अध्याय–12

वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल:

(i) एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है, जिसे प्रायः परिधि (Circumference) कहा जाता है। वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ एक अचर अनुपात होता है। इस अचर अनुपात को यूनानी अक्षर π (पाई) से व्यक्त किया जाता है।

व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या

$d = 2r$

जहाँ $d =$ व्यास

$r =$ त्रिज्या

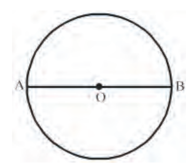
$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

परिधि $= \pi \times$ व्यास

या, $C = \pi \times d$

या, $C = 2\pi r$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$



AB व्यास $= d$

$OB = OA = r$ त्रिज्या

व्यवहारिक कार्य के लिए $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 लेते हैं।

उदाहरण: एक वृत्ताकार खेत पर 24 रू0 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय 5280 रू0 है। इस खेत की 0.50 रू0 प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।(यदि $\pi = \frac{22}{7}$)

हलः- बाड़ की लम्बाई (मीटर में) $= \dfrac{\text{पूरा व्यय}}{\text{दर}} = \dfrac{5280}{24} = 220m$

खेत की परिधि $(C) = 220m$

$$2\pi r = 220 \quad (r \text{ मीटर में})$$

$$r = \frac{220}{2\pi} = \frac{220}{2\times\frac{22}{7}} = \frac{220x7}{2\times 22}$$

$$= 35m$$

खेत का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7}\times 35\times 35 m^2$$

$$= 22\times 5\times 35 m^2$$

$1\,m^2$ खेत की जुताई का व्यय $= 0.50$ रू0

खेत की जुताई कराने का कुल व्यय $= 22\times 5\times 35\times 0.50$

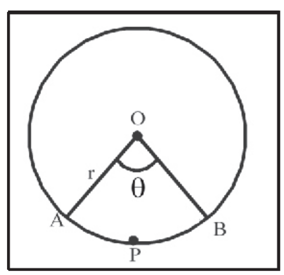
$= 1925$ रू0

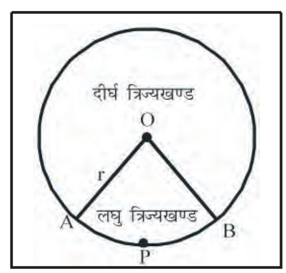
त्रिज्यखण्ड और वृत्तखण्ड के क्षेत्रफल

त्रिज्यखण्डः

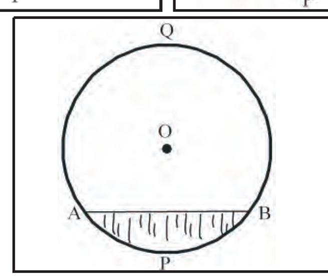
एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिबद्ध) हो, उस वृत्त का त्रिज्यखण्ड कहलाता है।

$\angle AOB$ त्रिज्यखण्ड का कोण कहलाता है।





वृत्तखण्ड- वृत्त की जीवा तथा चाप से घिरे क्षेत्र को वृत्तखण्ड कहते हैं APB लघुवृत्तखण्ड तथा AQB दीर्घवृत्तखण्ड कहलाता है।



त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफलः

जब केन्द्र पर बने कोण का अंशीय माप 360° है, तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

अतः जब केन्द्र पर बने कोण का अंशीय माप 1° है, तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{360^\circ}$

इसलिए जब केन्द्र पर बने कोण का अंशीय माप θ है, तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \times \theta}{360}$

> कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

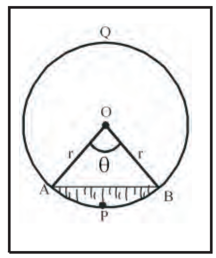
इसी तरह संपूर्ण वृत्त (360 कोण वाले) की लम्बाई $= 2\pi r$

$\therefore$ θ कोण बनाने वाले चाप की लम्बाई $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

> $\therefore$ कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड के संगत चाप की लम्बाई $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \times \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

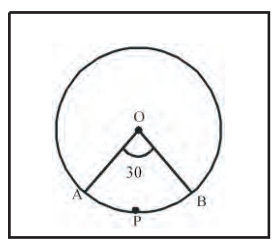


दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ − (लघु वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल)

