [4]

If $x = a\,(\cos t + t \sin t)$ and $y = a\,(\sin t - t \cos t)$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

प्रश्न-15 सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b)$: संख्या 2, $(a - b)$ को विभाजित करती है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। [4]

Prove that the relation R in set of integers Z given by $R = \{(a, b) : (a - b)$ is divisible by number $2\}$ is an equivalence relation.

अथवा

OR

यदि $f: R \to R$ तथा $g: R \to R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है, तो $g \circ f$ तथा $f \circ g$ ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए $g \circ f \neq f \circ g$.

Find $g \circ f$ and $f \circ g$ if $f: R \to R$ and $g: R \to R$ are given by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$. Show that $g \circ f \neq f \circ g$.

प्रश्न-16 अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए : [4]

$$(1 + x^2)\,dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx \quad (x \neq 0)$$

Find the general solution of the differential equation :

$$(1 + x^2)\,dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx \quad (x \neq 0)$$

प्रश्न-17 सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 4\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$ प्रत्येक पर लंब मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। [4]

Find unit vector normal to the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $b = 4\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$.

प्रश्न-18 एक घन का आयतन 9 सेमी.^{3}/सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई 10 सेमी. है, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ?

The volume of a cube is increasing at a rate of 9 cm^3/sec. How fast is the surface area increasing when the length of an edge is 10 cm?

अथवा

OR

अंतराल [1, 5] में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत्त फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

Find the absolute maximum and absolute minimum values of a function given by $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ on the interval [1, 5].

प्रश्न-19 मान ज्ञात कीजिए : [4]

$$\int e^x\left(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

Evaluate :

$$\int e^x\left(\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

प्रश्न-20 यदि $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, तो $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

If $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ are unit vectors such that $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, then find the value of $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$.

प्रश्न-21 दो थैले A और B दिए हैं। थैले A में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं जबकि थैले B में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले से यदृच्छया एक गेंद निकाली गई है, जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले B से निकाली गई है ? [4]

Two bags A and B are given. Bag A contains 3 red and 4 black balls while another bag B contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag B.

प्रश्न-22 सिद्ध कीजिए

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$$ [4]

Prove that

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$$

अथवा

OR

यदि $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of x if $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.

प्रश्न-23 यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो A या B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता $= 1 - P(A')\,P(B')$। सिद्ध कीजिए।

If A and B are two independent events, then the probability of occurrence of at least one of A and B is equal to $1 - P(A')\,P(B')$. Prove.

निर्देश : (द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 27 एवं 29 में आंतरिक विकल्प का प्रावधान है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (D) Question Nos. **24** to **29** are long answer type questions. Question Nos. **27** and **29** have internal choice. Each question carries 6 marks.

प्रश्न-24 आलेखीय विधि द्वारा रैखीय प्रोगामन समस्या को हल कीजिए निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 2y \geq 10,\ 3x + 4y \leq 24,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

$Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। [6]

Solve the linear programming problem graphically subject to the constraints

$$x + 2y \geq 10,\ 3x + 4y \leq 24,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

Find the minimum value of $Z = 200x + 500y$.

प्रश्न-25 आव्यूह विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए : [6]

$$x + y + z = 3$$

$$2x - y + z = 2$$

$$x - 2y + 3z = 2$$

Solve the following system of equations by matrix method :

$$x + y + z = 3$$

$$2x - y + z = 2$$

$$x - 2y + 3z = 2$$

प्रश्न-26 $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [6]

Find the value of $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx$.

प्रश्न-27 रेखाओं $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और

$$\bar{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। [6]

Find the shortest distance between the lines

$$\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ and}$$

$$\bar{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

अथवा

OR

उस समतल का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (5, 2, –4) से जाता है और (2, 3, –1) दिक् अनुपात वाली रेखा पर लंब है।

Find the vector and Cartesian equation of the plane which passes through the point (5, 2, –4) and perpendicular to the line with direction ratio (2, 3, –1).

प्रश्न-28 यदि $y = (\tan^{-1}x)^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x (x^2 + 1) y_1 = 2$. [6]

If $y = (\tan^{-1}x)^2$, prove that $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x (x^2 + 1) y_1 = 2$.

प्रश्न-29 प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [6]

Find the area lying in the first quadrant and bounded by the circle $x^2 + y^2 = 4$ and the lines $x = 0, x = 2$.

अथवा

OR

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

....