दीर्घ त्रिज्यखण्ड $OAQB$ का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ − (लघु त्रिज्यखण्ड $OAPB$ का क्षेत्रफल)

उदाहरण- त्रिज्या $4cm$ वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही, संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। $(\pi = 3.14)$

हलः- दिया हुआ त्रिज्यखण्ड $OAPB$ है। (चित्र में देखें)



$$\text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 cm^2$$

$$= \frac{12.56}{3} cm^2$$

$$= 4.19 cm^2$$

संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 -$ त्रिज्यखण्ड $OAPB$ का क्षेत्रफल

$$= 3.14 \times 16 - 4.19$$

$$= 46.05 cm^2 = 46.1 cm^2$$

वैकल्पिक विधि से, दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{360-\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{360-30}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16$$

$$= 46.05 cm^2$$

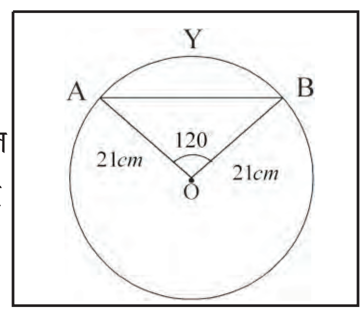
$$= 46.1 cm^2 \text{ (लगभग)}$$

(ii) **उदाहरण**– निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:–

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण P° है, निम्नलिखित है:

(A) $\dfrac{P}{180} \times 2\pi R$ (B) $\dfrac{P}{180} \times \pi R^2$ (C) $\dfrac{P}{360} \times 2\pi R$ (D) $\dfrac{P}{720} \times 2\pi R^2$

उत्तर:– $(D) \dfrac{P}{720} \times 2\pi R^2$



उदाहरण:– आकृति मे दर्शाए गये वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि वृत्त की त्रिज्या $21 cm$ है और $\angle AOB = 120$ है। $(\pi = \frac{22}{7})$

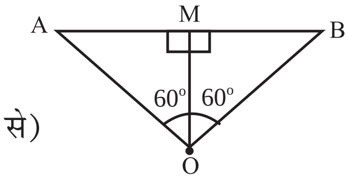
हल:– वृत्तखण्ड AYB का क्षेत्रफल= त्रिज्यखण्ड $OAYB$ का क्षेत्रफल– ΔOAB का क्षेत्रफल ....(i)

त्रिजयखण्ड $OAYB$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{120}{360} \times \dfrac{22}{7} \times 21 \times 21 cm^2$

$$= 462 cm^2$$ ....(ii)

ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए $OM \perp AB$ चाहिए।

जैसा चित्र में दर्शाया गया है।



यहा $OA = OB$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

अतः $\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (RHS सर्वांगसमता से)

$\therefore AM = BM$

$\therefore M$ जीवा AB का मध्य बिन्दु है तथा

$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^{\circ} = 60^{\circ}$$

मान लीजिए $OM = x cm$ है।

इसलिए ΔOMA से,

$$Cos60^{\circ} = \frac{OM}{OA}$$

या, $$\frac{1}{2} = \frac{x}{21}$$

$$x = \frac{21}{2} cm$$

$$Sin60^{\circ} = \frac{AM}{OA}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{21}$$

$$AM = \frac{21\sqrt{3}}{2} cm$$

$$AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3}$$

अतः ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} cm^2$

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3} cm^2 \qquad \text{............(iii)}$$

इसलिए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right) cm^2$

(समीकरण (i),(ii),(iii)से)

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3}) cm^2$$

उदाहरण- त्रिज्या $21cm$ वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60 का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:

(i) चाप की लम्बाई

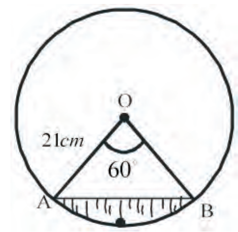
(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

हलः- (i) चाप की लम्बाई $(AB) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{60}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$$= 22cm$$



(ii) चाप द्वारा बनए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 231cm^2$$

(iii)संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$$= 231 - \frac{1}{2} \times 21 \times 21 \times \sin 60$$

$$= 231 - \frac{1}{2} \times 21 \times 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}$$

$$= \left(\frac{924 - 444\sqrt{3}}{4}\right) cm^2$$